Partiel (corrigé) de logique 2013-2012

durée : 2 heures

Zoé Chatzidakis et Silvain Rideau

12 novembre 2013

Vous n'avez pas le droit d'utiliser de documents.
Vous avez le droit d'utiliser les résultats des questions précédentes même si vous ne les avez pas montrées.
Dans tous les exercices nous supposerons l'axiome du choix.

Exercice 1 :
Soit F une fonction strictement croissante définie sur la classe On des ordinaux (munie de l'ordre naturel) et à valeurs dans On. On dit que F est continue en un ordinal limite α si $F(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} F(\beta)$. Nous avons montré en cours qu'une telle fonction satisfait $F(\alpha) \geqslant \alpha$ pour tout ordinal α.

(a) Montrez que si F est continue en tout ordinal de cofinalité $\aleph_0$, alors pour tout ordinal α, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $F(\beta) = \beta$. (N'oubliez pas de traiter le cas "trivial".)

(b) Montrez que si F et G sont des fonctions strictement croissantes définies sur la classe des ordinaux, et qui sont continues en tout ordinal de cofinalité $\aleph_0$, alors pour tout α, il existe $\beta \geqslant \alpha$ tel que $F(\beta) = G(\beta) = \beta$.

Démonstration.

(a) On définit par récurrence $\alpha_0 = \alpha$ et $\alpha_{n+1} = F(\alpha)$. On remarque que les α_n forment une suite croissante. On pose $\beta = \bigcup_{n<\omega} \alpha_n$. Il y a alors deux cas. Soit pour tout n, $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ et dans ce cas β est un ordinal limite et $\mathrm{cof}(\beta) = \aleph_0$. Comme pour tout $\gamma < \beta$, il existe $n < \omega$ tel que $\gamma \leqslant \alpha_n$, on a aussi $F(\gamma) \leqslant F(\alpha_n) = \alpha_{n+1}$ et donc $F(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma) = \bigcup_{n<\omega} \alpha_{n+1} = \beta$.

Sinon il existe $n < \omega$ tel que $F(\alpha_n) = \alpha_{n+1} = \alpha_n \geqslant \alpha_0 = \alpha$ et donc on a le point fixe recherché

(b) On définit par récurrence $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_{2n+1} = F(\alpha_{2n})$ et $\alpha_{2n+2} = G(\alpha_{2n+1})$. On obtient alors encore une suite croissante et on pose $\beta = \bigcup_n \alpha_n$. Si pour tout n, $\alpha_{2n+2} > \alpha_{2n}$ alors β est limite de cofinalité $\aleph_0$. Comme précédemment, pour tout $\gamma < \beta$ il existe n tel que $\gamma \leqslant \alpha_{2n} \leqslant \alpha_{2n+1}$ et donc $F(\gamma) \leqslant F(\alpha_{2n}) = \alpha_{2n+1}$ et $G(\gamma) \leqslant G(\alpha_{2n+1}) = \alpha_{2n+2}$ et donc $F(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} F(\gamma) = \bigcup_n \alpha_{2n+1} = \beta$ et $G(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} G(\gamma) = \bigcup_n \alpha_{2n+2} = \beta$.

Par contre, s'il existe n tel que $\alpha_{2n} = \alpha_{2n+2}$, on $\alpha_{2n} \geqslant F(\alpha_{2n}) \geqslant G(F(\alpha_{2n})) = \alpha_{2n+2} = \alpha_{2n}$ et donc $\alpha_{2n} = F(\alpha_{2n}) = G(F(\alpha_{2n})) = G(\alpha_{2n})$ et on a notre point fixe. ∎

Exercice 2 :
Soit μ un cardinal infini. On définit par induction sur $n \in \omega$ une suite (λ_n) de cardinaux, par

$$\lambda_0 = \mu, \quad \lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}.$$

On pose $\lambda = \sum_{n\in\omega} \lambda_n$.

(a) Montrez que $\mu^\lambda = \lambda^\lambda = 2^\lambda$.

(b) Montrez que $2^\lambda \leqslant \lambda^{\aleph_0}$.

(c) Montrez que pour tout cardinal κ,

– si $\aleph_0 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$, alors $\lambda^{\aleph_0} = \lambda^\kappa = \lambda^\lambda$.

– si $\kappa \geqslant \lambda$, alors $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.

(d) Montrez qu'il existe des cardinaux $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ tels que $\alpha^\gamma = \beta^\delta$.

Démonstration.

(a) On a $\mu^\lambda \leqslant \lambda^\lambda \leqslant (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda^2} = 2^\lambda \leqslant \mu^\lambda$ et donc tous ces termes sont égaux.

(b) On a $2^\lambda = 2^{\sum_n \lambda_n}$. Soit $(\mu_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ une suite de cardinaux et λ un cardinal, on va montrer que $\lambda^{\sum_\alpha \mu_\alpha} = \prod_\alpha 2^{\mu_\alpha}$. En effet, à toute fonction $f : \bigsqcup_\alpha \mu_{\alpha<\kappa} \to \lambda$ on peut associer (de façon bijective) $(f|_{\mu_\alpha})_{\alpha<\kappa}$. D'où $2^\lambda = \prod_{n<\omega} 2^{\lambda_n} = \prod_{n<\omega} \lambda_{n+1} \leqslant \lambda^{\aleph_0}$.

(c)
- Par les questions précédentes, on a $\lambda^\lambda = 2^\lambda \leqslant \lambda^{\aleph_0} \leqslant \lambda^\kappa \leqslant \lambda^\lambda$ et donc tous ces termes sont égaux.
- C'est le même calcul qu'à la question (a) : $\lambda^\kappa \leqslant \kappa^\kappa \leqslant 2^\kappa \leqslant \lambda^\kappa$.

(d) Posons $\alpha = \lambda < 2^\lambda = \beta$ et $\gamma = \aleph_0 \leqslant \mu < 2^\mu < \lambda = \delta$. On a alors $\alpha^\gamma = \lambda^{\aleph_0} = 2^\lambda = 2^{\lambda\lambda} = (2^\lambda)^\lambda = \beta^\delta$. ∎

Exercice 3 (Bonus) **:**
Si κ est un cardinal limite (i.e., qui n'est pas de la forme μ^+ pour un cardinal $\mu < \kappa$), et $\lambda \geqslant \mathrm{cof}(\kappa)$, alors

$$\kappa^\lambda = (\bigcup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cof}(\kappa)}.$$

Démonstration. On a $(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cof}(\kappa)} \leqslant (\kappa^\lambda)^{\mathrm{cof}(\kappa)} = \kappa^{\lambda\,\mathrm{cof}(\kappa)} = \kappa^\lambda$. Il suffit donc de montrer $\kappa^\lambda \leqslant (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\mathrm{cof}(\kappa)}$. Soit $\delta = \mathrm{cof}(\kappa)$, et soit $g : \delta \to \kappa$ une fonction cofinale, comme κ est limite, chaque $g(\alpha)$ est inclus dans un cardinal $\mu < \kappa$ et donc quitte à remplacer chaque $g(\alpha)$ par ce cardinal, on peut supposer que tous les $g(\alpha)$ sont des cardinaux (en particulier ce sont des ordinaux limite). On a donc $\kappa = \sup_{\alpha<\delta} g(\alpha)$ et à toute fonction $\lambda \to \kappa$ on peut associer un élément du produit $\prod_{\alpha<\delta} g(\alpha)^\lambda$ en posant pour tout $\beta \in \lambda$ $f_\alpha(\beta) = f(\beta) + 1$ si $f(\beta) \in g(\alpha)$ et $f_\alpha(\beta) = 0$ sinon. On a donc bien une injection de κ^λ dans $\prod_{\alpha<\delta} g(\alpha)^\lambda \leqslant (\sup_{\alpha<\delta} g(\alpha)^\lambda)^\delta = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^\delta$. ∎

Exercice 4 :
Soient $\mathcal{L}$ un langage, et φ une formule. Donnez une preuve de

$$\forall v_1 \forall v_2 \varphi \vdash \forall v_2 \forall v_1 \varphi.$$

Démonstration. Tout d'abord rappelons que pour tout théroei T, $T \vdash \forall x\varphi \to \varphi(t/x)$, ce qui est la contraposée de l'axiome du quantificateur $\exists$, en particulier, $T \vdash \forall x\varphi \to \varphi$. On a aussi montré dans le cours que si $T \vdash \varphi$ alors $T \vdash \forall x\varphi$. Il suffit donc de montrer que $\forall v_1 \forall v_2 \varphi \vdash \varphi$ dont voici une preuve :

$\forall v_1 \forall v_2 \varphi$	(dans la théorie)
$\forall v_1 \forall v_2 \varphi \to \forall v_2 \varphi$	
$\forall v_2 \varphi$	(Modus Ponens)
$\forall v_2 \varphi \to \varphi$	
φ	(Modus Ponens)

∎

Exercice 5 :
Soient $\mathcal{L}$ un langage, et A une $\mathcal{L}$-structure.

(a) Soit $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non-principal sur un ensemble infini I. Nous avons un plongement naturel de A dans $A^{\mathcal{F}}$, induit par l'application diagonale $A \to A^I$, qui à a associe l'élément de A^I qui est la fonction constante égale à a. Montrez que ce plongement est un plongement élémentaire.

(b) (a) nous permet de considérer A comme une sous-structure élémentaire de $A^{\mathcal{F}}$ quel que soit l'ultrafiltre $\mathcal{F}$. Soit $\Sigma = \Sigma(v)$ un ensemble de $\mathcal{L}(A)$-formules ayant pour seule variable libre v, et supposons qu'il soit finiment satisfaisable dans A, c'est à dire, si $C \subset \Sigma$ est fini, alors $A \vDash \exists v \bigwedge_{\varphi \in C} \varphi(v)$. Montrez qu'il existe un ensemble I, un ultrafiltre $\mathcal{F}$ sur I, et un élément $b \in A^{\mathcal{F}}$ tel que $A^{\mathcal{F}} \vDash \varphi(b)$ pour tout $\varphi \in \Sigma$.

Démonstration.

(a) Soit $\varphi(\overline{x})$ une $\mathcal{L}$-formule et $\overline{a} \in A$ (tel que $|\overline{x}| = |\overline{a}|$). Soit $\overline{a}^{\mathcal{F}}$ l'image de a dans $A^{\mathcal{F}}$, par le théorème de Łos on a $A^{\mathcal{F}} \vDash \varphi(\overline{a}^{\mathcal{F}})$ si et seulement si $\{i \in I : A \vDash \varphi(\overline{a})\} \in \mathcal{F}$. Mais cet ensemble est soit $I \in \mathcal{F}$ si $A \vDash \varphi(\overline{a})$ ou $\varnothing \notin \mathcal{F}$ si $A \nvDash \varphi(\overline{a})$, ce qui permet de conclure.

(b) Soit I l'ensemble des parties finies des Σ. Pour tout $i \in I$, $A \vDash \exists v \bigcup_{\varphi \in i} \varphi(v)$ et donc soit $b_i \in A$ tel que $A \vDash \bigcup_{\varphi \in i} \varphi(b_i)$. On a alors pour tout $i \in I$ et pour tout $\varphi \in \Sigma$, si $\varphi \in i$ alors $A \vDash \varphi(b_i)$ et donc $\{i \in I : A \vDash \varphi(b_i)\} \supseteq \{i \in I : \varphi \in i\} = X_\varphi$.

Pour tout $i \in I$ (i.e. i est une partie finie de Σ), on pose $X_i = \bigcup_{\varphi \in i} X_\varphi$. L'ensemble des X_i est clos par intersection finie (car l'ensemble des parties finies de φ est clos par union finie) et il ne contient pas $\varnothing$ car pour tout $i \in I$, $i \in X_i$. On peut donc choisir $\mathcal{F}$ un ultrafiltre qui contienne tous les X_i et donc tous les X_φ et on conclut par le théorème de Łos. ■

Faites l'un des deux exercices suivants.

Exercice 6 :
Soient $\mathcal{F}$ un ultrafiltre non-principal sur $I = \mathbb{N}$, $\mathcal{L}$ un langage **dénombrable** et $(M_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures. Nous considérons

$$M^* = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}.$$

Nous allons montrer que si $B \subset M^*$ est dénombrable, et si $\Sigma = \Sigma(v)$ est un ensemble de $\mathcal{L}(B)$-formules (ayant pour seule variable libre v) qui est finiment réalisable (dans M^* – voir la définition dans l'exercice précédent), alors il existe $b \in M^*$ tel que $M^* \vDash \varphi(b)$ pour tout $\varphi \in \Sigma$. Pour cela, nous fixons d'abord une énumération des éléments de Σ en mentionnant explicitement les nouvelles constantes, de la façon suivante : nous prenons une suite $(\varphi_n(v, \bar{y}_n), \bar{a}^n)$ ($n \in \mathbb{N}$) où chaque φ_n est une $\mathcal{L}$-formule avec seules variables libres $v, \bar{y}_n$, $\bar{a}^n$ est un uplet de B de même longueur que $\bar{y}_n$, et les formules $\varphi_n(v, \bar{a}^n)$ énumèrent les formules de Σ. Nous fixons des représentants $(\bar{a}_i^n)_i$ (dans $\prod_{i \in I} M_i$) pour chaque uplet $\bar{a}^n$.

(a) Expliquez brièvement pourquoi on peut trouver une telle énumération – i.e., pourquoi $\mathrm{Card}(\Sigma) \leqslant \aleph_0$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S(n) = \{i \in \mathbb{N} : M_i \vDash \exists v \bigwedge_{j=0}^{n} \varphi_j(v, \bar{a}_i^j)\}$. Montrez que les $S(n)$ sont dans $\mathcal{F}$ et forment une suite décroissante.

(c) Soit $(b_i)_{i \in I}$ la suite définie de la façon suivante :
   - si $i \notin S(0)$, on prend n'importe quoi pour b_i ;
   - si $i \in S(0)$, soit m maximal tel que $m \leqslant i$ et $i \in S(m)$; prenons $b_i \in M_i$ satisfaisant toutes les formules $\varphi_j(v, \bar{a}_i^j)$ pour $j \leqslant m$.

   Montrez que $(b_i)_{\mathcal{F}}$ satisfait (dans M^*) toutes les formules de Σ.

Démonstration.

(a) On définit $\mathcal{T}_n$ par récurrence $\mathcal{T}_0$ est l'ensemble des variables et $\mathcal{T}_{i+1} = \{f(\bar{t}) : f \in \mathcal{L} \text{ et } \bar{t} \in \mathcal{T}\}$. l'ensemble des $\mathcal{L}$-termes est alors $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{T}_n$. On montre alors par récurrence que chaque $\mathcal{T}_n$ est dénombrable. L'ensemble des variables est dénombrable par définition donc $\mathcal{T}_0$ est bien dénombrable. Ensuite comme $\mathcal{L}$ est dénombrable il y a un nombre dénombrable de $f \in \mathcal{L}$ et si $\mathcal{T}$ est dénombrable alors les suites finies d'éléments de $\mathcal{T}$ aussi.

On recommence pour les formules en posant $\mathcal{F}_0 = \{R(\bar{t}) : R \in \mathcal{L} \text{ et } \bar{t} \in \mathcal{T}\}$ et $\mathcal{F}_{i+1}$ l'ensemble des formules obtenues par une opération booléenne ou une quantification à partir de formules de $\mathcal{F}_i$.

(b) Comme $M^\star \vDash \exists v \bigwedge_{j\leqslant n} \varphi_j(v, \bar{a}^j)$, par le théorème de Łos, on a bien $S_n \in \mathcal{F}$. De plus, si $n \leqslant m$,

$$\vDash \forall \bar{x}^0 \ldots \forall \bar{x}^m \exists v \bigwedge_{j\leqslant m} \varphi_j(v, \bar{x}^j) \to \exists v \bigwedge_{j\leqslant n} \varphi_j(v, \bar{x}^j)$$

et donc $S(m) \subseteq S(n)$.

(c) Soit $j \leqslant i$ tel que $i \in S_j$ le m maximal tel que $m \leqslant i$ et $i \in S(m)$ est plus grand que j et donc $M_i \vDash \varphi_j(b_i, \bar{a}_i^j)$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} : \varphi_j(b_i, \bar{a}_i^j\} \supseteq S_j \cap \{i \in \mathbb{N} : i \geqslant j\}$. On a montré à la question précédente que $S(j) \in \mathcal{F}$ et comme $\mathcal{F}$ est non principal il contient le filtre des cofinis en particulier il contient $\{i \in \mathbb{N} : i \geqslant j\}$ et donc $\{i \in \mathbb{N} : \varphi_j(b_i, \bar{a}_i^j\} \in \mathcal{F}$. On peut alors conclure par le théorème de Łos. ∎

Exercice 7 :
Soit $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ le langage des groupes. Nous allons étudier les groupes commutatifs divisibles. Pour $n \in \mathbb{Z}$, nous utiliserons l'abbréviation "nx" pour dénoter le terme $x + x + \cdots + x$ (n fois) si $n > 0$, le terme 0 si $n = 0$, et le terme $+(-x) + \cdots + (-x)$ (n fois) si $n < 0$.

Un groupe (commutatif) G est *divisible* si pour tout entier $n > 0$, tout élément de G est divisible par n.

Un élément $x \in G$ est dit *de torsion* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $nx = 0$, et nous dirons alors que x est de n-torsion. Un groupe est *de torsion* si tous ses éléments sont de torsion. Un groupe est *sans torsion* si aucun de ses éléments (autre que 0) n'est de torsion.
Nous admettrons les résultats suivants :

1. Soit $G_i, i \in I$, une famille de groupes commutatifs. On définit la somme directe des G_i, notée $\bigoplus_{i\in I} G_i$, comme étant le sous-groupe de $\prod_{i\in I} G_i$ consistant des suites $(a_i)_{i\in I}$ dont le support, $\{i : a_i \neq 0\}$, est fini. Si tous les G_i sont égaux à un groupe G, on notera alors la somme directe par $G^{(I)}$.
2. Soit G un groupe commutatif engendré par un nombre fini d'éléments. Alors G se décompose en somme directe de groupes cycliques ($\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$).
3. $(\mathbb{Q}, +)$ est bien sûr divisible. Voici un exemple de groupe divisible de torsion, noté $C(p^\infty)$, et appellé *groupe de Prüfer* : on prend le groupe additif de $\mathbb{Z}[1/p]$, et on le quotiente par son sous-groupe $\mathbb{Z}$. Tout élément de $C(p^\infty)$ peut donc être représenté ("modulo 1") par un rationnel de la forme m/p^n, avec $0 \leqslant m < p^n$.
4. Tout groupe commutatif divisible G s'écrit alors comme une somme directe

$$(*) \qquad G = \mathbb{Q}^{(\kappa_0)} \oplus \bigoplus_{p\in P} C(p^\infty)^{(\kappa_p)},$$

où P dénote l'ensemble des nombres premiers, et les κ_0 et κ_p sont des cardinaux (finis ou infinis).

(a) Donner une axiomatisation de la théorie T_{div} des groupes commutatifs divisibles.

(b) Donnez un énoncé φ, tel que si $G \vDash T_{\text{div}} \cup \varphi$, alors dans la décomposition $(*)$ on aura $\kappa_3 = 0$.

(c) Même question avec $\kappa_3 = 1$.

(d) Montrez que $C(3^\infty)$ a une extension élémentaire ayant une décomposition dans laquelle $\kappa_0 \neq 0$.

(e) Montrez qu'il n'existe pas de théorie dont tous les modèles sont de la forme $C(3^\infty)^{(\kappa)}$ (avec $\kappa > 0$).

(f) Montrez que si $G \equiv C(3^\infty)$, alors dans la décomposition de G donnée par $(*)$, on a $\kappa_3 = 1$, $\kappa_p = 0$ pour $p \neq 3$, et κ_0 quelconque.

(g) Montrez que $\mathrm{Th}((C(3^\infty)))$ élimine les quantificateurs.

Démonstration.

(a) La théorie T_{div} des groupes abéliens divisibles contient les axiomes suivants :
- $\forall xyz,\ (x+y)+z = x+(y+z) \wedge x+0 = x \wedge x+(-x) = 0 \wedge x+y = y+x$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\forall z \exists y,\ n \cdot y = x$.

(b) Si $\kappa_3 \neq 0$ alors $G = H \oplus C(3^\infty)$, en particulier il existe $x = (0, 1/3)$ tel que $x \neq 0 \wedge 3 \cdot x = 0$. Par contre si $\kappa_3 = 0$ alors comme ni $\mathbb{Q}$ ni $C(p^\infty)$ ne contiennent d'élément de 3-torsion (autre que 0), si $p \neq 3$ alors leur somme non plus et donc si $\mathcal{M} \models T_{div}$, on a $\mathcal{M} \models \exists x,\ x \neq 0 \wedge 3 \cdot x = 0$ si et seulement si $\kappa_3 = 0$.

(c) On a $\kappa_3 = 1$ si et seulement s'il y a un élément x de 3-torsion non nul et que tout élément de 3 torsion est dans le groupe divisible engendré par x (en fait le groupe engendré par x suffit car les diviseurs de x ne sont pas de 3-torsion mais de 3^k-torsion) et donc la formule recherchée est $\exists x,\ 3 \cdot x = 0 \wedge \forall y,\ (3 \cdot y = 0 \to (y = 0 \vee y = x \vee y = 2 \cdot x))$.

(d) On considère la théorie T suivante $\mathcal{D}(C(3^\infty)) \cup \{n \cdot c \neq 0 : n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ où c est une nouvelle constante. Une sous-théorie finie T est incluse dans $\mathcal{D}(C(3^\infty)) \cup \{n \cdot c \neq 0 : 0 < n \leqslant k\}$ dont un modèle est $C(3^\infty)$ où c est interprété par $1/3^{!k}$. Par compacité la théorie T est donc consistante et soit $G \models T$. On a $C(3^\infty) \preccurlyeq G$ et G contient un élément qui n'est pas de torsion et donc dans G, $\kappa_0 \neq 0$.

(e) Soit T une théorie dont tous les $C(3^\infty)^{(\kappa)}$ sont modèles. Par la question précédente, il existe $G \succcurlyeq C(3^\infty)$ tel que G n'est pas de la forme $C(3^\infty)^\kappa$. Comme $C(3^\infty) \models T$ on a aussi $G \models T$ et donc T ne peut pas avoir pour seuls modèles les $C(3^\infty)^{(\kappa)}$.

(f) Tout d'abord, par les questions (b) et (c), on $\kappa_3 = 1$ et $\kappa_p = 0$ si $p \neq 3$. Montrons maintenant que κ_0 peut être quelconque. Par Lowenheim-Skolem, pour tout cardinal κ infini, il existe $G \equiv C$ de cardinal κ. Comme $|C(3^\infty)| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ on a $|G| = \aleph_0 \kappa_0$ et donc si $\kappa > \aleph_0$ on a $\kappa_0 = \kappa$. Il reste alors a montrer que κ peut aussi être tout cardinal $\leqslant \aleph_0$. Soit donc κ un tel cardinal, Löwenheim-Skolem ascendant, on peut trouver $H \succcurlyeq C(3^\infty) \oplus \mathbb{Q}^{(\kappa)}$ qui soit de cardinal $\aleph_1$. Comme précédemment, H est de a forme $C(3^\infty) \oplus \mathbb{Q}^{(\aleph_0)} \equiv C(3^\infty)$ et donc $C(3^\infty) \equiv C(3^\infty) \oplus \mathbb{Q}^{(\kappa)}$.

(g) Soit un isomorphisme f entre deux sous-structures finiment engendrées A et B de M et de N des modèles de $\mathrm{Th}(C(3^\infty))$. Soit Soit $\varphi(x\overline{y})$ une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs et $c \in M$ tels que $M \models (c\overline{a})$ où $\overline{a} \in A$. On veut trouver $d \in N$ qui satisfait $\varphi(x, f(\overline{a}))$.

S'il existe $n > 0$ tel que $n \cdot c \in A$, on choisit un tel n minimal et on va montrer qu'on peut étendre f à un isomorphisme de domaine $\langle A, c\rangle$. On le montre par induction sur n, et donc on peut supposer que n est premier. Si $n \neq 3$, alors $n \cdot c \neq 0$, et la formule $n \cdot x = n \cdot c$ définit c de façon unique, puisque M n'a pas de n-torsion. De même, la formule $n \cdot x = f(n \cdot c)$ définit un unique élément d de N, et on étend f en posant $f(c) = d$ (on peut vérifier que cela reste bien un morphisme de groupe).

Si $n = 3$, il y a trois sous-cas a considérer. Si $3 \cdot c = 0$, alors A ne contient pas de 3-torsion, donc B non plus, et si $d \in N$ est tel que $3 \cdot d = 0 \wedge d \neq 0$, on a alors $\langle A, c\rangle = A \oplus \langle c\rangle$ et $\langle B, d\rangle = B \oplus \langle d\rangle$ et donc il est facile d'étendre f.

Si $3 \cdot c \neq 0$ et A contient un élément c' tel que $3 \cdot c' = 3\dot{c}$. Alors on a $3c\dot{(}c - c') = 0$, et on utilise le cas précédent. Si $3 \cdot c \neq 0$ et A ne contient pas de solution de $3 \cdot x = 3 \cdot c$. Donc, B ne contient pas non plus de solution de $3 \cdot x = f(3 \cdot c)$. On choisit alors d une solution dans N de $3 \cdot x = f(3 \cdot c)$; alors $d \notin B$, et tout élément de $\langle B, d\rangle$ s'écrit uniquement comme $b + jd$, avec $b \in B$ et $0 \leqslant j < 3$.

On vérifie alors immédiatement que l'application f' définie par $f'(a+jc) = f(a)+jd$ pour tout $a \in A$ et $0 \leqslant j < 3$ est un isomorphisme $\langle A, c\rangle \to \langle B, d\rangle$.

Il reste donc le cas où $n \cdot c = 0$ implique $n = 0$. Dans ce cas là on a encore $\langle A, c\rangle = A \oplus \langle c\rangle$. Par une compacité immédiate, il existe $N^\star \succcurlyeq N$ et $d \in N^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $n \cdot d \neq 0$. On peut alors étendre f en un isomorphisme $\langle A, c\rangle \to \langle B, d\rangle$. Comme φ est sans quantificateurs et que $M \vDash \varphi(c, \overline{a})$, on a $N^\star \vDash \varphi(d, f(\overline{a}))$. En particulier, $N^\star \vDash \exists y \varphi(y, f(\bar{a}))$ et comme $N \preccurlyeq N^\star$, on a $N \vDash \exists y \varphi(y, f(\bar{a}))$. ∎