Examen partiel du 5 décembre 2011 : corrigé

"Intégration & Probabilités"

Exercice I. Il suffit d'imiter la preuve du théorème de convergence dominée. Posons $h_n := g_n + g - |f_n - f|$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, $h_n \geq 0$ p.p. car $|f_n| \leq g_n$ p.p. et donc $|f| \leq g$ p.p. D'après le lemme de Fatou, $\int (\liminf_{n\to\infty} h_n)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int h_n \,\mathrm{d}\mu$.

Or, par hypothèse, $h_n \to 2g$ p.p., tandis que $\int g_n \,\mathrm{d}\mu \to \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$; d'où $\int 2g\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty}[\int 2g\,\mathrm{d}\mu - \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu]$, ce qui équivaut à $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leq 0$. Donc $\int |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \to 0$. A fortiori, $\int f_n\,\mathrm{d}\mu \to \int f\,\mathrm{d}\mu$ (en rappelant que f est intégrable). $\square$

Exercice II. (i) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov.

(ii) Par convergence dominée, $(r,\, x) \mapsto \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} h(y)\,\mathrm{d}y$ est continue sur $]0,\,\infty[\,\times\mathbb{R}^d$. Donc $\overline{h}(x) = \sup_{r>0,\, r\in\mathbb{Q}} \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} h(y)\,\mathrm{d}y$ est une fonction mesurable.

(iii) Fixons $b > 0$. Soit $A_b := \{x \in \mathbb{R}^d : \overline{h}(x) > b\}$. Par définition, pour tout $x \in A_b$, il existe $r_x > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda(B(x,r_x))}\int_{B(x,r_x)} h(y)\,\mathrm{d}y > b$. Soit $a \in]0,\, \lambda(A_b)[$. Alors $a < \lambda(\cup_{x\in A_b} B(x,\, r_x))$. D'après le résultat admis au début des énoncés, il existe $x_1,\, \cdots,\, x_k \in A_b$ tels que $B(x_i,\, r_{x_i})$, $1 \leq i \leq k$, soient disjointes et que $\sum_{i=1}^k \lambda(B(x_i,\, r_{x_i})) > \frac{a}{3^d}$, ce qui implique que

$$a < 3^d \sum_{i=1}^k \lambda(B(x_i,\, r_{x_i})) < \frac{3^d}{b}\sum_{i=1}^k \int_{B(x_i,\, r_{x_i})} h(y)\,\mathrm{d}y \leq \frac{3^d}{b}\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Comme $a \in]0,\, \lambda(A_b)[$ est quelconque, on obtient $\lambda(A_b) \leq \frac{3^d}{b}\int_{\mathbb{R}^d} h(y)\,\mathrm{d}y$.

(iv) Écrivons $\varphi_r(x) := \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} \varphi(y)\,\mathrm{d}y$ pour toute fonction mesurable φ telle que $\int_{B(x,r)} |\varphi(y)|\,\mathrm{d}y < \infty$. Alors $f_r - f = (f-g)_r - (f-g) + g_r - g$, et donc $|f_r - f| \leq h_r + h + |g_r - g| \leq \overline{h} + h + |g_r - g|$, où $h := |f-g|$.

On fait $r \to 0$. Comme $g_r \to g$ simplement (car g est continue), ceci nous emmène à : $\limsup_{r\to 0} |f_r(x) - f(x)| \leq \overline{h}(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

(v) Soit $b > 0$, et soit $D_b := \{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{r\to 0} |f_r(x) - f(x)| > b\}$. D'après la question précédente, $\lambda(D_b) \leq \lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : \overline{h}(x) > \frac{b}{2}\}) + \lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : h(x) > \frac{b}{2}\})$. En appliquant (i) et (iii), on obtient $\lambda(D_b) \leq \frac{2(3^d+1)}{b}\|f-g\|_1$, $\forall g \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Comme $C_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d,\, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\, \lambda)$, $\|f-g\|_1$ peut être aussi proche de 0 que possible. Autrement dit, $\lambda(D_b) = 0$, $\forall b > 0$. En d'autres termes, $f_r \to f$ λ-p.p.

(vi) On constate d'abord que (v) reste valable si f est mesurable et localement intégrable (c'est-à-dire, intégrable sur tout compact). En effet, comme $f_N := f\,\mathbf{1}_{]-N,\,N[^d} \in \mathscr{L}^1$, on a, d'après (v), pour tout $N \geq 1$, $\frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)\cap]-N,\,N[^d} f(y)\,\mathrm{d}y \to f(x)\,\mathbf{1}_{]-N,\,N[^d}(x)$ $\lambda(\mathrm{d}x)$-p.p. A fortiori, $\{x \in]-N,\, N[^d : \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)\cap]-N,\,N[^d} f(y)\,\mathrm{d}y \not\to f(x)\}$ a pour mesure de Lebesgue nulle, c'est-à-dire, $\{x \in]-N,\, N[^d : \frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y \not\to f(x)\}$ a pour mesure de Lebesgue nulle. Par conséquent, $\frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)\,\mathrm{d}y \to f(x)$, $\lambda(\mathrm{d}x)$-p.p.

Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d,\, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d),\, \lambda)$. Pour tout $q \in \mathbb{R}$, en considérant la fonction $|f-q|$ qui est bien localement intégrable, on a $\frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,\mathrm{d}y \to |f(x)-q|$, $\lambda(\mathrm{d}x)$-p.p. Donc, $\lambda(\mathrm{d}x)$-p.p., $\frac{1}{\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-q|\,\mathrm{d}y \to |f(x)-q|$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. En particulier, $\lambda(\mathrm{d}x)$-p.p.,

$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,\mathrm{d}y \le 2|f(x)-q|$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. Comme q peut être aussi proche de $f(x)$ que possible, ceci entraîne la conclusion cherchée. $\square$

Exercice III. (A1) Il est clair que $\widehat{f}$ est continue (convergence dominée) et bornée (par $\|f\|_1$), donc intégrable sur tout compact. Or, par intégration par parties (pour intégrales de Riemann), pour tout $k \ge 1$, on a $\sup_{\xi\in\mathbb{R}^d} |\xi|^k\,|\widehat{f}(\xi)| < \infty$. En prenant $k := d+1$, cela donne $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\lambda)$.

(A2) Puisque $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\lambda)$, on peut appliquer la formule d'inversion, pour voir que $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\xi\cdot x}\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. D'après le théorème de Fubini–Lebesgue, on a

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_n = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,\widehat{\mu}_n(-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Par hypothèse, $\widehat{\mu}_n(-\xi) \to \widehat{\mu}(-\xi)$, $\forall \xi$. Comme $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, et $\sup_{n\ge1}\|\widehat{\mu}_n\|_\infty \le \sup_{n\ge 1}\mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$ (car $\mu_n(\mathbb{R}^d) = \widehat{\mu}_n(0) \to \widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ par hypothèse), on peut appliquer le théorème de convergence dominée, pour voir que $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu_n \to \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(\xi)\,\widehat{\mu}(-\xi)\,\mathrm{d}\xi$, qui n'est autre que $\int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu$ (d'après l'équation $(*)$).

(B1) Pour tout n, $\varphi_n * g$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ (voir les rappels), et à support compact (car φ_n et g s'annulent au-dehors d'un compact commun) : $\varphi_n * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et s'annule au-dehors d'un compact (commun pour tout n).

Comme $\varphi_n * g \to g$ uniformément sur tout compact, la convergence a lieu dans $L^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda)$.

(B2) D'après (B1), pour tout $k \ge 1$, il existe $g_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|g-g_k\|_\infty \le \frac{1}{k}$. Pour tout $k\ge 1$,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu\Big| &\le \Big|\int_{\mathbb{R}^d}(g-g_k)\,\mathrm{d}\mu_n\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^d} g_k\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} g_k\,\mathrm{d}\mu\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^d}(g-g_k)\,\mathrm{d}\mu\Big| \\
&\le \frac{\mu_n(\mathbb{R}^d)}{k} + \Big|\int_{\mathbb{R}^d} g_k\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} g_k\,\mathrm{d}\mu\Big| + \frac{\mu(\mathbb{R}^d)}{k}.
\end{aligned}$$

Donc $\limsup_{n\to\infty} |\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu| \le \frac{2\mu(\mathbb{R}^d)}{k}$ (en rappelant que $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}^d)$). L'entier $k\ge 1$ pouvant être arbitrairement grand et $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, on a bien $\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu$.

(C) Soit $(\psi_k) \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ tel que $0 \le \psi_k \le 1$, $\forall k \ge 1$, et que $\psi_k \uparrow 1$ $(k \to \infty)$. Pour tout $k \ge 1$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^d} h\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h\,\mathrm{d}\mu\Big| \\
\le\ & \Big|\int_{\mathbb{R}^d}(h-h\,\psi_k)\,\mathrm{d}\mu_n\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^d}(h-h\,\psi_k)\,\mathrm{d}\mu\Big| \\
\le\ & \|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^d}(1-\psi_k)\,\mathrm{d}\mu_n + \Big|\int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu\Big| + \|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^d}(1-\psi_k)\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

On fait $n \to \infty$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d}(1-\psi_k)\,\mathrm{d}\mu_n = \mu_n(\mathbb{R}^d) - \int_{\mathbb{R}^d}\psi_k\,\mathrm{d}\mu_n \to \mu(\mathbb{R}^d) - \int_{\mathbb{R}^d}\psi_k\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^d}(1-\psi_k)\,\mathrm{d}\mu$ (car $\mu_n(\mathbb{R}^d)\to\mu(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, tandis que $\int_{\mathbb{R}^d}\psi_k\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d}\psi_k\,\mathrm{d}\mu$ d'après (B2), vu que $\psi_k \in C_c(\mathbb{R}^d)$), alors que $\int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} h\,\psi_k\,\mathrm{d}\mu$ (de nouveau d'après (B2), vu que $h\,\psi_k$ est également un élément de $C_c(\mathbb{R}^d)$). On obtient alors, pour tout $k\ge1$,

$$\limsup_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} h\,\mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}^d} h\,\mathrm{d}\mu\Big| \le 2\|h\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d}(1-\psi_k)\,\mathrm{d}\mu.$$

Il suffit maintenant de faire k tendre vers l'infini et appliquer le théorème de convergence dominée (ou le théorème de convergence monotone) pour conclure. $\square$