Examen Partiel du 5 Décembre 2011

"Intégration & Probabilités"

`120 minutes ; sans documents ni calculatrice`

Notations : *Pour* $x \in \mathbb{R}^d$ *et* $r > 0$: $B(x, r)$ = *boule ouverte centrée à* x, *de rayon* r.

On admet : *Soient* $(x_i, i \in T) \subset \mathbb{R}^d$ *et* $(r_i, i \in T) \subset]0, \infty[$, *où* T *est un ensemble non vide. Soit* $G := \cup_{i \in T} B(x_i, r_i)$. *Pour tout* $a \in]0, \lambda(G)[$, *il existe un sous-ensemble fini* $T_0 \subset T$ *tel que* $B(x_i, r_i)$, $i \in T_0$, *soient (deux-à-deux) disjointes, et que* $\sum_{i \in T_0} \lambda(B(x_i, r_i)) > \frac{a}{3^d}$, *où* $d \geq 1$ *est la dimension de* $\mathbb{R}^d$.

Rappels : • *Pour* $1 \leq p < \infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ *est dense.*

• $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \Rightarrow f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

• (φ_n) *approximation de la mesure de Dirac* δ_0, f *fonction continue sur* $\mathbb{R}^d \Rightarrow \varphi_n * f \to f$ *uniformément sur tout compact.*

• $\exists\, (\psi_n) \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ *tel que* $0 \leq \psi_n \leq 1$, $\forall n$, *et que* $\psi_n \uparrow 1$ $(n \to \infty)$ *simplement.*

• (*transformée de Fourier*) $\widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\xi \cdot x}\, \mu(\mathrm{d}x)$ *pour* μ *mesure finie sur* $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$.

• (*transformée de Fourier*) $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\xi \cdot x} f(x)\, \mathrm{d}x$ *pour* $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

• (*formule d'inversion*) $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\xi \cdot x} \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

EXERCICE I (3 *points*)**.** Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On se donne des fonctions mesurables f, g, f_1, g_1, f_2, g_2, $\cdots$ telles que $f_n \to f$ p.p., $g_n \to g$ p.p., $\forall n$, $|f_n| \leq g_n$ p.p., et que $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \to \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$ (lorsque $n \to \infty$). Montrer que $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$.

EXERCICE II (10 *points*)**.** Soit $h \in \mathscr{L}^1_+(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ (intégrable et positive). Soit

$$\overline{h}(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} h(y)\, \mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R}^d.$$

(i) Montrer que pour tout réel $b > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{h(x)>b\}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \,\mathrm{d}x.$$

(ii) Montrer que $\overline{h}$ est une fonction mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$.

(iii) Montrer que pour tout réel $b > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\{\overline{h}(x)>b\}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{3^d}{b} \int_{\mathbb{R}^d} h(x) \,\mathrm{d}x.$$

(iv) On se donne $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, et $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ à support compact). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\limsup_{r\to 0} \left| f(x) - \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(y) \,\mathrm{d}y \right| \leq \overline{h}(x) + h(x),$$

où $h := |f - g| \in \mathscr{L}^1_+(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

(v) Montrer que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(y) \,\mathrm{d}y = f(x), \qquad \lambda(\mathrm{d}x)\text{-p.p.}$$

(vi) Montrer que

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \,\mathrm{d}y = 0, \qquad \lambda(\mathrm{d}x)\text{-p.p.}$$

Exercice III (7 *points*)**.** Soient $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$, des mesures finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. On suppose que $\widehat{\mu}_n(\xi) \to \widehat{\mu}(\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

Question A. Soit $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ (de classe C^∞ à support compact).

(A1) Montrer que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

(A2) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$, $n \to \infty$.

Question B. Soit $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ (continue à support compact).

(B1) Soit (φ_n) une approximation de δ_0 telle que $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\forall n$. Montrer que $\varphi_n * g \to g$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.

(B2) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} g \,\mathrm{d}\mu$, $n \to \infty$.

Question C. Soit $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} h \,\mathrm{d}\mu$, $n \to \infty$.

- fin -