

Partitions planes

Matthieu Piquerez et Louise Gassot
Sous la direction de Jérémie Bouttier

Juin 2015

Introduction

Le modèle des partitions planes est un modèle classique de combinatoire. Elle est en effet la généralisation naturelle des partitions d'entiers, et présente une jolie bijection avec les modèles de dimères sur les réseaux hexagonaux.

Nous présentons dans cet article deux résultats importants sur les partitions planes, à savoir l'expression de leur fonction génératrice et le théorème de convergence asymptotique de leur forme.

Dans un premier temps, nous ferons un comptage bijectif des partitions planes par les diagrammes de croissance (cf. [4] et [1]) pour calculer la fonction génératrice. Cette approche, purement combinatoire, ouvre une piste pour créer un algorithme engendrant des partitions planes de manière aléatoire selon la probabilité uniforme.

Le reste de l'exposée sera consacré à la méthode d'Okounkov et Reshetikhin présentée dans l'article [3]. Ces derniers ont utilisé l'espace fermionique, introduit par les physiciens, et développé à des fins combinatoires par l'école de Tokyo. Ils l'exploitent pour étudier le comportement des partitions planes avec des probabilités plus générales que la loi uniforme : les probabilités des processus de Schur. Nous détaillerons ici une partie de leurs travaux. Nous utiliserons principalement l'exemple du processus de Schur qui correspond à la loi uniforme pour retrouver la série génératrice calculée en première partie et trouver une fonction de corrélation permettant d'obtenir des résultats asymptotiques spectaculaires sur le volume et la forme des partitions planes lorsque leur taille tend vers l'infini.

Table des matières

1	Série génératrice des partitions planes	3
1.1	Partitions, partitions planes	3
1.2	Comptage bijectif des partitions planes par les diagrammes de croissance	4
2	Probabilités des processus de Schur	8
2.1	Espace fermionique	8
2.2	Opérateurs fermioniques	9
2.3	Opérateurs bosoniques	10
2.4	Fonctions de Schur gauches	13
2.5	Probabilités des processus de Schur	14
3	Fonctions de corrélation	19
3.1	Formule de Wick	20
3.2	Cas de la mesure uniforme et représentations des partitions planes	23
4	Comportement asymptotique	24
4.1	Convergence en volume	24
4.2	Dilogarithme et dilogarithme quantique	27
4.3	Forme asymptotique des partitions planes	27

1 Série génératrice des partitions planes

1.1 Partitions, partitions planes

Définition 1. Une partition λ est une suite décroissante d'entiers naturels, tous nuls à partir d'un certain rang :

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{n+1} = \dots = 0)$$

On définit la taille de la partition λ par : $|\lambda| = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n$, cette somme étant finie. Par exemple, $\lambda = (6, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ est une partition de 7. On représente cette partition sous forme d'histogramme comme suit :

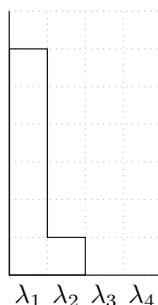


FIGURE 1 – Représentation de la partition $\lambda = (6, 1)$

La fonction génératrice des partitions

$$Z_{2D}(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$$

où a_n désigne le nombre de partitions de taille n vérifie alors la proposition suivante :

Proposition 1.

$$Z_{2D}(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - q^n}$$

Démonstration. En développant (dans l'anneau des séries formelles), la formule ci-dessus se réécrit

$$Z_{2D}(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} q^{nk}.$$

On développe le produit infini et on regroupe tous les termes qui correspondent à une même puissance de q (les k_p sont donc tous nuls à partir d'un certain rang), ce qui donne

$$Z_{2D}(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{1 \times k_1 + \dots + p \times k_p = n} q^{1 \times k_1 + \dots + p \times k_p} \right).$$

Cette expression correspond bien à la fonction génératrice des partitions. □

Définition 2. Une partition plane $\Pi = (\Pi_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ est une matrice bidimensionnelle infinie d'entiers positifs, décroissante le long de chaque ligne et le long de chaque colonne, et telle que la taille de Π , à savoir $|\Pi| = \sum_{i,j} \Pi_{i,j}$, soit finie.

Par exemple, la partition ci-dessous est plane : $\Pi = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$

On représente chaque partition plane Π par la suite $\{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, où $\lambda(t) = (\Pi_{i,t+i})_{i \geq \max(1,1-t)}$ est la $t^{\text{ème}}$ diagonale.

Dans l'exemple de partition plane Π ci-dessus, on aurait alors $\lambda(-2) = (1)$, $\lambda(-1) = (2)$, $\lambda(0) = (3, 1)$, $\lambda(1) = (1)$, $\lambda(2) = (1)$, les autres $\lambda(t)$ étant vides.

On peut dessiner une partition plane Π en trois dimensions, où le nombre de cubes à la coordonnée (x, y) est $\Pi_{x,y}$, comme dans l'exemple ci-dessous :

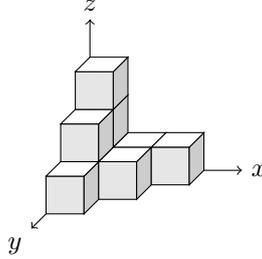


FIGURE 2 – Représentation de la partition plane Π

Définition 3. Si λ et μ sont deux partitions, on dit que λ et μ sont entrelacées, et on note $\lambda \succ \mu$, si

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \mu_n \geq \lambda_{n+1} \geq \dots$$

Remarque 1. Une partition Π est plane si et seulement si le processus de Schur correspondant $\{\lambda(t)\}$ vérifie

$$\dots \prec \lambda(-n) \prec \dots \prec \lambda(-1) \prec \lambda(0) \succ \lambda(1) \succ \dots \lambda(n) \succ \dots$$

On va maintenant s'intéresser à la fonction génératrice des partitions planes.

1.2 Comptage bijectif des partitions planes par les diagrammes de croissance

Proposition 2. La fonction génératrice des partitions planes

$$Z_{3D}(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$$

où a_n désigne le nombre de partitions planes de taille n vaut

$$Z_{3D}(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^n}.$$

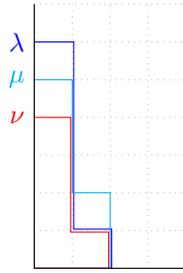
Démonstration. Soient λ et μ deux partitions.

On va commencer par construire une bijection entre

$$\mathbb{N} \times \{\nu \mid \nu \prec \lambda, \nu \prec \mu\} \text{ et } \{\nu' \mid \nu' \succ \lambda, \nu' \succ \mu\}. \quad (1)$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, et ν une partition inférieure à la fois à λ et à μ .

Pour illustrer la construction, nous considérerons l'exemple $\lambda = (6, 1)$, $\mu = (5, 2)$, $\nu = (4, 1)$, $k = 2$.



On définit ν' par :

- $\nu'_1 = k + \max(\lambda_1, \mu_1)$
- $\nu'_{n+1} - \max(\lambda_{n+1}, \mu_{n+1}) = \min(\lambda_n, \mu_n) - \nu_n$, ce qui correspond à une symétrie (cf illustration ci-dessous)

Dans l'exemple ci-dessus, le ν' correspondant à $k = 2$ est $\nu' = (8, 3)$:

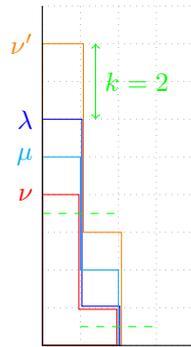


FIGURE 3 – Construction de ν'

On écrit alors

$$\begin{array}{ccc} & \nu' & \\ \lambda & \diamond 2 & \mu \\ & \nu & \end{array}$$

Remarquons que l'on peut retrouver ν et k à partir de ν' , λ et μ par une construction similaire à celle de ν' à partir de ν et k . Plus précisément, $k = \nu'_1 - \max(\lambda_1, \mu_1)$ et $\min(\lambda_n, \mu_n) - \nu_n = \nu'_{n+1} - \max(\lambda_{n+1}, \mu_{n+1})$.

On appelle grille d'entiers une matrice carrée, représentée penchée, d'entiers naturels non tous nuls sur les deux bords du dessous. Par exemple,

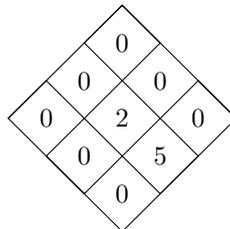
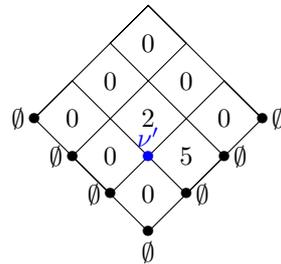


FIGURE 4 – Une grille d'entiers

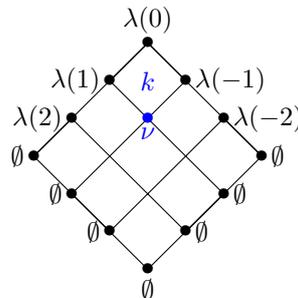
Grâce à cette bijection, explicitons maintenant une bijection entre les partitions planes et les grilles d'entiers.

La construction de la partition plane à partir de la grille d'entiers se fait naturellement par constructions successives de ν' en partant de la partition vide (telle que $\lambda(t) = \emptyset$ pour tout t dans \mathbb{Z}), comme l'illustre l'exemple suivant :



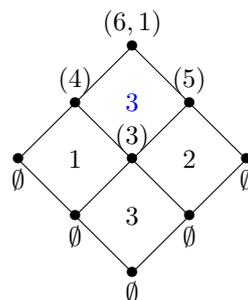
Par construction de ν' , si l'on suit le bord haut de la matrice, on obtient bien une suite de partitions d'abord vides, puis croissantes jusqu'au sommet le plus haut (qui correspond donc à $\lambda(0)$), puis décroissantes, puis vides. Cela représente donc bien une partition plane.

Dans le sens inverse, si l'on a une partition plane $\{\lambda(t)\}$, soit $n = \max\{|t|, \lambda(t) \neq \emptyset\} + 1$. On peut alors former une grille $n \times n$ centrée autour de $t = 0$. On construit alors la grille par constructions successives des couples (ν, k) à partir des ν' , comme l'illustre l'exemple suivant :



On remarquera en particulier que le fait que $\lambda(-2)$ ou $\lambda(2)$ soit non vide est équivalent au fait que les deux bords du bas de la grille d'entiers soient non tous nuls.

Voici un exemple de construction (au-dessus de chaque sommet est indiquée la partition correspondante) :

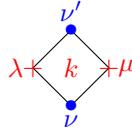


Cherchons maintenant comment retrouver la taille d'une partition plane sur la grille d'entiers associée. Tout d'abord, par construction, si ν' est créée à partir de ν, k, λ et μ , alors

$$k + |\min(\lambda, \mu)| - |\nu| = |\nu'| - |\max(\lambda, \mu)|$$

avec $\min(\lambda, \mu)_n = \min(\lambda_n, \mu_n)$ (resp. $\max(\lambda, \mu)_n = \max(\lambda_n, \mu_n)$).
Ce qui revient à

$$k + |\lambda| + |\mu| = |\nu| + |\nu'|.$$



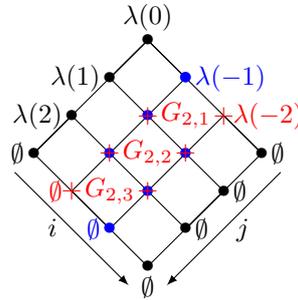
Si on somme alors le long d'une ligne entière (ou d'une colonne entière), alors on obtient une somme télescopique, et comme $|\emptyset| = 0$, on a alors

$$|\lambda(j-1)| - |\lambda(j)| = \sum_i G_{i,j}$$

et

$$|\lambda(-(i-1))| - |\lambda(-i)| = \sum_j G_{i,j},$$

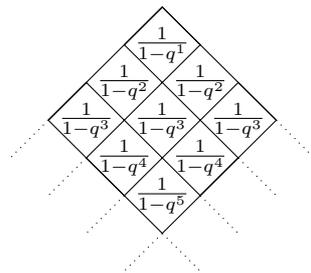
où G est la grille d'entiers associée à $\{\lambda(t)\}$.



Par conséquent, pour obtenir la taille de $\{\lambda(t)\}$, il suffit de sommer une fois le $G_{1,1}$ (pour $\lambda(0)$), deux fois $G_{1,2}$ [resp. $G_{2,1}$] (pour $\lambda(0)$ et $\lambda(1)$ [resp. $\lambda(0)$ et $\lambda(-1)$]), trois fois $G_{1,3}$, $G_{2,2}$ et $G_{3,1}$, etc. On a alors, si G est une grille $n \times n$,

$$|\{\lambda(t)\}| = \sum_{k=1}^{2n-1} \sum_{i=1}^k k G_{i,k+1-i}.$$

Cette somme correspond à un terme devant la puissance $|\{\lambda(t)\}|^{\text{ème}}$ du produit de tous les développements en série entière dans les cases ci-dessous :



Les limites de la grille correspondant à $\{\lambda(t)\}$ forment le plus petit carré contenant toutes les cases où l'on ne prend pas les termes $k = 0$ du développement en série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} q^{nk}$ dans le terme correspondant à $\{\lambda(t)\}$.

Si on somme sur tous les $\{\lambda(t)\}$, on obtient alors bien

$$Z_{3D}(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}.$$

□

Proposition 3. *Le rayon de convergence de $Z_{3D}(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n$ vaut 1.*

Démonstration. L'injection $\{\lambda(t)\} \mapsto \{\lambda'(t)\}$ où

$$\lambda'(t)_i = \begin{cases} \lambda(0)_1 + 1 & \text{si } t = 0, i = 1 \\ \lambda(t)_i & \text{sinon} \end{cases}$$

montre directement que (a_n) est croissante et donc que la série Z_{3D} diverge en $q = 1$.

Pour l'autre sens, on utilise l'inégalité

$$(1-a)(1-b) \geq 1-a-b, \forall a, b \in [0, 1]$$

qui permet de minorer $1/Z_{3D}$.

Pour $q \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{3D}(q)} &= \prod_{n=1}^{+\infty} (1-q^n)^n \\ &\geq \prod_{n=1}^N (1-q^n)^n \left(1 - \sum_{n=N+1}^{+\infty} nq^n\right) \\ &= \prod_{n=1}^N (1-q^n)^n \left(1 - N \frac{q^{N+1}}{1-q} - \frac{q^{N+1}}{(1-q)^2}\right). \end{aligned}$$

Le facteur $\left(1 - N \frac{q^{N+1}}{1-q} - \frac{q^{N+1}}{(1-q)^2}\right)$ tend vers 1 lorsque N tend vers $+\infty$, donc est strictement positif pour N assez grand. On obtient alors une minoration de $1/Z_{3D}(q)$ par un nombre strictement positif, donc $Z_{3D}(q)$ converge. □

On définit maintenant une loi de probabilité sur l'ensemble des partitions planes qui soit proportionnelle à la taille de la partition.

Soit $q \in]0; 1[$. On pose alors

$$\mathbb{P}(\{\lambda(t)\}) = \frac{q^{|\lambda(t)|}}{Z_{3D}(q)}.$$

Grâce à la bijection partition plane/grille d'entiers précédente, il est alors facile de construire des partitions planes suivant cette loi de probabilité. En effet, dans la case $G_{i,j}$ de la grille, chaque entier k a une probabilité proportionnelle à $q^{(i+j-1)k}$ d'apparaître. La probabilité que $\{\lambda(t)\}$ apparaisse est, si G est une grille $n \times n$,

$$\mathbb{P}(\{\lambda(t)\}) = \frac{\prod_{k=1}^{2n-1} \prod_{i=1}^k q^{kG_{i,k+1-i}}}{Z_{3D}(q)}.$$

2 Probabilités des processus de Schur

Dans le but de trouver des propriétés asymptotiques des partitions planes dans la prochaine partie, nous allons devoir généraliser notre étude précédente. Cette généralisation permet d'étudier les partitions planes pour des probabilités non uniformes. Pour cela, nous allons introduire l'espace fermionique utilisé en physique.

2.1 Espace fermionique

On note \mathfrak{S}_k pour $k \in \mathbb{Z}$ l'ensemble des sous-ensembles $S = \{s_1 > s_2 > \dots\}$ de $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ tels que $(\mathbb{Z}_- - \frac{1}{2}) \setminus S$ et $S \cap (\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2})$ sont finis et

$$\text{card}(S \cap (\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2})) - \text{card}((\mathbb{Z}_- - \frac{1}{2}) \setminus S) = k.$$

On note

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{S}_k.$$

Si $S \in \mathfrak{S}$, on pose

$$v_S = \underline{s_1} \wedge \underline{s_2} \wedge \dots$$

où \wedge désigne le produit extérieur. L'espace fermionique (ou algèbre extérieure infinie) est alors l'espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.,.)$ tel que $(v_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ forment une base orthonormée.

Si λ est une partition, on pose

$$v_\lambda = v_{S_\lambda} \text{ où } S_\lambda = \{\lambda_k - k + \frac{1}{2}\}_{k>0}.$$

En particulier, $v_\emptyset = v_{\mathbb{Z}_- - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \wedge -\frac{3}{2} \wedge \dots$

On note aussi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $v_k = v_{k + \mathbb{Z}_- - \frac{1}{2}} = k - \frac{1}{2} \wedge k - \frac{3}{2} \wedge \dots$

On appelle v_k le vecteur vide de charge k (on a : $v_\emptyset = v_0$). L'application $(\lambda \mapsto S_\lambda)$ est une bijection des partitions vers \mathfrak{S}_0 . En effet, on a $S_\lambda \cap (\mathbb{Z}_+ + \frac{1}{2})$ et $(\mathbb{Z}_- - \frac{1}{2}) \setminus S_\lambda$ de même taille correspondant au nombre de carrés grisés dans l'exemple ci-dessous ($\lambda = (4, 3, 1, 1)$) :

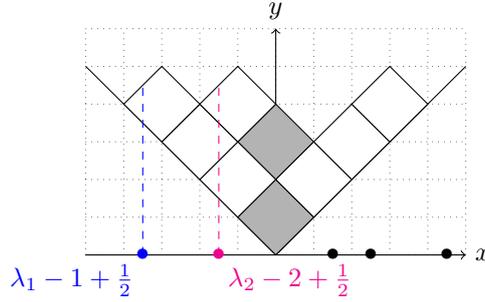


FIGURE 5 – Bijection $(\lambda \mapsto S_\lambda)$

2.2 Opérateurs fermioniques

On introduit les opérateurs fermioniques suivants, pour $k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

$$\psi_k f = \underline{k} \wedge f$$

et ψ_k^* leurs opérateurs adjoints

$$\psi_k^* f = \begin{cases} g & \text{si } \exists g, f = \underline{k} \wedge g \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a les relations suivantes (où 1 désigne la fonction identité) :

$$\begin{aligned} \psi_k \psi_k^* v_S &= \begin{cases} v_S & \text{si } k \in S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \psi_k \psi_k^* + \psi_k^* \psi_k &= 1 \\ \psi_k \psi_l + \psi_l \psi_k &= 0 \text{ si } k \neq l \\ \psi_k \psi_l^* + \psi_l^* \psi_k &= 0 \text{ si } k \neq l. \end{aligned}$$

Pour des besoins pratiques, on introduit les fonctions génératrices suivantes :

$$\psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} z^k \psi_k, \quad \psi^*(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} w^{-k} \psi_k^*.$$

2.3 Opérateurs bosoniques

On définit maintenant les opérateurs bosoniques pour $n \in \mathbb{Z}^*$ par

$$\alpha_n = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \psi_{k-n} \psi_k^*.$$

qui a un élément v_S associe la somme des éléments qu'on peut obtenir en remplaçant un élément k de S en $k - n$. On remarque que cette dernière somme est bien finie.

Proposition 4. *Les opérateurs bosoniques vérifient la relation de commutation suivante :*

$$\alpha_n \alpha_m - \alpha_m \alpha_n = n \delta_{n, -m}.$$

Démonstration. On traite d'abord le cas $m \neq -n$.

$$\alpha_n \alpha_m - \alpha_m \alpha_n = \sum_{k,l} \psi_{k-n} \psi_k^* \psi_{l-m} \psi_l^* - \sum_{k,l} \psi_{l-m} \psi_l^* \psi_{k-n} \psi_k^*$$

Les termes où tous les opérateurs commutent (lorsque $l \neq k - n, k + m$) s'annulent. On regroupe les autres termes de la manière ci-dessous :

$$\begin{aligned} \alpha_n \alpha_m - \alpha_m \alpha_n &= \sum_k (\psi_{k-n} \psi_k^* \psi_k \psi_{k+m}^* + \psi_{k-n} \psi_k^* \psi_{k-n-m} \psi_{k-n}^*) - \sum_k (\psi_k \psi_{k+m}^* \psi_{k-n} \psi_k^* + \psi_{k-n-m} \psi_{k-n}^* \psi_{k-n} \psi_k^*) \\ &= \sum_k (\psi_{k-n} \psi_k^* \psi_k \psi_{k+m}^* + \psi_{k+m-n} \psi_{k+m}^* \psi_{k-n} \psi_{k+m-n}^*) \\ &\quad - \sum_k (\psi_k \psi_{k+m}^* \psi_{k-n} \psi_k^* + \psi_{k-n} \psi_{k+m-n}^* \psi_{k+m-n} \psi_{k+m}^*) \end{aligned}$$

En utilisant les relations de commutation on obtient

$$\begin{aligned} \psi_{k-n} \psi_k^* \psi_k \psi_{k+m}^* &= \psi_{k-n} (1 - \psi_k \psi_k^*) \psi_{k+m}^* \\ &= \psi_{k-n} \psi_{k+m}^* + \psi_k \psi_{k+m}^* \psi_{k-n} \psi_k^* \\ \psi_{k+m-n} \psi_{k+m}^* \psi_{k-n} \psi_{k+m-n}^* &= \psi_{k-n} \psi_{k+m-n}^* \psi_{k+m-n} \psi_{k+m}^* + \psi_{k+m}^* \psi_{k-n}. \end{aligned}$$

Finalement on obtient bien

$$\alpha_n \alpha_m - \alpha_m \alpha_n = 0 \text{ si } m \neq -n.$$

Traitons maintenant le cas $m = -n$.

De même, les termes où tous opérateurs anticommulent (lorsque $l \neq k - n = k + m$) s'annulent, donc

$$\begin{aligned} \alpha_n \alpha_m - \alpha_m \alpha_n &= \sum_{k,l} \psi_{k-n} \psi_k^* \psi_{l-m} \psi_l^* - \sum_{k,l} \psi_{l-m} \psi_l^* \psi_{k-n} \psi_k^* \\ &= \sum_k (\psi_{k-n} \psi_k^* \psi_k \psi_{k-n}^* - \psi_k \psi_{k-n}^* \psi_{k-n} \psi_k^*). \end{aligned}$$

On remarque que

$$(\psi_{k-n} \psi_k^* \psi_k \psi_{k-n}^* - \psi_k \psi_{k-n}^* \psi_{k-n} \psi_k^*) v_S = \begin{cases} 1 & \text{si } k - n \in S \text{ et } k \notin S \\ -1 & \text{si } k - n \notin S \text{ et } k \in S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La somme précédente contient n sommes télescopiques imbriquées.

Pour N aussi grand que l'on veut, on a

$$\alpha_n \alpha_{-n} - \alpha_{-n} \alpha_n = \sum_{k=\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \psi_{k-N} \psi_{k+N}^* \psi_{k+N} \psi_{k-N}^* - \psi_{k+N} \psi_{k-N}^* \psi_{k-N} \psi_{k+N}^* + R,$$

où R est une somme de termes comme précédemment pour $|k|$ grand. Maintenant, si S appartient à \mathfrak{S} , il existe N suffisamment grand tel que $Rv_S = 0$ et alors

$$(\alpha_n \alpha_{-n} - \alpha_{-n} \alpha_n) v_S = n v_S.$$

□

Définition 4. Si $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite complexe indexée par \mathbb{Z} (par convention $s_0 = 0$), on définit

$$\Gamma_{\pm}(s) = \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_{\mp n} \alpha_{\pm n} \right).$$

On remarque que $\Gamma_+^*((s_n)) = \Gamma_-((s_{-n}))$ (car $\alpha_+^* = \alpha_-$).

Remarquons que si $m \in \mathbb{Z}$, alors pour tout n strictement positif, $\alpha_n v_m = 0$. On en déduit donc immédiatement que

$$\Gamma_+(s) v_m = v_m.$$

D'après la relation de commutation des α_n , les Γ_+ commutent entre eux et les Γ_- aussi. Γ_+ et Γ_- vérifient en outre la relation de commutation suivante :

Proposition 5. Si $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $s' = (s'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des suites complexes indexées par \mathbb{Z} , alors

$$\Gamma_+(s) \Gamma_-(s') = \exp \left(\sum_n n s'_n s_{-n} \right) \Gamma_-(s') \Gamma_+(s). \quad (2)$$

Démonstration. On observe d'abord comment α_n commute avec Γ_- :

$$\begin{aligned} \alpha_n \Gamma_-(s') &= \alpha_n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sum_m s'_m \alpha_{-m})^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sum_{n_1, \dots, n_k} s'_{n_1} \dots s'_{n_k} \alpha_n \alpha_{-n_1} \dots \alpha_{-n_k})}{k!}. \end{aligned}$$

D'après la relation d'anticommutation des α_n , les seuls termes qui ne commutent pas avec α_n sont lorsque certains des n_i sont égaux à n .

Or

$$\alpha_n \alpha_{-n}^{k+1} = \alpha_{-n} \alpha_n \alpha_{-n}^k + n \alpha_{-n}^k,$$

donc en itérant,

$$\alpha_n \alpha_{-n}^{k+1} = \alpha_{-n}^{k+1} \alpha_n + (k+1) n \alpha_{-n}^k.$$

Par conséquent, si f est une série entière, le commutateur $\alpha_n f(\alpha_{-n}) - f(\alpha_{-n}) \alpha_n$ vaut $n f'(\alpha_{-n})$. En particulier,

$$\begin{aligned} \alpha_n \Gamma_-(s') &= \Gamma_-(s') \alpha_n + n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial}{\partial \alpha_{-n}} \left(\left(\sum_m s'_m \alpha_{-m} \right)^k \right) \\ &= \Gamma_-(s') \alpha_n + n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} k s'_n \left(\sum_m s'_m \alpha_{-m} \right)^{k-1} \\ &= \Gamma_-(s') (\alpha_n + n s'_n). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sum_n s_{-n}\alpha_n)^k}{k!} \right) \Gamma_-(s') \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sum_n s_{-n}\alpha_n)^k}{k!} \Gamma_-(s') \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{n_1, \dots, n_k} s_{-n_1} \dots s_{-n_k} \alpha_{n_1} \dots \alpha_{n_k} \right)}{k!} \Gamma_-(s') \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma_-(s') \frac{\left(\sum_{n_1, \dots, n_k} s_{-n_1} \dots s_{-n_k} (\alpha_{n_1} + n_1 s'_1) \dots (\alpha_{n_k} + n_k s'_k) \right)}{k!} \\
&= \Gamma_-(s') \exp \left(\sum_n s_{-n} (\alpha_n + n s'_n) \right) \\
&= \Gamma_-(s') \Gamma_+(s) \exp \left(\sum_n n s_{-n} s'_n \right).
\end{aligned}$$

□

Γ_+ et Γ_- vérifient de plus la propriété suivante :

Proposition 6. *Si $s = (s_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est une suite complexe indexée par \mathbb{Z} , alors*

$$\Gamma_{\pm}(s)\psi(z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} s_{\mp n} z^{\pm n} \right) \psi(z) \Gamma_{\pm}(s)$$

et

$$\Gamma_{\pm}(s)\psi^*(z) = \left(\exp \left(\sum_{n \geq 1} s_{\mp n} z^{\pm n} \right) \right)^{-1} \psi^*(z) \Gamma_{\pm}(s).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\Gamma_+(s)\psi(z) &= \exp \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_{-n} \alpha_{+n} \right) \psi(z) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\sum_n s_{-n} \alpha_n)^k}{k!} \right) \psi(z) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\sum_{n_1, \dots, n_k} s_{-n_1} \dots s_{-n_k} \alpha_{n_1} \dots \alpha_{n_k} \right)}{k!} \psi(z)
\end{aligned}$$

Or on déduit immédiatement des définitions de α_n et de ψ les deux relations de commutation suivantes :

$$\alpha_n \psi(z) - \psi(z) \alpha_n = z^n \psi(z)$$

et

$$\alpha_n \psi^*(z) - \psi^*(z) \alpha_n = -z^n \psi^*(z).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma_+(s)\psi(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \psi(z) \frac{\left(\sum_{n_1, \dots, n_k} s_{-n_1} \dots s_{-n_k} (z^{n_1} + \alpha_{n_1}) \dots (z^{n_k} + \alpha_{n_k})\right)}{k!} \\
&= \psi(z) \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_{-n} (z^n + \alpha_n)\right) \\
&= \psi(z) \exp\left(\sum_{n \geq 1} s_{-n} z^n\right) \Gamma_+(s).
\end{aligned}$$

Les autres relations découlent des propriétés de passage à l'adjoint. \square

Si il existe x tel que pour tout $n \geq 1$,

$$s_{-n} = \frac{1}{n} \sum_{i \geq 0} x_i^n$$

Et alors

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} s_{-n} z^n\right) = \prod_{i \geq 0} \frac{1}{1 - x_i z} = \sum_{n \geq 0} z^n h_n(x)$$

où h_n est le $n^{\text{ème}}$ polynôme symétrique homogène complet

$$h_n(x) = \sum_{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \dots x_{i_n}.$$

L'existence d'un x vérifiant cette propriété n'est pas utile pour la suite, celle des $h_n(x)$ provenant du fait que h_n est une base des polynômes.

On fait de même avec les s_n , $n \geq 1$.

Les relations de la propriété précédente se réécrivent alors

Proposition 7. *Pour tout n , on a*

$$\begin{aligned}
\Gamma_- \psi_n &= \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \psi_{n+k} \Gamma_- =: \psi_n^- \Gamma_- \\
\Gamma_+ \psi_n &= \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \psi_{n-k} \Gamma_+ =: \psi_n^+ \Gamma_+ \\
\psi_n^* \Gamma_- &= \Gamma_- \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \psi_{n+k}^* =: \Gamma_- \psi_n^{*-} \\
\psi_n^* \Gamma_+ &= \Gamma_+ \sum_{k \in \mathbb{N}} h_k \psi_{n-k}^* =: \Gamma_+ \psi_n^{*+}.
\end{aligned}$$

Remarquons au passage que

$$\psi_n^{*-} v_m = 0 \text{ si } n > m.$$

2.4 Fonctions de Schur gauches

Proposition 8. *Si $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont deux suites complexes vérifiant pour $n \in \mathbb{N}^*$ $s_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^n$ alors*

$$(\Gamma_-(s)v_\mu, v_\lambda) = s_{\lambda/\mu}(x), \quad (3)$$

où $s_{\lambda/\mu}$ désigne la fonction de Schur gauche que nous définissons par

$$s_{\lambda/\mu}(x) = \det(h_{\lambda_i - \mu_j + j - i}(x)).$$

Notamment, si μ n'est pas inclus dans λ on a bien $s_{\lambda/\mu} = 0$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}_-$ assez petit, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_\lambda &= \psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \psi_{\lambda_2-2+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n \text{ et} \\ v_\mu &= \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}} \psi_{\mu_2-2+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}} v_n. \end{aligned}$$

On remarque $(h_{\lambda_i-\mu_j+j-i}(x))_{i,j \in \mathbb{N}^*}$ est quasi unitriangulaire supérieure si bien que

$$\det(h_{\lambda_i-\mu_j+j-i}(x)) = \det(h_{\lambda_i-\mu_j+j-i}(x))_{(1 \leq i, j \leq n)}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} (\Gamma_-(s)v_\mu, v_\lambda) &= (\Gamma_-(s)\psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}} v_n) \\ &= (\psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}}^* \cdots \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}}^* \Gamma_-(s)\psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, v_n). \end{aligned}$$

En passant $\Gamma_-(s)$ à gauche et comme $\Gamma_-(s)v_n = v_n$, on obtient

$$(\Gamma_-(s)v_\mu, v_\lambda) = (\psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}}^{*-} \cdots \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}}^{*-} \psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, v_n).$$

L'idée est que chaque ψ va ajouter un facteur à v_n et chaque ψ^{*-} va supprimer l'un d'eux. Il suffit donc de calculer la somme sur les appariements des ψ^{*-} avec les ψ qu'ils compensent. Plus rigoureusement, en rappelant que $\psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}}^{*-} v_n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \cdots &= (\psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}}^{*-} \cdots \psi_{\mu_2-2+\frac{1}{2}}^{*-} \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}}^{*-} \psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, v_n) \\ &= (\psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}}^{*-} \cdots \psi_{\mu_2-2+\frac{1}{2}}^{*-} (-\psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \psi_{\mu_1-1+\frac{1}{2}}^{*-} + h_{\lambda_1+1-\frac{1}{2}-\mu_1-1+\frac{1}{2}}) \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, v_n) \\ &= \cdots \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} h_{\lambda_i-\mu_1+i-1}(x) (\psi_{\mu_n-n+\frac{1}{2}}^{*-} \cdots \psi_{\mu_2-2+\frac{1}{2}}^{*-} \psi_{\lambda_1-1+\frac{1}{2}} \cdots \widehat{\psi_{\lambda_i-i+\frac{1}{2}}} \cdots \psi_{\lambda_n-n+\frac{1}{2}} v_n, v_n), \end{aligned}$$

où le facteur surmonté d'un accent circonflexe n'apparaît pas dans le produit. En procédant par récurrence et en remarquant que la somme précédente correspond à une décomposition selon la première colonne du déterminant, on peut conclure. \square

2.5 Probabilités des processus de Schur

Soit ϕ une fonction holomorphe au voisinage du cercle unité, ne s'annulant pas sur le cercle unité, de moyenne géométrique 1, telle que l'image du cercle unité soit d'indice nul par rapport à 0.

Remarque 2. Les fonctions ϕ qui nous intéresseront pour retrouver le cas de la mesure uniforme sont

$$\phi_{3D}^+[\alpha](z) = (1 - \alpha z)^{-1}$$

et

$$\phi_{3D}^-[\alpha](z) = (1 - \alpha z^{-1})^{-1}.$$

$\log(\phi)$ est alors bien définie, holomorphe au voisinage du cercle unité, de moyenne nulle sur le cercle unité, elle admet donc un développement en série de Laurent

$$\log(\phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \log(\phi)_k z^k \quad (\text{avec } \log(\phi)_0 = 0).$$

On note alors

$$\Gamma_\pm(\phi) = \Gamma_\pm(\log(\phi)_k).$$

ϕ s'écrit alors $\phi = \phi^+ \phi^-$, où

$$\phi^+(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \log(\phi)_k z^k \right)$$

et

$$\phi^-(z) = \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \log(\phi)_{-k} z^{-k} \right).$$

La proposition précédente se réécrit alors

$$(\Gamma_-(\phi)v_\mu, v_\lambda) = s_{\lambda/\mu}(\phi^+),$$

avec

$$s_{\lambda/\mu}(\phi^+) = \det(\phi_{\lambda_i - \mu_j + j - i}^+(x)) \quad (4)$$

(de la même façon, en posant $s_{\lambda/\mu}(\phi^-) = \det(\phi_{\lambda_i - \mu_j + j - i}^-(x))$, on a $(\Gamma_+(\phi)v_\mu, v_\lambda) = s_{\mu/\lambda}(\phi^-)$).

En effet, les $h_n(x)$ qui correspondent à $s_n = \log(\phi^+)_n$, c'est-à-dire qui vérifient

$$\sum_{n \geq 0} z^n h_n(x) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} s_n z^n \right),$$

sont les ϕ_n^+ car

$$\sum_{n \geq 0} z^n \phi_n^+ = \phi^+(z) = \exp \left(\sum_{n \geq 1} (\log(\phi^+))_n z^n \right).$$

Définition 5. On définit le poids de transition S_ϕ par

$$S_\phi(\mu, \lambda) = \sum_{\nu} s_{\mu/\nu}(\phi^-) s_{\lambda/\nu}(\phi^+).$$

Cette somme est bien finie car $s_{\mu/\nu}(\phi^-) s_{\lambda/\nu}(\phi^+)$ est nulle dès que $\nu \not\subset \mu, \lambda$. Par produit matriciel, on obtient

$$S_\phi(\mu, \lambda) = (\Gamma_-(\phi)\Gamma_+(\phi)v_\mu, v_\lambda).$$

On peut alors définir une famille de lois de probabilités plus générales que la loi uniforme de la première partie à partir d'une suite de fonctions $(\phi[m])_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}$, vérifiant les propriétés données au début de la partie, comme suit :

Définition 6. Soit $\phi[m](z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi_k[m] z^k$. On définit la probabilité d'une partition plane par

$$\mathbb{P}(\{\lambda(t)\}) = \frac{1}{Z} \prod_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} S_{\phi[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})),$$

où Z est la fonction de partition

$$Z = \sum_{\{\lambda(t)\}} \prod_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} S_{\phi[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})).$$

Remarque 3. Dans le cas de la mesure uniforme, on pose, pour un certain $q \in]0; 1[$,

$$\phi_{3D}[m] = \begin{cases} \phi_{3D}^+[q^{|m|}] & \text{si } m < 0 \\ \phi_{3D}^-[q^{|m|}] & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

On remplace dans Z les termes $S_{\phi[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2}))$ par leur expression en fonction de Γ_+ et Γ_- :

$$Z = \sum_{\{\lambda(t)\}} \prod_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \left(\Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) v_{\lambda(m - \frac{1}{2})}, v_{\lambda(m + \frac{1}{2})} \right).$$

Ce qui correspond au développement du produit matriciel infini suivant ($v_{\lambda(m + \frac{1}{2})} = v_{\emptyset}$ pour $|m|$ assez grand) :

$$Z = \left(\overleftarrow{\prod}_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) v_{\emptyset}, v_{\emptyset} \right),$$

où $\overleftarrow{\prod}$ indique que l'on fait le calcul en partant des indices les plus élevés du produit.

On utilise alors la relation de commutation de Γ_+ et Γ_- trouvée précédemment

$$\Gamma_+(\phi[m_2]) \Gamma_-(\phi[m_1]) = \exp \left(\sum_n n (\log(\phi[m_1]))_n (\log(\phi[m_2]))_{-n} \right) \Gamma_-(\phi[m_1]) \Gamma_+(\phi[m_2])$$

pour regrouper tous les $\Gamma_+(\phi[m])$ ensemble à droite du produit. Ainsi, comme $\Gamma_+ v_m = v_m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ (et en particulier pour $m = 0$, qui correspond à $v_m = v_{\emptyset}$), et comme $\Gamma_-^* = \Gamma_+$, on obtient (les grand m sont au départ à gauche du produit)

$$Z = \exp \left(\sum_{m_1 < m_2} \sum_k k (\log \phi[m_1])_k (\log \phi[m_2])_{-k} \right).$$

Remarque 4. Dans le cas particulier de ϕ_{3D} ,

$$Z_{3D} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^n}.$$

En effet,

- si $m < 0$,

$$\log(\phi_{3D}[m])(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^{|m|}z)^k}{k}$$

$$\text{donc } \log(\phi_{3D}[m])_k = \frac{(q^{|m|})^k}{k} \mathbf{1}_{k>0}.$$

- si $m > 0$,

$$\log(\phi_{3D}[m])(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(q^{|m|})^k}{k z^k}$$

$$\text{donc } \log(\phi_{3D}[m])_{-k} = \frac{(q^{|m|})^k}{k} \mathbf{1}_{k>0}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
Z_{3D}(q) &= \exp \left(\sum_{m_1, m_2 = \frac{1}{2}}^{+\infty} \sum_k k \frac{q^{|-m_1|k}}{k} \frac{q^{|m_2|k}}{k} \right) \\
&= \exp \left(\sum_{m_1, m_2 = \frac{1}{2}}^{+\infty} \sum_k \frac{q^{(m_1+m_2)k}}{k} \right) \\
&= \prod_{m_1, m_2 = \frac{1}{2}}^{+\infty} \exp(-\log(1 - q^{m_1+m_2})) \\
&= \prod_{m_1, m_2 = \frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^{m_1+m_2})} \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1 - q^n)^n}.
\end{aligned}$$

Remarque 5. ϕ_{3D} mène bien à la loi de probabilité uniforme utilisée dans la première partie.

Traisons d'abord le cas $m < 0$.

$(\phi_{3D}[m]) = (\phi_{3D}^+[m])$ et $(\phi_{3D}^-[m]) = 1$

Or $(\phi_{3D}^+[m])_k = q^{km} \mathbf{1}_{k \geq 0} =: h_k$ pour tout k donc comme en (4),

$$s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^+[m]) = \det((\phi_{3D}^+[m])_{\lambda_i - \mu_j + j - i}) = \det(h_{\lambda_i - \mu_j + j - i}).$$

On obtient alors

Proposition 9.

$$s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^+[m]) = \begin{cases} q^{|m|(|\lambda| - |\mu|)} & \text{si } \mu \prec \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. $h_{\lambda_i - \mu_j + j - i} = x^{\lambda_i - \mu_j + j - i} \mathbf{1}_{\{\lambda_i - \mu_j + j - i \geq 0\}}$ avec $x = q^{|m|}$

On a la disjonction de cas suivante (lorsque l'on a pas $\lambda \succ \mu$, on prend le plus petit indice i tel que l'on se retrouve dans une des deux dernières configurations) :

- cas $\lambda \succ \mu$

Alors pour tout i , $\lambda_i - \mu_i + i - i \geq 0$ et $\lambda_{i+1} - \mu_i + i - i - 1 < 0$

Donc la matrice $(h_{\lambda_i - \mu_j + j - i})$ est triangulaire supérieure, et $s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^+[m]) = \prod_i x^{\lambda_i - \mu_i}$ comme souhaité.

- cas $\exists i, \lambda_i < \mu_i$

Alors parmi les i premières colonnes de la matrice, les coefficients non nuls ne sont répartis que dans les $i - 1$ premières lignes (le mineur $(i - 1) \times (i - 1)$ en haut à gauche est en fait triangulaire supérieur), donc le déterminant est bien nul.

- cas $\exists i, \lambda_{i+1} > \mu_i$

Alors, pour tout $k \geq 1$, $\mu_i \geq \mu_{i+k}$.

Donc si on pose $\delta = \lambda_i - \lambda_{i+1} + 1 \geq 1$, alors pour tout $k \geq 0$,

$$\lambda_i - \mu_{i+k} + k = \delta + \lambda_{i+1} - \mu_{i+k} + k - 1$$

et

$$\lambda_{i+1} - \mu_{i+k} + k - 1 \geq \lambda_{i+1} - \mu_i + k - 1 \geq \lambda_{i+1} - \mu_i - 1 \geq 0.$$

La matrice est donc de la forme :

$$\begin{array}{cccccc}
& & \dots & i & \dots & (i+k) & \dots \\
\vdots & & & & & & \\
i & \left(\begin{array}{ccccc} * & * & \dots & * & \dots \\ 0 & x^{\lambda_i - \mu_i} & \dots & x^{\lambda_i - \mu_i + k} & \dots \\ 0 & x^{\lambda_i - \mu_i - \delta} & \dots & x^{\lambda_i - \mu_i + k - \delta} & \dots \end{array} \right) \\
i+1 & & & & & & \\
\vdots & & & & & &
\end{array}$$

Les lignes (i) et $(i+1)$ étant proportionnelles avec un facteur x^δ , on en déduit que le déterminant recherché est bien nul. □

De plus,

$$s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^-[m]) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$S_{\phi_{3D}[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})) = s_{\lambda(m+\frac{1}{2})/\lambda(m-\frac{1}{2})}(\phi_{3D}^+[m]).$$

Pour $m < 0$, les relations sont inversées entre ϕ_{3D}^+ et ϕ_{3D}^- .

On obtient finalement

$$S_{\phi_{3D}[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})) = \begin{cases} q^{m(|\lambda(m+\frac{1}{2})| - |\lambda(m-\frac{1}{2})|)} & \text{si } \begin{cases} \lambda(m + \frac{1}{2}) \prec \lambda(m - \frac{1}{2}), m > 0 \\ \text{ou} \\ \lambda(m + \frac{1}{2}) \succ \lambda(m - \frac{1}{2}), m < 0 \end{cases} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, les $\{\lambda(t)\}$ qui ont une probabilité non nulle de se réaliser sont bien les partitions planes, et si $\{\lambda(t)\}$ correspond matriciellement à Π , la probabilité de $\{\lambda(t)\}$ est proportionnelle à $q^{|\Pi|}$. On retrouve donc bien la mesure uniforme.

Remarque 6. Dans le cas de ϕ_{3D} , la bijection (1) expliquée dans la première partie permet de trouver une relation de commutation de Γ_+ et Γ_- plus simple, sans passer par leur définition par les opérateurs bosoniques, mais en utilisant uniquement comme définition la relation (3), à savoir

$$(\Gamma_+(\phi^+[\alpha])v_\lambda, v_\mu) = s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^+[m]).$$

Ainsi, on a

$$\Gamma_+(\phi^\pm[\alpha])\Gamma_-(\phi^\pm[\beta]) = \frac{1}{1 - \alpha\beta} \Gamma_-(\phi^\pm[\beta])\Gamma_+(\phi^\pm[\alpha]),$$

ce qui permet de calculer Z_{3D} plus directement.

En effet, par exemple pour ϕ^+ ,

$$(\Gamma_+(\phi^+[\alpha])v_\lambda, v_\mu) = s_{\lambda/\mu}(\phi_{3D}^+[m]) = \begin{cases} \alpha^{|\lambda| - |\mu|} & \text{si } \mu \prec \lambda \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc montrer cette égalité revient à montrer, pour tous λ, μ ,

$$(\Gamma_+(\phi^+[\alpha])\Gamma_-(\phi^+[\beta])v_\lambda, v_\mu) = \frac{1}{1 - \alpha\beta} (\Gamma_+(\phi^+[\beta])\Gamma_+(\phi^+[\alpha])v_\lambda, v_\mu),$$

soit

$$\sum_{\nu' \succ \mu, \lambda} \alpha^{|\lambda| - |\nu'|} \beta^{|\nu'| - |\mu|} = \sum_{k \geq 0} \sum_{\nu \prec \mu, \lambda} \beta^{|\lambda| - |\nu| + k} \alpha^{|\nu| - |\mu| + k}.$$

Remarquons qu'il suffit de trouver une bijection entre les couples $(k, \nu), \nu \prec \lambda, \mu$, et les couples $\nu', \nu' \succ \lambda, \mu$, telle que k, ν et ν' vérifient de plus $|\lambda| + |\mu| + k = |\nu| + |\nu'|$, pour assurer l'existence de la somme portant sur les $\nu', \nu' \succ \lambda, \mu$, et l'égalité des deux membres (le deuxième membre étant de la forme $\frac{1}{1-\alpha\beta} \times$ (une somme finie)). Cette bijection est en fait la bijection (1) détaillée dans la première partie de cet article.

On peut aussi montrer directement que

$$\Gamma_+(\phi^\pm[\alpha])\Gamma_+(\phi^\pm[\beta]) = \Gamma_+(\phi^\pm[\beta])\Gamma_+(\phi^\pm[\alpha]).$$

L'expression

$$Z = \left(\prod_{m \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}}^{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m])\Gamma_+(\phi[m])v_\emptyset, v_\emptyset \right)$$

permet alors de retrouver immédiatement, en regroupant tous les termes Γ_+ ensemble,

$$Z_{3D}(q) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1-q^n)^n}.$$

3 Fonctions de corrélation

Définition 7. Soit $U = \{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})$ où $u_i = (t_i, x_i)$ avec (t_i) croissante.

$$\rho(U) = \mathbb{P}(x_i \in S_{\lambda(t_i)}, \forall i)$$

Proposition 10.

$$\rho(U) = \frac{1}{Z}(R_U v_\emptyset, v_\emptyset),$$

où, si par convention on pose $t_0 = -\infty$,

$$R_U = \prod_{m > t_n}^{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m])\Gamma_+(\phi[m]) \prod_{1 \leq i \leq n}^{\leftarrow} \left(\psi_{x_i} \psi_{x_i}^* \prod_{t_{i-1} < m < t_i}^{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m])\Gamma_+(\phi[m]) \right).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} (R_U v_\emptyset, v_\emptyset) &= \sum_{\{\lambda(t)\}} \left(\prod_{m > t_n}^{\leftarrow} S_{\phi[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})) \right. \\ &\quad \left. \prod_{1 \leq i \leq n}^{\leftarrow} \left((\psi_{x_i} \psi_{x_i}^* v_{\lambda(t_i)}, v_{\lambda(t_i)}) \prod_{t_{i-1} < m < t_i}^{\leftarrow} S_{\phi[m]}(\lambda(m - \frac{1}{2}), \lambda(m + \frac{1}{2})) \right) \right) \\ &= \sum_{\{\lambda(t)\}} Z \mathbb{P}(\{\lambda(t)\}) \mathbf{1}(x_i \in S_{\lambda(t_i)}, \forall i) \\ \frac{(R_U v_\emptyset, v_\emptyset)}{Z} &= \rho(U). \end{aligned}$$

□

Proposition 11. Si $\text{Ad}(g) \cdot h = ghg^{-1}$, on pose

$$\Psi_x(t) = \text{Ad} \left(\prod_{m > t} \Gamma_+(\phi[m]) \prod_{m < t} \Gamma_-(\phi[m])^{-1} \right) \cdot \psi_x$$

et $\Psi_x^*(t)$ de la même façon en remplaçant ψ_x par ψ_x^* . On a alors

$$\rho(U) = \left(\prod_{\leftarrow} \Psi_{x_i}(t_i) \Psi_{x_i}^*(t_i) v_\emptyset, v_\emptyset \right).$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on peut commuter les termes à l'intérieur de Ad. En effet

$$\text{Ad}(\Gamma_+ \Gamma_-) \cdot \psi_x = \Gamma_+ \Gamma_- \psi_x (\Gamma_+ \Gamma_-)^{-1} = \gamma \Gamma_- \Gamma_+ \psi_x (\gamma \Gamma_- \Gamma_+)^{-1} = \text{Ad}(\Gamma_- \Gamma_+) \cdot \psi_x,$$

où γ est un nombre complexe non nul.

De plus, on a

$$\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) = \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right)^{-1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} R_U &= \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \prod_{1 \leq i \leq n} \psi_{x_i} \psi_{x_i}^* \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right)^{-1} \\ &= \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \prod_{1 \leq i \leq n} \text{Ad} \left(\left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m]) \Gamma_-(\phi[m]) \right)^{-1} \right) \cdot \psi_{x_i} \psi_{x_i}^* \\ &= \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \prod_{1 \leq i \leq n} \text{Ad} \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m])^{-1} \prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m])^{-1} \right) \cdot \psi_{x_i} \psi_{x_i}^*. \end{aligned}$$

Comme les Γ_+ commutent entre eux et les Γ_- aussi, on a donc

$$\begin{aligned} R_U &= \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \prod_{1 \leq i \leq n} \text{Ad} \left(\left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m]) \right)^{-1} \right) \cdot \Psi_{x_i} \Psi_{x_i}^* \\ &= \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \Gamma_+(\phi[m]) \right) \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m]) \right)^{-1} \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \Psi_{x_i} \Psi_{x_i}^* \right) \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m]) \right). \end{aligned}$$

En regroupant tous les Γ_+ à droite dans le facteur à gauche des Ψ , cela revient au calcul de Z précédent, donc comme les Γ_+ commutent entre eux,

$$R_U = Z \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_-(\phi[m]) \right) \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \Psi_{x_i} \Psi_{x_i}^* \right) \left(\prod_{\leftarrow} \Gamma_+(\phi[m]) \right).$$

Comme $\Gamma_+ v_\emptyset = v_\emptyset$, on obtient le résultat voulu. \square

3.1 Formule de Wick

Proposition 12. *Formule de Wick Si*

$$A_i = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} a_{i,k} \psi_k$$

et

$$A_i^* = \sum_{k \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} a_{i,k}^* \psi_k^*$$

pour $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\left(\prod_{i=1}^{\leftarrow} A_i A_i^* v_\emptyset, v_\emptyset \right) = \det(K_A(i, j)),$$

où

$$K_A(i, j) = \begin{cases} (A_i A_j^* v_\emptyset, v_\emptyset), & i \geq j \\ -(A_j^* A_i v_\emptyset, v_\emptyset), & i < j. \end{cases}$$

Démonstration. Montrons la proposition par récurrence. L'initialisation pour $n = 1$ est trivial. On pose

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \sum_k a_{i,k} a_{j,k}^* \\ K_{i,j}^+ &= \sum_{k>0} a_{i,k} a_{j,k}^* \\ K_{i,j}^- &= \sum_{k<0} a_{i,k} a_{j,k}^* \\ A_i^\pm &= \sum_{k \geq 0} a_{i,k} \psi_k. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$K_A(i, j) = \begin{cases} K_{i,j}^-, & i \geq j \\ -K_{i,j}^+, & i < j \end{cases}$$

et que l'on a les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} A_i A_j^* &= K_{i,j} - A_j^* A_i \\ A_i A_j &= -A_j A_i. \end{aligned}$$

Supposons par hypothèse de récurrence la propriété vraie pour $n - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} A_n v_\emptyset &= A_n^+ v_\emptyset \\ (A_n^+)^* v_\emptyset &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant les relations de commutation sur A_n puis A_n^+ , on obtient (la notation $A_1 \dots \widehat{A}_i \dots A_n$ désigne le fait que l'on prend tous les facteurs sauf A_i dans le produit)

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{\leftarrow} A_i A_i^* &= \sum_{i=1}^n K_{n,i} A_n^* A_{n-1} \dots \widehat{A}_i^* \dots A_1 A_1^* - A_n^* A_{n-1} \dots A_1 A_1^* A_n \\ A_n^* A_{n-1} \dots A_1 A_1^* A_n^+ &= \sum_{i=1}^n K_{n,i}^+ A_n^+ A_n^* A_{n-1} \dots \widehat{A}_i^* \dots A_1 A_1^* - A_n^+ A_n^* \dots A_1^*. \end{aligned}$$

En calculant le produit scalaire, on obtient alors

$$\left(\prod_{i=1}^{\leftarrow} A_i A_i^* v_\emptyset, v_\emptyset \right) = \sum_{i=1}^n K_{n,i}^- (A_n^* A_{n-1} \dots \widehat{A}_i^* \dots A_1^* v_\emptyset, v_\emptyset).$$

Etudions un terme de la somme :

$$\begin{aligned} A_n^* A_{n-1} \dots \widehat{A}_i^* \dots A_1^* &= (K_{n-1,n} - A_{n-1} A_n^*) \dots (K_{i,i+1} - A_i A_{i+1}^*) A_{i-1} A_{i-1}^* \dots A_1 A_1^* \\ &= (-1)^{n-i} (A_{n-1} A_n^* - K_{n-1,n}) \dots (A_i A_{i+1}^* - K_{i,i+1}) A_{i-1} A_{i-1}^* \dots A_1 A_1^*. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, $(-1)^{n-i}(A_n^* A_{n-1} \dots \widehat{A_i^*} \dots A_1^* v_\emptyset, v_\emptyset)$ est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} K_{1,1}^- & \cdots & -K_{1,i-1}^+ & -K_{1,i+1}^+ & \cdots & -K_{1,n-1}^+ & -K_{1,n}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ K_{i-1,1}^- & \cdots & K_{i-1,i-1}^- & -K_{i-1,i+1}^+ & \cdots & -K_{i-1,n-1}^+ & -K_{i-1,n}^+ \\ K_{i,1}^- & \cdots & K_{i,i-1}^- & K_{i,i+1}^- - K_{i,i+1}^+ & \cdots & -K_{i,n-1}^+ & -K_{i,n}^+ \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{n-2,1}^- & \cdots & K_{n-2,i-1}^- & K_{n-2,i+1}^- & \cdots & K_{n-2,n-1}^- - K_{n-2,n-1}^+ & -K_{n-2,n}^+ \\ K_{n-1,1}^- & \cdots & K_{n-1,i-1}^- & K_{n-1,i+1}^- & \cdots & K_{n-1,n-1}^- & K_{n-1,n}^- - K_{n-1,n}^+ \end{vmatrix}$$

Comme $K_{i,j}^- - K_{i,j}^+ = -K_{i,j}^+$, ce déterminant correspond exactement au mineur de $|K_A(i, j)|$ obtenu en retirant la dernière ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne. De là, $\sum_{i=1}^n K_{1,i}^-(A_1^* A_2 \dots \widehat{A_i^*} \dots A_n^* v_\emptyset, v_\emptyset)$ correspond à la décomposition de $|K_A(i, j)|$ selon la dernière ligne et on trouve finalement

$$\left(\prod_{i=1}^{\leftarrow} A_i A_i^* v_\emptyset, v_\emptyset \right) = \det(K_A(i, j)).$$

□

Proposition 13. Si

$$\Phi(t, z) = \frac{\prod_{m>t} \phi^-[m](z^{-1})}{\prod_{m<t} \phi^+[m](z^{-1})},$$

où m varie dans $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$,

et si K est la fonction génératrice

$$K_{t_1, t_2}(z, w) = \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{z^{x_1}}{w^{x_2}} K((t_1, x_1), (t_2, x_2))$$

telle que K corresponde au développement en série entière de la fonction

$$K_{t_1, t_2}(z, w) = \frac{\sqrt{zw} \Phi(t_1, z)}{z - w \Phi(t_2, w)}$$

sur les deux domaines $\{|z| > |w|\} \cap \{t_1 \geq t_2\}$ et $\{|z| < |w|\} \cap \{t_1 < t_2\}$,

alors

$$\rho(U) = \det(K(u_i, u_j))_{u_i, u_j \in U},$$

où $u_i = (t_i, x_i)$.

Démonstration. On pose

$$\Psi(t, z) = \text{Ad} \left(\prod_{m>t} \Gamma_+(\phi[m]) \prod_{m<t} \Gamma_-(\phi[m])^{-1} \right) \cdot \psi(z),$$

où ψ est la fonction génératrice $\psi(z) = \sum \psi_k z^k$ (de même $\psi^*(z) = \sum \psi_k^* z^{-k}$). Alors d'après les formules de commutation de ϕ avec Γ_+ et Γ_- , à savoir

$$\text{Ad} \left(\prod_{m>t} \Gamma_{\pm}(\phi[m]) \right) \cdot \psi(z) = \phi^{\mp}[m](z^{\pm 1}) \psi(z)$$

et

$$\text{Ad} \left(\prod_{m>t} \Gamma_{\pm}(\phi[m]) \right) \cdot \psi^*(z) = (\phi^{\mp}[m](z^{\pm 1}))^{-1} \psi^*(z),$$

Ψ vérifie

$$\Psi(t, z) = \Phi(t, z)\psi(z)$$

et

$$\Psi^*(t, z) = \Phi(t, z)^{-1}\psi^*(z).$$

De plus,

$$\begin{aligned} (\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset) &= \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \text{ si } |z| > |w| \\ -(\psi(w)^*\psi(z)v_\emptyset, v_\emptyset) &= \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \text{ si } |z| < |w|. \end{aligned}$$

Donc par exemple si $t_1 \geq t_2$ et $|z| > |w|$,

$$\begin{aligned} K_{t_1, t_2}(z, w) &= \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \frac{\Phi(t_1, z)}{\Phi(t_2, w)} \\ &= \frac{\Phi(t_1, z)}{\Phi(t_2, w)} (\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset) \\ &= (\Psi(t_1, z)\Psi^*(t_2, w)v_\emptyset, v_\emptyset) \\ &= \left(\sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{z^{x_1}}{w^{x_2}} \Psi_{x_1}(t_1)\Psi_{x_2}^*(t_2)v_\emptyset, v_\emptyset \right) \\ &= \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{z^{x_1}}{w^{x_2}} (\Psi_{x_1}(t_1)\Psi_{x_2}^*(t_2)v_\emptyset, v_\emptyset). \end{aligned}$$

De même, sur le domaine $\{|z| < |w|\} \cap \{t_1 < t_2\}$, on trouve

$$K_{t_1, t_2}(z, w) = \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{z^{x_1}}{w^{x_2}} (-\Psi_{x_2}^*(t_2)\Psi_{x_1}(t_1)v_\emptyset, v_\emptyset).$$

La formule de Wick mène alors au résultat. □

3.2 Cas de la mesure uniforme et représentations des partitions planes

Dans le cas de la mesure uniforme, Φ_{3D} s'écrit

$$\Phi_{3D}(t, z) = \frac{\prod_{m > \max(0, -t)} (1 - q^m z^{-1})}{\prod_{m > \max(0, t)} (1 - q^m z)}.$$

Définition 8. On définit le dilogarithme quantique par

$$(z; q)_\infty = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - q^n z).$$

Alors

$$\Phi_{3D}(t, z) = \begin{cases} \frac{(\sqrt{q}/z; q)_\infty}{(\sqrt{q}q^t z; q)_\infty} & \text{si } t \geq 0 \\ \frac{(\sqrt{q}q^{-t}/z; q)_\infty}{(\sqrt{q}z; q)_\infty} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Si Π est une partition plane, on fait le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \Pi \subset \mathbb{N}^3 &\rightarrow \tilde{\mathfrak{S}}(\Pi) \subset \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z} \\ (x, y, z) &\mapsto (t, h) = (y - x, z - \frac{1}{2}(x + y)). \end{aligned}$$

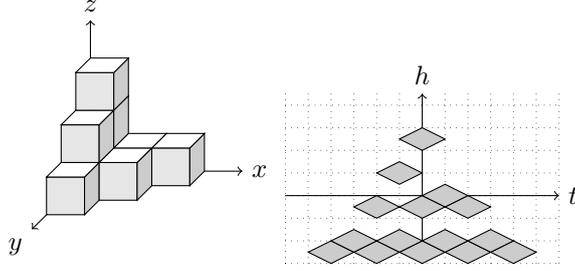


FIGURE 6 – Correspondance entre les coordonnées (x, y, z) et (t, h)

L'exemple (Figure 6) montre la correspondance entre les deux représentations. En particulier,

$$(t, h) \in \tilde{\mathfrak{S}}(\Pi) \Leftrightarrow h + |t|/2 \in \lambda(t)$$

On peut donc réécrire la propriété précédente sous la forme :

Proposition 14. *Pour $U = \{(t_i, h_i)\} \in \mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, alors*

$$\mathbb{P}\left(U \subset \tilde{\mathfrak{S}}(\Pi)\right) = \det(K_{3D}(u_i, u_j))_{u_i, u_j \in U}.$$

et la fonction génératrice K_{3D} vérifie

$$K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2))(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z|=1 \pm \epsilon} \int_{|w|=1 \mp \epsilon} \frac{1}{z-w} \frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{dw dz}{z^{h_1 + \frac{1}{2}(|t_1|+1)} w^{-h_2 - \frac{1}{2}(|t_2|-1)}},$$

où l'intégrale double est bien définie au voisinage de $\epsilon = 0^+$, le signe du haut correspondant à $t_1 \geq t_2$ et le signe du bas à $t_1 < t_2$.

Démonstration. Dans cette démonstration, on notera K pour K_{3D} , Φ pour Φ_{3D} .

En les variables (t, h) , le noyau K s'écrit

$$K_{t_1, t_2}(z, w) = \sum_{h_1 \in \frac{t_1}{2} + \mathbb{Z}, h_2 \in \frac{t_2}{2} + \mathbb{Z}} \frac{z^{h_1 + \frac{1}{2}|t_1|}}{w^{h_2 + \frac{1}{2}|t_2|}} K((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \frac{\Phi(t_1, z)}{\Phi(t_2, w)}.$$

On applique deux fois le théorème de Cauchy pour les séries de Laurent, d'abord en w , puis en z . Par exemple, pour $t_1 \geq t_2$ (l'autre cas se fait de façon similaire), la fonction est définie pour $|z| > |w|$ au voisinage du cercle unité donc pour $\epsilon > 0$ assez petit, on peut appliquer le théorème de Cauchy pour $|w| = 1 - \epsilon$ et $|z| = 1 + \epsilon$, ce qui donne

$$\sum_{h_1 \in \frac{t_1}{2} + \mathbb{Z}} z^{h_1 + \frac{1}{2}|t_1|} K((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1-\epsilon} \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \frac{\Phi(t_1, z)}{\Phi(t_2, w)} \frac{dw dz}{w^{-h_2 - \frac{1}{2}|t_2|+1}},$$

puis

$$K((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|z|=1+\epsilon} \int_{|w|=1-\epsilon} \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \frac{\Phi(t_1, z)}{\Phi(t_2, w)} \frac{dw dz}{z^{h_1 + \frac{1}{2}|t_1|+1} w^{-h_2 - \frac{1}{2}|t_2|+1}}.$$

Ce qui mène bien au résultat. □

4 Comportement asymptotique

4.1 Convergence en volume

Le volume des partitions planes converge dans le sens suivant :

Proposition 15. On pose $r = -\log(q)$. Alors $r^3|\Pi|$, où Π est une partition plane, converge vers $2\zeta(3)$ en probabilité lorsque $r \rightarrow 0^+$ (i.e. $q \rightarrow 1^-$).

Démonstration.

$$\mathbb{E}(|\Pi|) = \sum_{\Pi} \mathbb{P}(\Pi)|\Pi| = \sum_{\Pi} \frac{q^{|\Pi|}}{Z_{3D}(q)} |\Pi|$$

Donc si $Z_{3D}(q) = \sum_n a_n q^n$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\Pi|) &= \frac{\sum_n a_n q^n n}{Z_{3D}(q)} \\ \mathbb{E}(|\Pi|) &= \frac{q Z'_{3D}(q)}{Z_{3D}(q)}. \end{aligned}$$

$Z_{3D}(q)$ est un produit infini positif ne s'annulant pas sur $]0, 1[$ et la série $\log(Z_{3D}(q)) = \sum_n -n \log(1 - q^n)$ est normalement convergente sur tout compact inclus dans $]0, 1[$ donc on peut calculer $\frac{Z'_{3D}(q)}{Z_{3D}(q)}$ par la méthode logarithmique :

$$\mathbb{E}(|\Pi|) = \sum_{n \geq 1} \frac{n^2 q^n}{1 - q^n} = \sum_{n, k \geq 1} n^2 q^{nk}.$$

On peut intervertir les deux sommes grâce à l'absolue convergence.

Or, pour tout $k \geq 1$,

$$\sum_{n \geq 1} n^2 q^{nk} = \frac{1}{k} \left(\frac{d}{dq} \left(\sum_{n \geq 1} n q^{nk+1} \right) - \sum_{n \geq 1} n q^{nk} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n q^{nk} &= \frac{1}{k} \left(\frac{d}{dq} \left(\sum_{n \geq 1} q^{nk+1} \right) - \sum_{n \geq 1} q^{nk} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{d}{dq} \left(\frac{q^{k+1}}{1 - q^k} \right) - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{(k+1)q^k(1 - q^k) + kq^{k-1}q^{k+1}}{(1 - q^k)^2} - \frac{q^k}{1 - q^k} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{(k+1)q^k - q^{2k}}{(1 - q^k)^2} - \frac{q^k - q^{2k}}{(1 - q^k)^2} \right) \\ &= \frac{q^k}{(1 - q^k)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} n^2 q^{nk} &= \frac{1}{k} \left(\frac{d}{dq} \left(\frac{q^{k+1}}{(1 - q^k)^2} \right) - \frac{q^k}{(1 - q^k)^2} \right) \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{q^k(k+1) + q^{2k}(k-1)}{(1 - q^k)^3} - \frac{q^k}{(1 - q^k)^2} \right) \\ &= \frac{q^k(1 + q^k)}{(1 - q^k)^3}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\Pi|) &= \sum_{k \geq 1} \frac{q^k(1 + q^k)}{(1 - q^k)^3} \\ \mathbb{E}(|\Pi|) &= \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-rk}(1 + e^{-rk})}{(1 - e^{-rk})^3}. \end{aligned}$$

Or

$$x^3 \frac{e^{-x}(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})^3} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 2, \quad x^3 \frac{e^{-x}(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$$

donc la fonction $x \mapsto x^3 \frac{e^{-x}(1+e^{-x})}{(1-e^{-x})^3}$ est bornée par M sur \mathbb{R}_+ .

Donc en remplaçant x par rk ,

$$\mathbb{E}(|\Pi|) \leq M \sum_{k \geq 1} \frac{1}{(rk)^3} < +\infty.$$

En passant à la limite ($r \rightarrow 0^+$), par convergence dominée, on en déduit donc que

$$\mathbb{E}(|\Pi|) \sim \frac{2\zeta(3)}{r^3}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \text{Var}(|\Pi|) &= \mathbb{E}(|\Pi|^2) - \mathbb{E}(|\Pi|)^2 \\ &= \frac{1}{Z_{3D}(q)} \sum_{\Pi} \mathbb{P}(\Pi) |\Pi|^2 - \left(\frac{1}{Z_{3D}(q)} \sum_{\Pi} \mathbb{P}(\Pi) |\Pi| \right)^2 \\ &= \frac{1}{Z_{3D}(q)} \sum_n a_n n^2 q^n - \frac{1}{Z_{3D}(q)^2} (qZ'_{3D}(q))^2 \\ &= \frac{1}{Z_{3D}(q)} q(qZ'_{3D}(q))' - \frac{1}{Z_{3D}(q)^2} (qZ'_{3D}(q))^2 \\ &= \frac{1}{Z_{3D}(q)^2} (Z_{3D}(q)q(qZ'_{3D}(q))' - q^2 Z'_{3D}(q)^2) \\ &= q \frac{d}{dq} \mathbb{E}(|\Pi|). \end{aligned}$$

Un calcul similaire au précédent montre

$$\text{Var}(|\Pi|) = O(r^{-4})$$

donc

$$\text{Var}(|\Pi|) = o(r^{-6}).$$

Comme $\text{Var}(r^3|\Pi|) \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} 0$, on a bien convergence en probabilité. \square

Dans toute la suite, on s'intéresse maintenant à la forme limite que prend Π lorsque $|\Pi| \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire lorsque $r \rightarrow 0^+$, en normalisant Π par r^{-3} .

On considère donc, si $U^r = \{(t_i^r, h_i^r)\}_{1 \leq i \leq n}$, pour $r \rightarrow 0^+$, les coordonnées normalisées rt_i^r et rh_i^r , en supposant que les distances relatives entre les points

$$\Delta t_{i,j} = t_i^r - t_j^r, \quad \Delta h_{i,j} = h_i^r - h_j^r$$

ne dépendent pas de r . On suppose alors

$$rt_i^r \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \tau, \quad rh_i^r \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \chi, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Et on observe la forme locale que prend la limite Π lorsque $r \rightarrow 0^+$ aux coordonnées (τ, χ) en analysant le comportement de la fonction génératrice K_{3D} .

Sans restriction, par symétrie, on peut supposer pour la suite $\tau > 0$.

4.2 Dilogarithme et dilogarithme quantique

Proposition 16. *Nous avons l'équivalence suivante en $r \rightarrow 0^+$ (on rappelle $q = e^{-r}$) :*

$$\ln(z; q)_\infty \underset{r \rightarrow 0^+}{\sim} r^{-1} \int_0^z \frac{\ln(1-w)}{w} dw = -r^{-1} \operatorname{dilog}(1-z),$$

où

$$\operatorname{dilog}(1-z) = \sum_n \frac{z^n}{n^2}, \quad |z| \leq 1.$$

Démonstration. L'égalité de droite s'obtient par un développement en série entière et par une interversion série/intégrale.

Montrons maintenant l'équivalence asymptotique. En utilisant une subdivision adaptée de $[0; z]$, on peut appliquer la convergence des sommes de Riemann

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-rn}z)}{e^{-rn}z} (e^{-r(n+1)}z - e^{-rn}z) \xrightarrow{r \rightarrow 0} - \int_0^z \frac{\ln(1-w)}{w} dw.$$

De plus, on a convergence uniforme sur tout compact $K \subset \mathbb{C} \setminus [1; +\infty[$ (qui est le domaine de définition du dilogarithme) car la valeur absolue de la différence à la limite est majorée comme suit :

$$\left| - \int_0^z \frac{\ln(1-w)}{w} dw - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-rn}z)}{e^{-rn}z} (e^{-r(n+1)}z - e^{-rn}z) \right| \leq C_K \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-r(n+1)} - e^{-rn})^2 |z|^2,$$

où C_K est une constante dépendant du maximum de la dérivée de l'intégrande sur un compact dépendant de K . Or

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(1 - e^{-rn}z)}{e^{-rn}z} (e^{-r(n+1)}z - e^{-rn}z) &= (e^{-r} - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - e^{-rn}z) \\ &= (e^{-r} - 1) \ln(z; q)_\infty, \end{aligned}$$

et $(e^{-r} - 1) \sim -r$, d'où l'équivalent souhaité. \square

4.3 Forme asymptotique des partitions planes

Le facteur suivant de l'intégrande de K_{3D} pour $t_1 > 0$ vérifie

$$\ln \left(\frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{z^{h_1 + \frac{|t_1|+1}{2}}} \right) = \ln(q^{1/2}/z; q)_\infty - \ln(q^{1/2+t_1}z; q)_\infty - \left(h_1 + \frac{|t_1|+1}{2} \right) \ln z,$$

et est donc équivalent lorsque r tend positivement vers 0 à

$$\frac{1}{r} S(z; \tau, \chi),$$

où $S(z; \tau, \chi)$ est défini par

$$S(z; \tau, \chi) = -(\tau/2 + \chi) \ln z - \operatorname{dilog}(1 - 1/z) + \operatorname{dilog}(1 - e^{-\tau}z).$$

Comme le dilogarithme est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [1; +\infty[$, S est analytique sur $\mathbb{C} \setminus ([0; 1] \cup [e^\tau; +\infty[\cup e^{i\theta} \mathbb{R}_+)$ où θ dépend du logarithme choisi, on obtient alors la convergence sur tout compact

$$r \ln \left(\frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{1}{z^{h_1 + \frac{|t_1|+1}{2}} w^{-h_2 - \frac{|t_2|-1}{2}}} \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} S(z; \tau, \chi) - S(w; \tau, \chi).$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode du point selle à la fonction $S(\cdot; \tau, \chi)$. Pour cela nous devons trouver ses points critiques. En remarquant que $\text{dilog}'(1-z) = -\ln(1-z)/z$, on a

$$\frac{d}{dz}S(z; \tau, \chi) = \frac{1}{z}(-\tau/2 - \chi - \ln((1-1/z)(1-e^{-\tau}z))).$$

Les points critiques de $S(\cdot; \tau, \chi)$ sont donc les racines du polynôme

$$z(e^{-\tau/2-\chi} - (1-1/z)(1-e^{-\tau}z)) = e^{-\tau/2} \left[e^{-\tau/2}z^2 + (e^{-\chi} - e^{\tau/2} - e^{-\tau/2})z + e^{\tau/2} \right].$$

Le signe du déterminant vérifie

$$\begin{aligned} \Delta < 0 &\Leftrightarrow (e^{-\chi} - e^{\tau/2} - e^{-\tau/2})^2 - 4 < 0 \\ &\Leftrightarrow |e^{-\chi} - e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}| < 2. \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, les deux racines z_c et \bar{z}_c sont complexes conjugués et vérifient $z_c \bar{z}_c = e^\tau$ correspondant au coefficient constant du polynôme unitaire. Donc les racines appartiennent au cercle γ centré en 0 de rayon $e^{\tau/2}$.

D'autre part, la partie réelle de S vérifie, pour z appartenant à γ ,

$$\begin{aligned} \Re(S(z; \tau, \chi)) &= \frac{1}{2}(S(z; \tau, \chi) + \overline{S(z; \tau, \chi)}) \\ &= \frac{1}{2}(S(z; \tau, \chi) + S(\bar{z}; \tau, \chi)) \\ &= \frac{1}{2}(S(z; \tau, \chi) + S(\frac{e^\tau}{z}; \tau, \chi)) \\ &= -(\tau/2 + \chi)(\ln(z) + \ln(\frac{e^\tau}{z})) \quad (\text{les dilogarithmes se compensent}) \\ \Re(S(z; \tau, \chi)) &= -(\tau/2 + \chi)\tau. \end{aligned}$$

Cette relation est remarquable car elle signifie que S est de partie réelle constante sur γ .

De plus, si z appartient à γ , on a

$$\ln((1-1/z)(1-e^{-\tau}z)) = \ln(e^{-2\tau}) + \ln((e^\tau - e^\tau/z)(e^\tau - z)) = -2\tau + \ln(|e^\tau - z|^2).$$

Donc en reprenant la formule ci-dessus, on obtient

$$z \frac{d}{dz}S(z; \tau, \chi) = -\tau/2 - \chi - \ln((1-1/z)(1-e^{-\tau}z)) = 3\tau/2 - \chi - \ln(|e^\tau - z|^2).$$

Ce qui donne, dans le cas où les deux racines sont complexes conjuguées,

$$\{z_c, \bar{z}_c\} = \{|z| = e^{\tau/2}\} \cap \{|z - e^\tau| = e^{3\tau/4 - \chi/2}\}.$$

Si z_c est de partie imaginaire positive, et si son argument est θ_c , on utilise la formule d'Al-Kashi sur le triangle $(0, e^\tau, z_c)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} e^{2(\tau/2)} + e^{2\tau} - 2e^{\tau/2}e^\tau \cos(\theta_c) &= e^{2(3\tau/4 - \chi/2)} \\ \cos(\theta_c) &= \frac{e^\tau + e^{2\tau} - e^{3\tau/2 - \chi}}{2e^{\tau/2}e^\tau} \\ \theta_c &= \arccos \left(\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right) - \frac{e^{-\chi}}{2} \right). \end{aligned}$$

Pour poursuivre la méthode du point selle, nous devons maintenant étudier le gradient de $\Re S$ sur γ . On a

$$\Re S(z + \epsilon) = \Re S(z) + \Re \left(\epsilon \frac{d}{dz}S(z) \right) + o(|\epsilon|).$$

Donc $\nabla(\Re S)(z)$ est dirigé vers $\overline{\frac{d}{dz}S(z)}$ et de norme $|\frac{d}{dz}S(z)|$. Or $z\frac{d}{dz}S(z; \tau, \chi)$ est réel pour z appartenant à γ . Donc $\frac{d}{dz}S(z)$ est dirigé selon \bar{z} , et donc $\frac{d}{dz}S(z)$ est dirigé selon z . On obtient alors, en normalisant,

$$\nabla(\Re S(z; \tau, \chi)) = \frac{1}{|z|^2} z \times z \frac{d}{dz} S(z), \quad z \in \gamma$$

$$\nabla(\Re S(z; \tau, \chi)) = \frac{z^2}{e^\tau} \frac{d}{dz} S(z), \quad z \in \gamma.$$

On définit, pour ϵ petit,

$$\begin{aligned} \gamma_{<} &= \{z - \epsilon \nabla(\Re S(z; \tau, \chi)) : z \in \gamma\}, \\ \gamma_{>} &= \{z + \epsilon \nabla(\Re S(z; \tau, \chi)) : z \in \gamma\}, \\ \gamma_+ &= \{z \in \gamma : z \frac{d}{dz} S(z; \tau, \chi) > 0\} = \gamma \cap \text{int}(\gamma_{>}), \\ \gamma_- &= \{z \in \gamma : z \frac{d}{dz} S(z; \tau, \chi) < 0\} = \gamma \cap \text{int}(\gamma_{<}), \end{aligned}$$

où $\text{int}(\gamma)$ désigne le domaine intérieur au contour γ ,

et γ_+ , γ_- sont orientés vers z_c .

On obtient le schéma 7 suivant (tiré de [3]) :

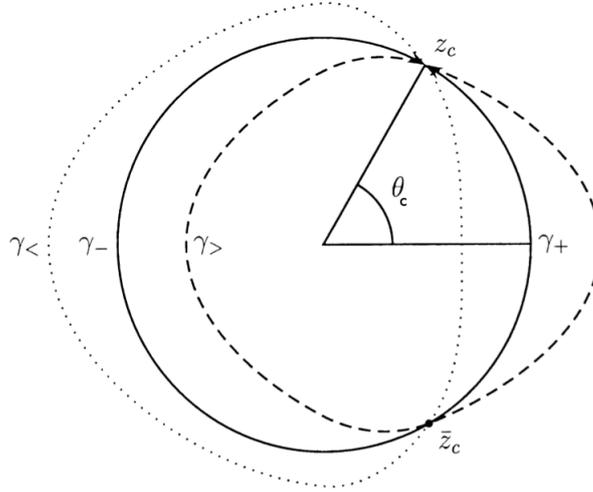


FIGURE 7 – Définition de $\gamma_{<}$, $\gamma_{>}$, γ_+ et γ_-

Maintenant, on peut calculer l'intégrale de $K_{3D}((t_i, h_i), (t_j, h_j))$. On rappelle la formule

$$K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2))(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|z|=1 \pm \epsilon} \int_{|w|=1 \mp \epsilon} \frac{1}{z-w} \frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{dw dz}{z^{h_1 + \frac{1}{2}(|t_1|+1)} w^{-h_2 - \frac{1}{2}(|t_2|-1)}}.$$

Si $t_1 \geq t_2$, comme le domaine d'intégration de z est homotope à $\gamma_{<}$ dans le domaine de définition de l'intégrande fonction de z (les pôles sont 0 et w), on a

$$K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_{<}} dz \int_{(1-\epsilon)C} dw f_z(w),$$

où C est le cercle unité et (sans oublier que $f_z(w)$ dépend de (t_1, h_1) et (t_2, h_2)) :

$$f_z(w) := \frac{1}{z-w} \frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{1}{z^{h_1 + \frac{1}{2}(|t_1|+1)} w^{-h_2 - \frac{1}{2}(|t_2|-1)}}.$$

Si l'on fixe z , il y a deux cas :

- z est à l'extérieur du domaine $\text{int}(\gamma_{>})$ délimité par $\gamma_{>}$. Dans ce cas, comme précédemment, il existe une homotopie du domaine d'intégration de w vers $\gamma_{>}$ dans le domaine de définition de l'intégrande fonction de w (les pôles sont 0 et z) donc

$$\int_{(1-\epsilon)C} dw f_z(w) = \int_{\gamma_{>}} dw f_z(w).$$

- z est dans $\text{int}(\gamma_{>})$. Dans ce cas on peut appliquer le théorème des résidus

$$\int_{\gamma_{>}} dw f_z(w) - \int_{(1-\epsilon)C} dw f_z(w) = 2i\pi \text{Res}_z(f_z(w)dw),$$

où, vue la forme de l'intégrande, le résidu en z est, pour r assez petit,

$$\begin{aligned} \text{Res}_z(f_z(w)dw) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,r)} dw f_z(w) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(z,r)} dw \frac{g_z(w)}{z-w} \\ &= -g_z(z), \end{aligned}$$

avec

$$g_z(w) = \frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{1}{z^{h_1 + \frac{1}{2}(|t_1|+1)} w^{-h_2 - \frac{1}{2}(|t_2|-1)}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Res}_z(f_z(w)dw) &= -\frac{1}{2i\pi} \frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, z)} \frac{1}{z^{h_1 + \frac{|t_1|+1}{2}} z^{-h_2 - \frac{|t_2|-1}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \frac{(q^{1/2+t_2}; q)_{\infty}}{(q^{1/2+t_1}; q)_{\infty}} \frac{1}{z^{\Delta h + \Delta t/2 + 1}} \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \prod_{n=t_2+1/2}^{t_1-1/2} (1 - q^n z) \frac{1}{z^{\Delta h + \Delta t/2 + 1}}. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \left(\int_{\gamma_{<} \setminus \text{int}(\gamma_{>})} dz \left(\int_{\gamma_{>}} dw f_z(w) \right) + \int_{\gamma_{<} \cap \text{int}(\gamma_{>})} dz \left(-\text{Res}_z(f_z(w)dw) + \int_{\gamma_{>}} dw f_z(w) \right) \right).$$

Or $\gamma_{<} \cap \text{int}(\gamma_{>})$ est homéomorphe à γ_+ dans \mathbb{C}^* on obtient finalement, en traitant de même les cas $|\gamma| \leq 1$ et $t_1 < t_2$,

$$K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2)) = \int^{(1)} + \int^{(2)},$$

où

$$\int^{(1)} = \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{\gamma_{<}} dz \int_{\gamma_{>}} dw f_z(w)$$

et

$$\int^{(2)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\pm}} \prod_{n=t_2+1/2}^{t_1-1/2} (1 - q^n z) \frac{1}{z^{\Delta h + \Delta t/2 + 1}} dz,$$

où l'on choisit γ_+ si $t_1 \geq t_2$ et γ_- sinon.

Montrons que la première intégrale tend vers 0. Pour z dans $\gamma_- \setminus \{z_c, \bar{z}_c\}$ et w dans γ_+ , par construction et comme $\Re S$ est constant sur γ , on a

$$S(z; \tau, \chi) < S(w; \tau, \chi).$$

Or, on rappelle que l'on a la convergence uniforme sur tout compact

$$r \ln \left(\frac{\Phi_{3D}(t_1, z)}{\Phi_{3D}(t_2, w)} \frac{1}{z^{h_1 + \frac{|t_1|+1}{2}} w^{-h_2 - \frac{|t_2|+1}{2}}} \right) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} S(z; \tau, \chi) - S(w; \tau, \chi).$$

Donc l'intégrande de la première intégrale tend uniformément vers 0 sur tout compact lorsque r tend vers 0^+ donc

$$\int^{(1)} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Pour la seconde intégrale, on a

$$\prod_{n=t_2+1/2}^{t_1-1/2} (1 - q^n z) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} (1 - e^{-\tau} z)^{\Delta t}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \int^{(2)} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\pm}} (1 - e^{-\tau} z)^{\Delta t} \frac{dz}{z^{\Delta h + \Delta t/2 + 1}} \\ &= \frac{e^{-\tau(\Delta h + \Delta t/2)}}{2i\pi} \int_{e^{-\tau}\gamma_{\pm}} (1 - z)^{\Delta t} \frac{dz}{z^{\Delta h + \Delta t/2 + 1}} \\ &= e^{-\tau(\Delta h + \Delta t/2)} B_{\pm}(\Delta t, \Delta h + \frac{\Delta t}{2}; z_c), \end{aligned}$$

où l'on définit la fonction bêta incomplète

$$B_{\pm}(k, l; z_c) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{z}}^z (1 - w)^k w^{-l-1} dw.$$

Le domaine d'intégration croise $]0; 1[$ si le signe est $+$ et $] - \infty; 0[$ sinon.

Nous aurons besoin de la propriété suivante pour montrer le théorème : si $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice complexe alors

$$\det(e^{-\tau((h_i - h_j) + (t_i - t_j)/2)}) M_{i,j} = \det((M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}).$$

En effet, $e^{-\tau((h_i - h_j) + (t_i - t_j)/2)} = e^{-\tau(h_i + t_i/2)} e^{\tau(h_j + t_j/2)}$. Or le premier facteur ne dépend que pas de la colonne. On peut donc sortir ce facteur du déterminant. De même, le second facteur ne dépend pas de la ligne, on peut donc le sortir aussi et le produit $e^{-\tau(h_i + t_i/2)}$ va se compenser avec le produit des $e^{\tau(h_j + t_j/2)}$ si bien que l'on retrouvera l'égalité ci-dessus.

Remarquons que si les deux racines sont réelles, la seconde intégrale n'existe pas donc

$$|e^{-x} - e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}| \geq 2 \Rightarrow K_{3D}((t_1, h_1), (t_2, h_2)) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.$$

Cette inégalité définit donc en réalité les bornes de la forme limite des partitions planes. C'est pourquoi nous allons en chercher une expression sous la forme $\chi = f(\tau)$ plus facilement exploitable.

$$\begin{aligned} |e^{-x} - e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}| < 2 &\Leftrightarrow -2 < e^{-x} - 2 \cosh(\tau/2) < 2 \\ &\Leftrightarrow 2(\cosh(\tau/2) - 1) < e^{-x} < 2(\cosh(\tau/2) + 1) \\ &\Leftrightarrow 2(2 \sinh(\tau/4)^2) < e^{-x} < 2(2 \cosh(\tau/4)^2) \\ &\Leftrightarrow -2 \ln(2 \cosh(\tau/4)) < \chi < -2 \ln(2 \sinh(\tau/4)) \end{aligned}$$

On a finalement démontré le théorème suivant :

Théorème 1. Si $U^r = \{(t_i^r, h_i^r)\}_{1 \leq i \leq n}$ tel que

$$rt_i^r \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \tau, \quad rh_i^r \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \chi, \quad 1 \leq i \leq n$$

et tel que

$$\Delta t_{i,j} = t_i^r - t_j^r, \quad \Delta h_{i,j} = h_i^r - h_j^r$$

ne dépendent pas de r , alors si l'inégalité

$$-2 \ln(2 \cosh(\tau/4)) < \chi < -2 \ln(2 \sinh(\tau/4))$$

est vérifiée alors

$$\rho(U^r) \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} \det \left[B_{\pm}(\Delta t_{i,j}, \Delta h_{i,j} + \frac{\Delta t_{i,j}}{2}; z_c) \right],$$

où $z_c = e^{-\tau/2 + i \arccos(\cosh \frac{\tau}{2} - \frac{e^{-\chi}}{2})}$ et le signe \pm est choisi si $\Delta t_{i,j} > 0$.

Si l'inégalité n'est pas vérifiée, alors

$$\rho(U^r) \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{} 0.$$

Si U est restreint à un élément (t, h) , on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1. La densité limite des tuiles horizontales est

$$\rho_*(\tau, \chi) = \frac{1}{\pi} \arccos \left(\cosh \frac{\tau}{2} - \frac{e^{-\chi}}{2} \right)$$

si l'inégalité

$$-2 \ln(2 \cosh(\tau/4)) < \chi < -2 \ln(2 \sinh(\tau/4))$$

est vérifiée, 0 sinon.

Démonstration. En effet, on a

$$\begin{aligned} \rho_*(\tau, \chi) &= B_+(0, 0; z_c) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\bar{z}_c}^{z_c} w^{-1} dw && \text{(le chemin d'intégration croise]0; 1])} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\arg(z_c) - \arg(\bar{z}_c)) \\ &= \frac{1}{\pi} \arccos \left(\cosh \frac{\tau}{2} - \frac{e^{-\chi}}{2} \right). \end{aligned}$$

□

La hauteur d'une tuile horizontale est égale au nombre de tuiles non horizontales en dessous d'elle. Si $z(\tau, \chi)$ désigne l'espérance de la hauteur dans la forme limite au point (τ, χ) , on a donc

$$z(\tau, \chi) = \int_{-\infty}^{\chi} (1 - \rho_*(\tau, s)) ds.$$

Si on pose le changement de variable

$$\theta = \pi \rho_*(\tau, s) = \arccos \left(\cosh \frac{\tau}{2} - \frac{e^{-s}}{2} \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} s &= -\ln \left(2 \left(\cosh \frac{\tau}{2} - \cos \theta \right) \right) \\ ds &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cosh \frac{\tau}{2}} d\theta, \end{aligned}$$

donc si on intègre à partir de la limite inférieure de la forme limite au lieu de $-\infty$, c'est-à-dire à partir de $\theta = \pi$, on obtient

$$z(\tau, \chi) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi \rho_*(\tau, \chi)} (\pi - \theta) \frac{\sin \theta}{\cos \theta - \cosh \frac{\tau}{2}} d\theta$$

$$\stackrel{\theta \leftarrow \pi - \theta}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi(1 - \rho_*(\tau, \chi))} \frac{\theta \sin \theta}{\cos \theta + \cosh \frac{\tau}{2}} d\theta.$$

On rappelle que $x = z - h - t/2$ et $y = z - h + t/2$, donc on obtient

$$x(\tau, \chi) = z(\tau, \chi) - \chi - \frac{\tau}{2}, \quad y(\tau, \chi) = z(\tau, \chi) - \chi + \frac{\tau}{2}.$$

En réalité, il y a convergence en probabilité. A la limite, la forme de la partition plane est la suivante :

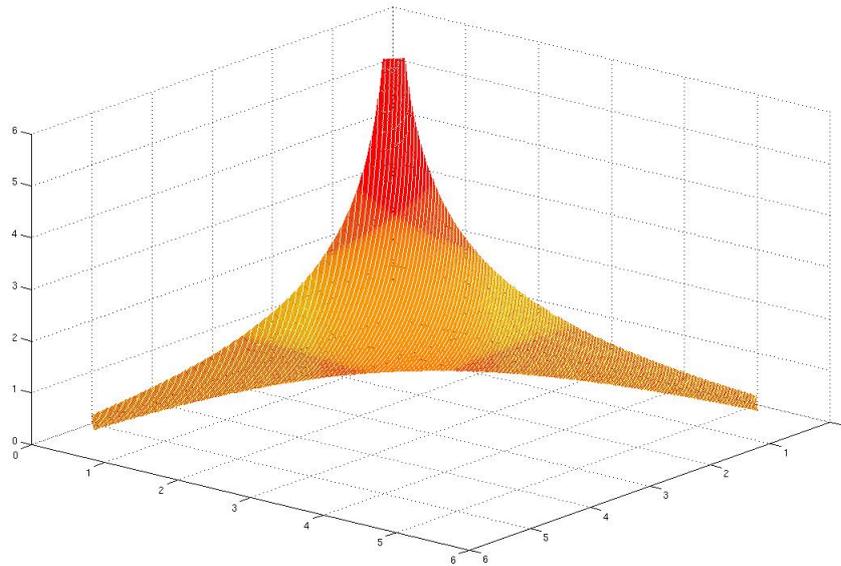


FIGURE 8 – Forme limite des partitions planes
Copyright 2011 The MathWorks, Inc.

Références

- [1] C. Krattenthaler, *Growth diagrams, and increasing and decreasing chains in fillings of Ferrers shapes*. Advances in Applied Mathematics 37, 404–431, 2006.
- [2] A. Okounkov, *Infinite wedge and random partitions*. Selecta Mathematica, New Series, No. 7, 57-81, 2001.
- [3] A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random 3-dimensional Young diagram*. Journal of the American Mathematical Society , Vol. 16, No. 3, 581-603, 2003.
- [4] R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics, vol. 2, chap. 7 Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999