**Partiel du cours d'intégration-probabilités**

Le 19 novembre 2015

*Durée: 2 heures. Aucun document n'est autorisé.*

**Question de cours.** Citer le lemme de Fatou et le théorème de convergence dominée. Prouver le théorème de convergence dominée à partir du lemme de Fatou.

---

**Exercice I.** Les questions suivantes sont indépendantes.

**1)** Étudier la limite éventuelle de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par

$$w_n = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{x \sin(\pi x^2/4)}{1+x^{n+3}}\, dx \ .$$

**2)** Justifier l'égalité suivante:

$$\int_{]0,1[} \frac{\log 1/t}{1-t}\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^2} \ .$$

**3)** Soient $a, b \in ]0,\infty[$ tels que $a < b$. L'intégrale

$$\int_{]0,\infty[} \frac{\arctan(bt) - \arctan(at)}{t}\, dt$$

a bien un sens: pourquoi ? Représenter cette intégrale comme une intégrale double et la calculer explicitement en fonction de $a$ et de $b$ (justifier soigneusement sa réponse).

---

**Exercice II.** Soient $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Soit une mesure positive de masse finie notée $\mu : \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$. Pour tout $z \in \overline{H}$, on pose $L_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zx}\, \mu(dx)$, qui est la transformée de Laplace de $\mu$.

**1)** Montrer que $L_\mu$ est bien définie et continue sur $\overline{H}$.

**2)** Soit $z_0 \in H$. Montrer l'existence d'une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (s'exprimant en fonction de $n$, $z_0$ et $\mu$) tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ satisfaisant $|z - z_0| < \mathrm{Re}(z_0)$, on ait d'une part $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n||z-z_0|^n < \infty$ et d'autre part $L_\mu(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n (z-z_0)^n$. Autrement dit, $L_\mu$ est développable en série entière sur $H$.

**3)** On rappelle le Principe des Zéros Isolés: *soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe non-vide; soit $f : U \to \mathbb{C}$, une fonction développable en série entière non nulle; alors l'ensemble $\{z \in U : f(z) = 0\}$ n'a pas de point d'accumulation dans $U$.* Soit $\nu : \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$, une mesure positive de masse finie. On suppose que $\{z \in H : L_\mu(z) = L_\nu(z)\}$ admet un point d'accumulation dans $H$. Montrer alors que $\mu = \nu$.

---

**Exercice III.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$, un espace mesuré. Soient $B_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $h = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{B_n}$, une fonction de $E$ dans $[0,\infty]$ qui est $\mathscr{E}$-mesurable.

**1a)** On pose $B^* = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{p\geq n} B_p$, qui est bien dans $\mathscr{E}$. Comparer les fonctions $\mathbf{1}_{B^*}$ et $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{1}_{B_n}$. Comparer les ensembles $B^*$ et $\{h = \infty\}$.

**1b)** On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) < \infty$. Montrer que cela implique $\mu(B^*)=0$.

**2)** On suppose ensuite que $(E,\mathscr{E},\mu)=(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+),\ell)$, où $\ell$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}_+} f\, d\ell < \infty$.

**2a)** Soient des réels $a,b,\varepsilon>0$ tels que $a<b$. Pour tout entier $n\geq 1$, on pose

$$B_n=\{x\in[a,b]: f(nx)\geq\varepsilon\} \quad \text{et} \quad B=\{x\in[a,b]: \limsup_{n\to\infty} f(nx)>\varepsilon\} .$$

Montrer que les $B_n$ et $B$ sont des Boréliens. Montrer que $B\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geq n} B_p$.

**2b)** Montrer que $\ell(B_n) \leq \frac{1}{n\varepsilon}\int_{[na,nb]} f(x)\,\ell(dx)$. Soit $n_0$, un entier supérieur à $2b/a$. Montrer que $\sum_{n\geq n_0}\ell(B_n)\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}_+} f(x)g(x)\,\ell(dx)$, où on a posé

$$\forall x\in\mathbb{R}_+, \quad g(x)=\sum_{\substack{x/b\leq n\leq x/a\\ n\geq n_0}} \frac{1}{n} ,$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est nulle. En utilisant une comparaison somme/intégrale, montrer que $g$ est bornée.

**2c)** Montrer que $\ell\big(\big\{x\in\mathbb{R}_+: \limsup_{n\to\infty} f(nx)>0\big\}\big)=0$.

---

**Exercice IV.** Soit $(E,\mathscr{E})$, un espace mesurable. On le suppose séparé: c'est-à-dire que pour tous $x,y\in E$ distincts, il existe $A\in\mathscr{E}$ tel que $x\in A$ et $y\notin A$. Soit $\mathscr{A}$, une classe de sous-ensembles de $E$ qui est stable par union simple, par passage au complémentaire et qui contient $E$. On suppose que $\sigma(\mathscr{A})=\mathscr{E}$ et que $\mathscr{A}$ est dénombrable. On se donne $\mathscr{A}=\{A_n; n\in\mathbb{N}\}$, une énumération de $\mathscr{A}$ (avec répétition éventuelle).

**1)** Pour tout $x\in E$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $B_n^x=A_n$, si $x\in A_n$ et $B_n^x=E\backslash A_n$, si $x\notin A_n$. Pour tout $x\in E$, on pose également $A_x=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n^x$.

**1a)** Soient $x,y\in E$. Montrer que ou bien $A_x=A_y$ ou bien $A_x\cap A_y=\emptyset$.

**1b)** On fixe ensuite $x\in E$ et $y\in A_x$. Ce qui précède implique que $A_x=A_y$. On pose $\mathscr{L}=\big\{B\in\mathscr{E}: \mathbf{1}_B(x)=\mathbf{1}_B(y)\big\}$. Montrer par un raisonnement de classe monotone (que l'on détaillera soigneusement) que $\mathscr{L}=\mathscr{E}$ et en déduire que $x=y$. Cela montre que $A_x=\{x\}$ pour tout $x\in E$.

**2)** Pour tout $x\in E$, on pose $\phi(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-n-1}\mathbf{1}_{A_n}(x)$. Montrer que $\phi: E\to\mathbb{R}$ est $(\mathscr{E},\mathscr{B}(\mathbb{R}))$-mesurable et qu'elle est injective.

**3)** On pose $Q=\phi(E)$, qui n'est pas nécessairement un Borélien de $\mathbb{R}$. On note $\psi: Q\to E$ la réciproque de $\phi$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $C_n^1=A_n$ et $C_n^0=E\backslash A_n$. On fixe $\varepsilon_0,\ldots,\varepsilon_n\in\{0,1\}$ et on pose $C=\bigcap_{0\leq k\leq n} C_k^{\varepsilon_k}$. Montrer soigneusement que $\psi^{-1}(C)=Q\cap[a,a+\frac{1}{2}3^{-n-1}]$, où on a posé $a=\sum_{0\leq k\leq n}\varepsilon_k 3^{-k-1}$.

**4)** On munit $Q$ de la topologie induite et on note $\mathscr{B}(Q)$ la tribu Borélienne associée, qui est aussi la tribu trace sur $Q$ des Boréliens de $\mathbb{R}$. Montrer que $\psi: Q\to E$ est $(\mathscr{B}(Q),\mathscr{E})$-mesurable. Montrer que $\mathscr{E}$ est la tribu Borélienne d'une certaine topologie.

---