Introduction au domaine de recherche

Chloé Perin

19 novembre 2005

Les questions sur lesquelles je souhaite travailler pendant ma thèse proviennent directement des travaux et des récents résultats de Sela sur le problème de Tarski dans les groupes libres. Les problèmes posés sont issus de la théorie des modèles, mais relativement peu de techniques logiques sont employées dans leur résolution. Une grande partie des idées provient de la théorie géométrique des groupes.

Dans une première partie je vais exposer le problème posé par Tarski, la seconde étant consacrée à quelques résultats intermédiaires obtenus par la théorie combinatoire des groupes. La troisième partie traite des résultats de Sela, en particulier de sa classification des groupes élémentairement équivalents aux groupes libres.

1 Le problème de Tarski

On s'intéresse ici à la théorie élémentaire des groupes, et plus particulièrement des groupes libres de type fini.

On appelle langage des groupes l'ensemble de symboles

$$L = \{=, (,), \neg, \vee, \wedge, \forall, \exists, 1, *, ^{-1}\} \cup V$$

où V est un ensemble infini dénombrable de variables. On définit l'ensemble des formules du premier ordre dans le language des groupes comme l'ensemble de toutes les suites finies de ces symboles qui sont "grammaticalement correctes" (au sens évident). On s'autorisera à utiliser des symboles de raccourcis ne figurant pas dans L comme $\rightarrow$, où $A \rightarrow B$ sera lu $B \vee \neg A$.

Une formule est dite close si toute variable x apparaissant dans la formule est liée, c'est-à-dire qu'elle est précédée d'un $\forall x$ ou d'un $\exists x$.

On dit qu'un groupe G satisfait une formule close ϕ, et on notera $G \models \phi$, si l'interprétation de cette formule est vraie dans G.

Exemple 1.1: Si ϕ est la formule $\forall x \forall y\, x * y * x^{-1} * y^{-1} = 1$, tout groupe abélien satisfait ϕ.

Remarque 1.2: On appelle formule atomique une formule de la forme $w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (formule atomique positive) ou $\neg w(x_1, \ldots, x_n) = 1$ (formule atomique négative), où $w(x_1, \ldots, x_n)$ est un mot en les variables $x_1, \ldots x_n$. On peut toujours mettre une formule sous forme normale, c'est-à-dire comme une disjonction de conjonctions de formules atomiques, précédée par des blocs de quantificateurs. On obtient donc quelque chose de la forme :

$$\forall \exists \ldots \forall \ldots \bigvee_{i=1,\ldots I} (\bigwedge_{j_i=1,\ldots J_i} (\neg) w_{i,j}(x_1, \ldots x_n)).$$

Définition 1.3: Une formule qui sous sa forme normale ne contient aucun quantificateurs $\exists$ est une formule universelle, ou formule $\forall$. Une formule existentielle (ou $\exists$) est une formule dont la forme normale ne contient aucun $\forall$. On définit de même une formule $\forall\exists$, etc. Une formule positive est une formule qui ne contient que des formules atomiques positives dans sa forme normale.

Définition 1.4: Soit G un groupe : on note T_G, et on appelle théorie élémentaire de G l'ensemble des formules closes de la logique du premier ordre qui sont satisfaites par G.

On rappelle qu'une formule de la logique du premier ordre ne nous permet de quantifier que sur les éléments (et non sur les sous-ensembles) du groupe. Ainsi certaines propriétés d'un groupe peuvent ne pas être expressible par une formule du premier ordre.

Exemple 1.5: Tout groupe abélien satisfait la formule

$$\forall x \, \forall y \, [x, y] = 1.$$

La commutativité est donc une propriété du premier ordre. Si on essaie naïvement d'exprimer le fait qu'un groupe n'est pas de torsion par une formule du premier ordre, il nous faudrait une formule du type :

$$\exists x \, (x \neq 1) \rightarrow \bigwedge_{n=1}^{\infty} (x^n \neq 1)$$

mais ceci n'est pas une formule du premier ordre, puisqu'il y apparait une conjonction infinie. Attention, cela ne prouve pas qu'aucune formule du premier ordre n'exprime le fait d'être sans torsion ! (C'est vrai mais on a besoin du théorème de compacité pour le montrer).

Définition 1.6: Deux groupes G et H sont élémentairement équivalents s'ils ont la même théorie élémentaire. On note alors $G \equiv H$.

Exemple 1.7: Soient H, G des groupes tels que $H \equiv G$.
- Si G est abélien, H l'est aussi.
- Si G est commutatif-transitif, H l'est aussi puisque tous deux satisfont la formule :

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, ([x, y] = 1 \wedge [y, z] = 1) \rightarrow [x, z] = 1$$

- Si G est fini, H l'est aussi, et de même cardinal. Ils sont en fait isomorphes, en effet on peut clairement exprimer la table de la loi de G par une formule du premier ordre que H doit satisfaire.
- Si G est sans torsion, H l'est aussi : $G \models \forall x \, x^n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc il en va de même pour H.

Le problème de Tarski est de savoir si les groupes libres de type fini sont élémentairement équivalents. Si on note $\mathbb{F}_n$ le groupe libre sur n générateurs, on veut donc voir pour quels m, n on a $\mathbb{F}_n \equiv \mathbb{F}_m$.

Remarque 1.8:
- On s'intéresse évidemment uniquement aux $\mathbb{F}_n$ pour $n \geq 2$: $F_1 = \mathbb{Z}$ est abélien, contrairement à tous les groupes libres à plus de 2 générateurs !
- Une réponse positive au probème de Tarski permet d'affirmer l'équivalence élémentaire de tous les groupes libres non-abéliens, même de rang infini.

Une autre question naturelle dans le prolongement du problème de Tarski est de s'intéresser à l'inclusion canonique de $\mathbb{F}_m$ dans $\mathbb{F}_n$ pour $m \leq n$. La question logique associée est de savoir si cette inclusion est élémentaire :

Définition 1.9: Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G. On note L_H le language usuel de la théorie des groupes auquel on a ajouté pour tout $h \in H$ une constante de nouveau notée h. On dit que l'inclusion $H \subseteq G$ est élémentaire si une formule du premier ordre dans le language L_H est satisfaite par H si et seulement si elle est satisfaite par G. On note alors $H \preceq G$.

Ceci revient à demander que H et G soient élémentairement équivalent par rapport au langage L_H, et implique l'équivalence élémentaire standard (par rapport au langage L).

2 Théorème de Merzlyakov

Les premiers résultats vers la résolution du problème de Tarski furent obtenus en théorie combinatoire des groupes. En particulier le théorème de Merzlyakov donne une réponse positive partielle au problème de Tarski puisqu'il affirme que tous les groupes libres de type fini non abéliens satisfont les même formules positives.

La preuve s'appuie sur des techniques de petites simplifications développées par Lyndon et Schupp, et permet d'obtenir d'autres résultats partiels pour le problème de Tarski.

Théorème 2.1: Soient $\mathbb{F}_m = \langle a_1, \dots a_m \rangle$ et $\mathbb{F}_n = \langle a_1, \dots a_n \rangle$, $2 \leq m \leq n$ des groupes libres de rang m et n. On a les résultats suivants.

- Toute formule $\forall\exists$ dans le langage $L_{\mathbb{F}_m}$ qui est vraie dans $\mathbb{F}_n$ est vraie dans $\mathbb{F}_m$.
- Soit ϕ une formule positive dans le langage $L_{\mathbb{F}_m}$. Alors ϕ est vraie dans $\mathbb{F}_m$ si et seulement si il existe une version de ϕ, obtenue en remplacant chaque variable x liée par un $\exists$ par un terme $\tilde{x}(a_1, \dots a_m, y_1, \dots y_l)$, qui est vraie dans $\mathbb{F}_m$. Ici les $y_1, \dots y_n$ sont les variables universellement liées qui précèdent x dans le préfixe de ϕ.
- (Théorème de Merzlyakov) Les groupes $\mathbb{F}_m$ et $\mathbb{F}_n$ satisfont les même formules positives.
- Soit ϕ une formule positive dans le langage de $\mathbb{F}_n$. Il existe un plongement de $\mathbb{F}_n$ dans $\mathbb{F}_m$ tel que $\mathbb{F}_n$ satisfait ϕ si et seulement si $\mathbb{F}_m$ satisfait ϕ.

Pour une preuve de ce théorème, voir [Sac73].

3 Les travaux de Sela

Dans une série de 7 articles intitulés "Diophantine geometry over groups", Sela développe des outils qui lui permettent de répondre de manière positive au problème de Tarski et à quelques problèmes annexes, ainsi que de donner une caractérisation des groupes de type fini élémentairement équivalents à un groupe libre.

Je ne prétends certainement pas avoir compris (ou même lu) les quelques 600 pages de sa preuve. Mon but est plutôt d'essayer d'illustrer quelques idées importantes qui y apparaissent et qui me seront probablement utiles dans la résolution du problème que Sela m'a proposé pour le début de ma thèse.

3.1 Groupes limites, diagrammes de Makanin-Razborov

Dans son premier article [Sel01], Sela s'intéresse à la résolution d'équations sur des groupes libres. Il s'appuie pour cela sur les travaux de Razborov, et de Karlampovich et Myasnikov. En ce qui concerne cette partie, j'ai plutôt suivi l'article de Champetier-Guirardel sur les groupes limites [CG05] ainsi que le Séminaire Bourbaki de Paulin [Pau03].

On se donne un groupe libre $\mathbb{F}_k$ sur k générateurs.

Définition 3.1: Un groupe E est de présentation finie s'il existe une partie génératrice S et $w_1, \dots w_l$ des mots en les éléments de S tels que E soit isomorphe à F_S/H où F_S est le groupe libre sur S et H le plus petit sous-groupe distingué de F_S contenant les w_i. On note $G = \langle s_1, \dots s_k \,|\, w_1, \dots w_l \rangle$. Les w_i sont appelés les relateurs.

Soit E un groupe de présentation finie sur les générateurs $s_1, \dots s_n$ de relateurs $w_1, \dots w_l$. On note $\Sigma(x_1, \dots x_n) = 1$ le système d'équations $w_i(x_1, \dots x_n) = 1$ pour $i = 1, \dots l$. On commence par remarquer que toute solution $a_1, \dots a_n$ de Σ sur le groupe $\mathbb{F}_k$ nous donne un morphisme du groupe E dans $\mathbb{F}_k$, défini par $s_i \mapsto a_i$. On voit donc que comprendre les solutions du système Σ sur un groupe libre revient à comprendre les morphismes d'un certain groupe de présentation finie sur ce groupe libre.

Pour cela, on va construire le diagramme de Makanin-Razborov du groupe E, qui code toutes les possibilités de morphismes de E dans un groupe libre. Ceci nécessite quelques définitions.

Décomposition JSJ d'un groupe, groupe modulaire

Ce qui suit n'est qu'un résumé rapide des idées de la décomposition JSJ. Les articles de réference sont [DS99], [RS97] et [FP98] pour la décomposition JSJ.

Etant donné un groupe G de type fini, il existe une décomposition canonique de G en produit de sous-groupes librement indécomposables (et d'un groupe libre) ; c'est le théorème de Grushko.

Théorème 3.2: Soit G un groupe de type fini. Alors il existe :
- un entier $p \in N$,
- $G_1, \ldots, G_p$ des sous-groupes de type fini non-triviaux et non isomorphes à $\mathbb{Z}$ de G, librement indécomposables dans G et bien définis à permutation et conjugaison près,
- un sous-groupe libre de type fini F de G bien défini à isomorphisme près,

tels que le morphisme naturel de $G_1 * \ldots G_p * F$ dans G soit un isomorphisme.

Rappelons qu'un groupe G est librement indécomposable s'il n'existe pas de sous-groupes non-triviaux G',G'' de G tels que G est isomorphe à $G' * G''$.

On peut donc de manière canonique dévisser G sous forme de produit libre. Le but de la décomposition JSJ est d'obtenir un tel dévissage pour des amalgames quelconques, plus précisément pour des décompositions en graphe de groupe au-dessus d'une classe de sous-groupes donnée.

Pour la notion de graphe de groupes, se réferer à [Ser83]. En voici une définition rapide sur un exemple simple.

Étant donné un groupe G agissant sur un arbre simplicial T sans inversion (aucun élément ne permute les deux sommets d'une arête), on note Γ le graphe quotient T/G et π l'application quotient. On note $S(\Gamma)$ l'ensemble des sommets de Γ et $A(\Gamma)$ l'ensemble des arêtes (ici non-orientées).

Supposons pour simplifier que le graphe quotient ne comporte que deux sommets distincts P, Q reliés par une arête y. Soit $\tilde{y}$ un relevé de y dans T, soient $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ ses extremités (on fait evidemment en sorte que $\pi(\tilde{P}) = P$). On nomme G_P,G_Q et G_y les stabilisateurs respectifs de P, Q et y dans G. Comme l'action est sans inversions, on a $G_y \subset G_P$ et $G_y \subset G_Q$. On peut alors montrer que le morphisme $G_P *_{G_y} G_Q \to G$ est en fait un isomorphisme, ce qui donne une décomposition de G en amalgame. La donnée de (Γ, G_P, G_Q, G_y) est un *graphe de groupe* (voir la figure 1). On peut étendre cette construction à un graphe quotient T/G quelqconque.

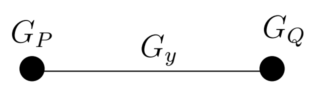

Fig. 1 – Graphe associé à un amalgame.

Exemple 3.3: Le graphe de groupes correspondant à un graphe quotient comportant un sommet P et une arête y (voir figure 2) est une décomposition HNN. On a alors deux injections ϕ et ψ de G_y dans G_P, et on note $G = G_P *_{G_y}$ le groupe correspondant. On peut lui donner la présentation suivante : $G = \langle\, G_P, t \,|\, \text{relations de } G_P,\ t\phi(b)t^{-1} = \psi(b)\ \forall b \in G_y \,\rangle$.

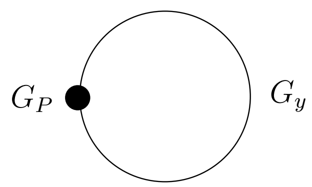

Fig. 2 – Graphe de la construction HNN.

Réciproquement, étant donné un graphe de groupes $(\Gamma, (G_P)_{P \in S(\Gamma)}, (G_y)_{y \in A^+(\Gamma)})$, on peut construire un groupe G agissant sur un arbre T avec graphe quotient T/G isomorphe à Γ tel que la construction précédente nous donne $(\Gamma, (G_P), (G_y))$ comme graphe de groupes.

Une décomposition JSJ abélienne (resp cyclique,...) d'un groupe G est une décomposition de G en graphe de groupe à stabilisateurs d'arêtes abéliens (resp cycliques,...) qui "code" toutes les décompositions de G en amalgame ou HNN au dessus d'un groupe abélien (resp cyclique,...). Pour les détails du "codage" voir les articles de référence.

L'existence d'une telle décomposition, et des résultats d'unicité, ont été prouvés par Rips et Sela pour les groupes de type fini dans le cas de stabilisateurs d'arêtes cycliques [RS97], par Fujiwara et Papasoglu [FP98] pour les groupes de type fini au dessus de groupes sveltes (slender), et par Bowditch [Bow98] dans le cas des groupes hyperboliques. Á la décomposition JSJ d'un groupe G, on associe un sous-groupe du groupe des automorphismes de G appelé le *groupe modulaire*, qui conserve la décomposition JSJ. Il contient entre autres les automorphismes intérieurs, et les twists de Dehn, définis comme suit dans le cas de notre graphe de groupe à deux sommets et une arête :

Si $G = A *_Z B$ avec Z abélien, à tout élément $z \in Z$ on associe le morphisme de groupes $\phi_z : G \mapsto G$ donné par

$$\phi_z : x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in A \\ zxz^{-1} \text{ si } x \in B \end{cases}$$

Groupes limites

C'est ici que vont intervenir certaines idées de théorie géométrique des groupes.

Définition 3.4: Un groupe marqué est la donnée (G, S) d'un groupe de type fini G et d'une partie génératrice finie S de G. Le graphe de Cayley de (G, S) est le graphe Γ d'ensemble de sommets G, où deux sommets g_1 et g_2 sont reliés par une arête si et seulement s'il existe $s \in S \cup S^{-1}$ tel que $g_1 = sg_2$. Pour éviter de noter à chaque fois $S \cup S^{-1}$, on supposera S symétrique (pour tout $s \in S$, $s^{-1} \in S$).

Si on donne à chaque arête la longueur 1, on munit le graphe de Cayley d'une métrique.

Définition 3.5: La métrique des mots sur G associée à S est telle que la distance entre deux points est le nombre minimal d'arêtes d'un chemin joignant les deux points dans le graphe de Cayley.

On suit maintenant l'approche de Champetier et Guirardel [CG05] pour définir les groupes limites et construire le diagramme de Makanin-Razborov.

Soit G_n l'ensemble des groupes marqués par n éléments. On peut également le voir comme l'ensemble des épimorphismes $\mathbb{F}_n \twoheadrightarrow G$. On munit G_n d'une topologie pour laquelle une base de voisinages pour un groupe marqué (G, S) est donnée par $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où

$$V_k = \{(G', S') \text{ tels que } B_{(G,S)}(1, k) \text{ et } B_{(G',S')}(1, k) \text{ sont isométriques en tant que graphes étiquetés}\}.$$

Ici $B_{(G,S)}(1, k)$ est la boule de centre l'élément neutre et de rayon k dans le graphe de Cayley, donc deux groupes marqués sont proches dans G_n si leurs graphes de Cayley sont similaires autour de l'élément neutre.

Cette topologie fait de G_n un espace compact et complet.

On peut alors donner la définition suivante :

Définition 3.6: Un groupe limite marqué est la limite d'une suite de groupes libres marqués (cycliques ou non) dans G_n pour un certain n.

L'ensemble des groupes limites marqués de G_n est donc l'adhérence de l'ensemble des groupes libres dans G_n, on le note L_n. On peut montrer (voir par exemple [CG05]) que le fait d'être un groupe limite est indépendant du marquage.

On peut en fait caractériser les groupes limites de plusieurs manières. Les résultats suivants sont dus à Kharlampovich et Myasnikov.

Définition 3.7: Un groupe G est multi-résiduellement libre si pour toute partie finie A de G, il existe un morphisme de G dans un groupe libre dont la restriction à A est injective.

Proposition 3.8: Soit G un groupe de type fini non abélien. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

– il existe un marquage S de G tel que (G, S) soit limite de groupes marqués libres de rang ≥ 2 ;
– G muni de n'importe quel marquage S est limite de groupes marqués libres de rang ≥ 2 ;
– G est multi-résiduellement libre ;
– G vérifie les même formules universelles qu'un groupe libre non abélien.

Il existe une version similaire de ce résultat pour G abélien.

Le quatrième point confirme l'importance des groupes limites dans la résolution du problème de Tarski.

Si $(G, S) \in \mathcal{G}_n$ est un groupe de présentation finie, il existe un voisinage de (G, S) dans $\mathcal{G}_n$ qui ne contient que des quotients de G. En effet si $G = \langle s_1, \dots s_k \,|\, w_1, \dots w_l \rangle$, soit k la longueur maximale des w_i : tout $(G', S') \in V_k(G, S)$ a une boule de centre 1 et de rayon k isomorphe à celle de (G, S), en particulier comme $w_i(s_1, \dots s_k) = 1$, $w_i(s'_1, \dots s'_k) = 1$ dans G'. Ceci montre bien que G' est un quotient de G.

Lemme 3.9: Si K est un compact de $\mathcal{G}_n$ ne contenant que des groupes de présentation finie, il existe $G_1, \dots G_l \in K$ tels que tout $(G, S) \in \mathcal{G}_n$ soit un quotient de l'un des G_i.

Démonstration. Pour tout (G, S) de K, on choisit un voisinage V_G comme ci-dessus. De ce recouvrement de K, on extrait un sous-recouvrement fini, ce qui nous donne les G_i. □

On va pouvoir appliquer ce résultat aux groupes limites grâce à un théorème difficile de Sela [Sel01], dont Guirardel a également fourni une preuve [Gui04] :

Théorème 3.10: Les groupes limites sont de présentation finie.

Revenons à notre problème initial : comprendre tous les morphismes d'un groupe E de présentation finie sur un ensemble de générateurs S dans les groupe libres. Le théorème de Nielsen-Schreier affirme que tout sous-groupe d'un groupe libre est libre. Comme E est de type fini son image est un groupe libre de type fini : il nous suffit donc de comprendre les morphismes surjectifs de E sur un groupe libre de type fini.

Posons $n = |S|$: si on note $\mathcal{G}(E)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}_n$ qui sont des quotients de E marqués par l'image des éléments de S, on voit aisément que $\mathcal{G}(E)$ est fermé dans $\mathcal{G}_n$. Les quotients limites de E forment donc un sous-ensemble $\mathcal{G}(E) \cap \mathcal{L}_n$ fermé de $\mathcal{G}_n$. L'espace $\mathcal{G}_n$ étant compact, $\mathcal{G}(E) \cap \mathcal{L}_n$ est compact, ce qui nous permet d'appliquer le lemme 3.9 pour obtenir :

Proposition 3.11: Étant donné un groupe E de présentation finie, il existe $G_1, \dots, G_k$ quotients limites de E tels que tout morphisme surjectif de E sur un groupe limite (donc en particulier sur un groupe libre) se factorise à travers l'un des G_i.

Diagramme de Makanin-Razborov

Remarquons que si la décomposition de Grushko de E est de la forme $E = E_1 * \cdots * E_j$, tout morphisme de E dans $\mathbb{F}_k$ est uniquement déterminé par ses restrictions aux E_i. On peut donc supposer E librement indécomposable. Le but maintenant est de se ramener à un cas où les G_i de la proposition 3.11 sont des quotients propres.

On peut faire agir le groupe modulaire $Mod(E)$ associé à la décomposition JSJ de E sur l'espace $\mathcal{G}(E)$ de ses quotients libres, en identifiant (F, S) quotient libre marqué de (E, T) et $\pi : E \to G$ l'application quotient. On pose pour cela $\phi \cdot \pi = \pi \circ \phi$ pour $\phi \in Mod(E)$. On note $[\pi]$ l'orbite de π. Il nous faut choisir un représentant par orbite, pour cela on introduit la longueur d'un quotient, donnée par

$$l(\pi) = \min_{R \text{ base de } F} \max_{t \in T} d_T(1, \pi(t))$$

où d_T dénote la métrique des mots associée à T sur G. On choisit comme représentants (en fait il peut y en avoir plusieurs) les morphismes d'une classe de longueur minimale.

Définition 3.12: L'ensemble des quotients raccourcissants est l'adhérence de l'ensemble des quotients de longueur minimale dans leur orbite.

Remarque 3.13:
- Tout épimorphisme de E dans un groupe libre F se factorise, à précomposition par un élément du groupe modulaire près, à travers un quotient raccourcissant.
- L'ensemble des quotients raccourcissants est fermé dans $G(E)$ donc compact. De plus c'est l'adhérence d'un ensemble de groupes libres, les quotients raccourcissants sont donc des groupes limites.

La dernière propriété des quotients raccourcissants nécessaire à la construction des diagrammes de Makanin-Razborov fait l'objet d'un (autre) théorème difficile de Sela :

Théorème 3.14: Les quotients raccourcissant sont de vrais quotients.

(Si on est prêt à admettre ce résultat, tout ce qu'on a besoin de savoir sur le groupe modulaire est que c'est un sous-groupe des automorphismes de G qui est suffisamment gros pour entrainer la propriété ci-dessus).

On déduit de tout ce qui précède (en particulier du lemme 3.9) la propriété suivante :

Proposition 3.15: Si E est un groupe de type fini librement indécomposable, et p un épimorphisme de E sur un groupe libre F, alors il existe $L_1, \ldots, L_p$ des quotients limites propres de E et ϕ un élément du groupe modulaire tels que $p \circ \phi$ se factorise à travers l'un des L_i.

Finalement on peut construire le diagramme de Makanin-Razborov d'un groupe G de type fini. C'est un arbre de racine G, d'arêtes des flèches de morphismes (montantes ou descendantes) construit par récurrence comme suit :
- si G n'est pas librement indécomposable, les branches issues de G sont des flèches descendantes des facteurs de la décomposition de Grushko de G vers G ;
- si G est librement indécomposable, les branches issues de G sont des flèches montantes de G vers ses quotients limites propres donnés par la proposition 3.15.

Enfin un tel diagramme est forcément fini, c'est la conséquence du lemme suivant (qui utilise la présentation finie des groupes limites) :

Lemme 3.16: Soit

$$G_1 \twoheadrightarrow G_2 \twoheadrightarrow \ldots G_j \twoheadrightarrow \ldots$$

une suite de quotients de groupes limites. Alors tous les morphismes sauf peut-être un nombre fini sont des isomorphismes.

On a donc réussi à coder tous les morphismes de G dans un groupe libre par un diagramme fini ! (Attention, à chaque sommet librement indécomposable on peut conjuguer par n'importe quel élément du groupe modulaire...).

3.2 Elimination des quantificateurs, équivalence élémentaire des groupes libres de type fini

Cette partie est certainement la plus technique de la preuve de Sela. Elle repose sur un procédé d'élimination des quantificateurs : par exemple, il s'agit de montrer qu'une propriété du groupe $\mathbb{F}_n$ qui s'exprime à priori par une formule $\forall\exists\forall$, peut en fait se décrire par une formule $\forall\exists$. Sela montre de plus que ce procédé de transformation des formules $\forall\exists\forall$ en formules $\forall\exists$ ne dépend pas du rang n du groupe considéré. En utilisant la proposition 2.1 qui affirme que les théories $\forall\exists$ des groupes libres de type fini sont toutes équivalentes, on peut répondre affirmativement à la question de Tarski.

Théorème 3.17: (Theorem 3 [Selb]) Deux groupes libres de type fini non abéliens sont élémentairement équivalents.

Par un argument similaire, Sela obtient également :

Théorème 3.18: L'inclusion canonique $\mathbb{F}_k \hookrightarrow F_l$ pour $k \leq l$ est une inclusion élémentaire.

3.3 Classification des modèles de la théorie des groupes libres de type fini

Sela procède ensuite dans [Selb] à une caractérisation des groupes élémentairement équivalents à un groupe libre de type fini . Il commence par chercher des conditions nécessaires : on peut par exemple exclure tous les groupes contenant un sous groupe abélien libre de rang ≥ 2 grâce à des résultats sur des groupes limites. Ensuite un tel groupe devra bien évidemment être un groupe limite, puisque les groupes limites sont exactement les groupes universellement équivalent aux groupes libres.

En appliquant le théorème suivant (voir par exemple [Pau03] corollaire 5.4), on voit qu'une condition nécessaire est que le groupe soit hyperbolique au sens de Gromov pour la métrique des mots.

Théorème 3.19: Si un groupe limite n'a pas de sous-groupe abélien libre non cyclique, alors il est hyperbolique au sens de Gromov.

Cependant les conditions ci-dessus ne forment toujours pas un ensemble de conditions suffisantes.

Pour voir cela, nous allons prendre l'exemple d'un groupe G dont la décomposition JSJ abélienne est du type décrit ci-dessous, et nous allons montrer par l'absurde qu'il ne peut pas être élémentairement équivalent à un groupe libre.

Soit G le groupe librement indécomposable donné par l'amalgame suivant $G = A *_Z B$, où Z est cyclique, abélien maximal dans A et B. On suppose de plus que cette décomposition est la décomposition JSJ abélienne de G, que A et B ne sont ni abéliens, ni des sommets de type surfaces, et que G est élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini.

Le premier étage du diagramme de Makanin-Razborov associé à G est de la forme :

$$\begin{tikzcd}
L_1 & L_2 & \cdots & L_s \\
 & & G \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où $L_1, \ldots, L_s$ sont des groupes limites qui sont des quotients propres de G. Comme G est élémentairement équivalent à un groupe libre, c'est un groupe limite, qui est donc de présentation finie (d'après [Sel01]). On s'en donne une présentation :

$$G = \langle\, g_1 \ldots g_l \,|\, r_1 \ldots r_k \,\rangle$$

pour laquelle on suppose que $g_1, \ldots, g_j \in A$ et $g_{j+1}, \ldots, g_l \in B$ (on peut voir qu'une telle présentation existe dès que C est de type fini). On note Σ_G le système fini d'équations associé, c'est-à-dire que

$$\Sigma_G = \{r_i(x_1, \ldots x_l) = 1\}.$$

On adoptera les raccourcis $\Sigma_G(x_1, \ldots, x_l) = 1$ et $\Sigma_G(x_1, \ldots, x_l) \neq 1$ pour dénoter les formules

$$\bigwedge_{m=1}^{k} r_m(x_1, \ldots, x_l) = 1 \text{ et } \bigvee_{m=1}^{k} r_m(x_1, \ldots, x_l) \neq 1$$

respectivement. Soit z un générateur de Z, on note $w_0(x_1, \ldots x_l)$ un mot en les $x_1, \ldots x_n$ tel que $z = w_0(g_1, \ldots g_l)$.

On se donne de même des systèmes d'équations $\Sigma_{L_1}, \ldots \Sigma_{L_l}$ correspondant à des présentations des groupes limites $L_1, \ldots L_s$ sur des générateurs images des générateurs $g_1, \ldots, g_l$ par l'application quotient. On utilisera également les raccourcis $\Sigma_{L_i}(x_1, \ldots, x_l) = 1$ et $\Sigma_{L_i}(x_1, \ldots, x_l) \neq 1$.

Une solution de Σ_G sur $\mathbb{F}_n$ (resp. G) donne un morphisme de G dans $\mathbb{F}_n$ (resp. un endomorphisme de G). En particulier, la solution canonique $(g_1, \ldots, g_l)$ sur G donne l'identité, qui ne se factorise à travers aucun des L_i. Au contraire, toute solution sur $\mathbb{F}_n$ donne un morphisme $G \to \mathbb{F}_n$ qui, après précomposition éventuelle par un élément du groupe modulaire de la décomposition JSJ de G, doit se factoriser à travers l'un des L_i. C'est cette propriété que nous allons essayer d'exprimer sous la forme d'une formule du premier ordre pour montrer que G et $\mathbb{F}_n$ ne sont en fait pas élémentairement équivalents.

On peut voir que le groupe modulaire de la décomposition ci-dessus ne contient que les automorphismes intérieurs et des twists de Dehn, c'est-à-dire que le groupe modulaire est engendré par les automorphismes de la forme $\gamma_u : x \mapsto uxu^{-1}$ pour un $u \in G$, et

$$\phi_t : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ txt^{-1} & \text{si } x \in B \end{cases}$$

pour un $t \in Z$.

En remarquant que pour tout $t, t' \in Z$ et $u, u' \in G$ on a

$$\begin{aligned} \phi_t \circ \gamma_u &= \gamma_{\phi_t(u)} \circ \phi_t, \\ \phi_t \circ \phi_{t'} &= \phi_{tt'} \text{ et} \\ \gamma_u \circ \gamma_{u'} &= \gamma_{uu'}, \end{aligned}$$

on peut voir que tout élément du groupe modulaire est de la forme $\gamma_u \circ \phi_t$ pour un certain $u \in G$ et un certain $t \in Z$.

On peut encore écrire :

$$\gamma_u \circ \phi_t(g_i) = w^i(u, t, g_1, \dots g_l) = \begin{cases} ug_iu^{-1} & \text{si } 1 \leq i \leq j \\ utg_it^{-1}u^{-1} & \text{si } j < i \leq l \end{cases}$$

On considère maintenant la formule suivante :

$$\psi : \forall x_1 \dots x_l \, \Sigma_G(x_1, \dots, x_l) \neq 1 \vee \theta(x_1, \dots x_l)$$

où l'on note $\theta(x_1, \dots, x_l)$ la formule

$$\exists u \, \exists t \, [t, w_0(x_1, \dots x_l)] = 1 \, \wedge \, (\bigvee_{i=1}^{s} \Sigma_{L_i}(w^1(u, t, x_1, \dots, x_l), \dots, w^l(u, t, x_1, \dots, x_l)) = 1)$$

Il reste à vérifier que cette formule est fausse sur G, mais vrai sur $\mathbb{F}_n$. On commence par remarquer que si $x_1, \dots, x_l$ sont des éléments d'un groupe H vérifiant les équations de Σ_G, et si $\alpha : G \to H$ est le morphisme donné par $g_i \mapsto x_i$, alors $\alpha \circ \gamma_v \circ \phi_s(g_i) = w^i(\alpha(v), \alpha(s), x_1, \dots x_l)$ pour tout i, et $w_0(x_1, \dots x_l) = \alpha(z)$.

Comme Σ_G est le système d'équations associé à G pour la partie génératrice $g_1, \dots g_l$ on a

$$G \nvDash \Sigma_G(g_1, \dots g_l) \neq 1.$$

Si on pose $H = G$ et $x_i = g_i \in G$, alors α n'est autre que l'identité.

Interprétons alors $\theta(g_1, \dots, g_l)$ dans G : cette formule signifie précisément qu'il existe $u \in G$ et $t \in Z$ (puisque Z est maximal abélien, et que $w_0(g_1, \dots g_l) = z$) tel que les $\alpha \circ \gamma_u \circ \phi_t(g_i)$ vérifient les équations d'au moins l'un des L_i. En d'autres termes, il existe $u \in G$ et $t \in Z$ tels que, après précomposition par $\gamma_u \circ \phi_t$, α se factorise à travers l'un des L_i. Les L_i étant des quotients propres de G, et $\alpha \circ \gamma_u \circ \phi_t = \gamma_u \circ \phi_t$ un automorphisme de G, $\theta(g_1, \dots g_l)$ est fausse sur G. Finalement, $G \nvDash \psi$.

Sur $\mathbb{F}_n$, soit $(x_1, \dots x_l)$ une solution de Σ_G, et α le morphisme $G \to \mathbb{F}_n$ correspondant. On sait qu'après précomposition par un automorphisme modulaire $\gamma_v \circ \phi_s$ (où $v \in G$ et $s \in Z$), α se factorise à travers l'un des L_i, mettons L_{i_0}. Si on note $t = \alpha(s)$ et $u = \alpha(v)$, on a bien $[t, w_0(x_1, \dots x_l)] = 1$ puisque $\alpha(s)$ et $\alpha(z) = w_0(x_1, \dots, x_l)$ commutent. Enfin les $\alpha \circ \gamma_v \circ \phi_s(g_i) = w^i(u, t, x_1, \dots x_l)$ vérifient $\Sigma_{L_{i_0}} = 1$. On a donc $\mathbb{F}_n \models \psi$ et G et $\mathbb{F}_n$ ne sont pas élémentairement équivalents.

En raffinant cet argument, Sela montre finalement le théorème suivant :

Théorème 3.20: (Théorème 6 de [Sel01]) Si G est un groupe de type fini élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini non cyclique, alors G est isomorphe à une tour de Sela hyperbolique.

La définition d'une tour de Sela hyperbolique G porte sur la décomposition JSJ abélienne de G et exclut notamment le type de cas étudié plus haut.

Enfin, en utilisant les techniques d'élimination des quantificateurs développées dans [Sel03]-[Sel05b], Sela montre que cette condition est également suffisante :

Théorème 3.21: Un groupe de type fini est élémentairement équivalent à un groupe libre de type fini si et seulement si il est isomorphe à une tour de Sela hyperbolique.

Références

[Bow98] B. Bowditch – Cut points and canonical splittings of hyperbolic groups , *Acta Math.* **180** (1998), p. 25–44.

[CG05] C. Champetier & V. Guirardel – Limit groups as limits of free groups : compactifying the set of free groups, *Israel Jour. Math* **146** (2005), p. 1–76.

[DS99] M. Dunwoody & M. Sageev – JSJ-splittings for finitely presented groups over slender groups, *Inv. Math.* **135** (1999), p. 25–44.

[FP98] K. Fujiwara & P. Papasoglu – JSJ splittings and complexes of groupes, *Prépublication Orsay* (1998).

[Gui04] V. Guirardel – Limit groups and groups acting freely on R^n-trees, *Geom. Topol.* **8** (2004), p. 1427–1470.

[Pau03] F. Paulin – Sur la théorie élémentaire des groupes libres, *Séminaire Bourbaki* **922** (2002-2003), p. 1–39.

[RS97] E. Rips & Z. Sela – Cyclic splittings of finitely presented groups and the JSJ decomposition, *Ann. Math.* **146** (1997), p. 53–104.

[Sac73] G. Sacerdote – Elementary properties of free groups, *Transactions of the American Mathematical Society* **178** (1973).

[Sela] Z. Sela – Diophantine geometry over groups V : Quantifier elimination. Part II., *GAFA.*

[Selb] — , Diophantine geometry over groups VI : The elementary theory of free groups. , *GAFA, à paraître.*

[Sel01] — , Diophantine geometry over groups I : Makanin-Razborov diagrams, *Pub. Math. IHES* **93** (2001), p. 31–105.

[Sel03] — , Diophantine geometry over groups II : Completions, closures and formal solutions. , *Israel Jour. Math* **134** (2003), p. 173–254.

[Sel04] — , Diophantine geometry over groups IV : An iterative procedure for the validation of sentence. , *Israel Jour. Math* **143** (2004), p. 1–130.

[Sel05a] — , Diophantine geometry over groups III : Rigid and solid solutions. , *Israel Jour. Math* **147** (2005), p. 1–73.

[Sel05b] — , Diophantine geometry over groups V : Quantifier elimination. Part I. , *Israel Jour. Math* **150** (2005), p. 1–198.

[Ser83] J.-P. Serre – Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1983).