ALGEBRE-04/08

(documents interdits)

I

Soit $\mathfrak{g}$ l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients complexes de trace nulle. Posons

$$E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad H = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right).$$

Pour tout espace vectoriel complexe X et tout entier positif a soient $S^a X, \Lambda^a X \subset \otimes^a X$ les produits tensoriels symétriques et antisymétriques.

I.a. Démontrer que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie pour le commutateur des matrices. Soit U l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Démontrer que U est engendrée par les éléments E, F, H, et qu'ils satisfont les relations suivantes $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$.

I.b. On admettra que $\{F^a E^b H^c; a, b, c \in \mathbb{N}\}$ est une base de U. Soit (ρ, V) une représentation simple de dimension finie n de U.

I.b.i. Démontrer que l'endomorphisme $\rho(H)$ de V est diagonalisable (penser à utiliser un vecteur propre de $\rho(H)$ et la simplicité de V).

I.b.ii. Démontrer qu'il existe un vecteur propre $v_0 \in V$ de $\rho(H)$ tel que $\rho(E)(v_0) = 0$. Posons $v_a = \rho(F^a)(v_0)$. Calculer $\rho(E)(v_a)$, $\rho(F)(v_a)$, et $\rho(H)(v_a)$ pour tout $a = 0, 1, \dots$

I.b.iii. Démontrer que $\{v_0, v_1, \dots v_{n-1}\}$ est une base de V.

I.c. Soit $V(1)$ la représentation de dimension 2 de U induite par l'inclusion $\mathfrak{g} \subset M_2(\mathbb{C})$. Posons $V(n) = S^n V$ pour tout $n \neq 0$.

I.c.i. Démontrer que deux représentations simples de dimension n de U sont nécessairement isomorphes.

I.c.ii. Démonter que si V est une représentation de U alors $V(n)$ est une sous-représentation de $\otimes^n V$.

I.c.iii. Démontrer que $V(n)$ est une représentation irréductible de U de dimension $n+1$.

I.d. Démontrer que si V est une représentation irréductible de dimension finie de U alors $S^2 V$, $\Lambda^2 V$ aussi et $\otimes^2 V = S^2 V \oplus \Lambda^2 V$.

I.e. Démontrer que si $n \geqslant m \geqslant 1$ alors $V(n) \otimes V(m) = \bigoplus_{a=n-m}^{n+m} V(a)$.