# Examen de Géométrie différentielle

30 mars 2012

## 1 Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $n \geq 1$. On veut montrer que tout polynôme complexe de degré $n$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (et donc, par un argument classique, en possède $n$ comptées avec multiplicités).

Soit $P$ une application polynomiale de degré $n$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, i.e. $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$ avec $a_n \neq 0$.

(A) Montrer que $P$ s'étend en une application $C^\infty$ de $S^2$ dans $S^2$ que l'on note encore $P$.

(B) Montrer que $dP(z) = 0$ si et seulement si $P'(z) = 0$ où $P'(z) = na_n z^{n-1} + .... + a_1$, et que l'ensemble de ces points, noté $\{\zeta_1, ..., \zeta_k\}$ est fini.

(C) Montrer qu'en dehors de l'ensemble des $P(z)$ tels que $P'(z) = 0$, la fonction $\zeta \mapsto \mathrm{card}(P^{-1}(\zeta))$ est localement constante.

(D) Conclure en utilisant la connexité de $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_1, ..., \zeta_k\}$.

## 2 Théorème du voisinage tubulaire

Soit $M$ une sous-variété compacte $C^\infty$ de dimension $k$ de $\mathbb{R}^n$. On note $T_xM$ l'espace vectoriel tangent en $x$. On note $\nu_x M = (T_xM)^\perp$ l'orthogonal de $T_xM$ pour le produit scalaire usuel.

(A) Montrer que $p : \nu M = \bigsqcup_{x\in M} \nu_x M \longrightarrow M$ définit un fibré vectoriel sur $M$.

(B) On définit une application $f : \nu M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x, \xi) = x + \xi$ où $x \in M, \xi \in \nu_x M$. Montrer que $f$ est une application $C^\infty$.

On veut montrer que la restriction de $f$ à $D_\varepsilon M = \{(x, \xi) \in \nu M \mid |\xi| \leq \varepsilon\}$ est un plongement si $\varepsilon$ est choisi assez petit.

(C) Montrer que si $\varepsilon$ est choisi assez petit, $df(x,\xi)$ est injective.

(D) Montrer que si $x_n, y_n$ sont deux suites de points de $M$ ayant même limite $z$, et $v$ une valeur d'adhérence de $\frac{x_n - y_n}{|x_n - y_n|}$, alors $v \in T_z M$.

(E) Montrer qu'il n'existe pas de suites $(x_n, \xi_n), (y_n, \eta_n)$ telles que $\xi_n$ et $\eta_n$ tendent vers 0, et $f(x_n, \xi_n) = f(y_n, \eta_n)$. On distinguera le cas où après extraction d'une sous-suite $\lim_n x_n = \lim_n y_n$ et celui où ces limites sont distinctes.

(F) Conclure

# 3 Formes différentielles

Soit $n \geq 2$, $S^k$ la sphère de dimension $k$, et $f \in C^\infty(S^{2n-1}, S^n)$ une application $C^\infty$. On admettra que sur $S^{2n-1}$ et sur $S^{2n-1} \times [0,1]$, toute $n$-forme fermée est exacte, et que sur $S^{2n-1}$, toute $(n-1)$-forme fermée est exacte.

Soit $\alpha$ une $n$-forme d'intégrale 1 sur $S^n$. On pose $f^*(\alpha) = d\beta$, puis on définit $H(f) = \int_{S^{2n-1}} d\beta \wedge \beta$.

(A) Montrer qu'il existe bien un tel $\beta$, et que $H(f)$ ne dépend pas du choix de $\beta$.

(B) Montrer que $H(f)$ ne dépend pas du choix de $\alpha$.

(C) Montrer que si $n$ est impair, $H(f) = 0$ pour tout $f$.

(D) Montrer que si $f_0$ et $f_1$ sont différentiablement homotopes, $H(f_0) = H(f_1)$. On pourra noter $F(t,x) = f_t(x)$ et $F^*(\alpha) = d\tilde{\beta}$.

(E) On fait $n = 2$. Si $f$ est l'application de Hopf définie par $f(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ où $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et $[z_1, z_2] \in \mathbb{C}P^1 = S^2$, calculer $H(f)$.