

# 1 Marches aléatoires et réseaux électriques

## 1.1 Graphes et premières définitions

**Définition 1.** Un graphe  $G$  est la donnée d'un ensemble de sommets  $V$  et d'arêtes  $E$ . Les arêtes sont des paires non ordonnées de la forme  $\langle u, v \rangle$  où  $u$  et  $v$  sont deux éléments de  $V$ .

On dit pour  $u, v \in V$  que  $u$  et  $v$  sont reliés si  $\langle u, v \rangle \in E$ . On note  $u \sim v$ .

**Définition 2.** On appelle degré d'un sommet  $u$  le nombre d'arêtes reliées à  $u$ .

$$\text{deg}(u) = |\{v \in V, v \sim u\}|$$

**Définition 3.** On dit que deux sommets  $u$  et  $v$  sont connectés s'il existe un chemin allant de  $u$  à  $v$ , c'est-à-dire si on peut trouver un  $n \in \mathbb{N}^*$  tel qu'il existe  $v_1, \dots, v_n$  tels que  $v_1 = u$  et  $v_n = v$  et que pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n - 1$ , on ait  $\langle v_i, v_{i+1} \rangle \in E$ .

Un graphe est dit connexe si pour tout couple  $(u, v)$  de sommets,  $u$  et  $v$  sont connectés.

On supposera dans la suite que tous les graphes sont connexes.

**Définition 4.** Soit deux sommets  $u$  et  $v$ , on dit que  $\delta(u, v)$  est égal au nombre d'arêtes du chemin le plus court reliant  $u$  à  $v$ . C'est une distance sur l'ensemble des sommets.

**Définition 5.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe fini ou dénombrable sans boucle ni arête double où le degré de chaque sommet est fini. On définit une marche aléatoire sur  $G$  de la manière suivante : une particule se déplace de sommet en sommet du graphe. Si elle est en  $S_n$  au temps  $n$ , sa position  $S_{n+1}$  au temps  $n + 1$  est choisie uniformément parmi les voisins de  $S_n$ .

Plus généralement, pour chaque arête  $e = \langle u, v \rangle$  où  $u$  et  $v$  sont les 2 sommets reliés par l'arête  $e$ , on associe un poids  $w_{u,v}$  et on associe une probabilité de passage  $p_{u,v}$  de  $u$  à  $v$  par

$$p_{u,v} = \frac{w_{u,v}}{W_u},$$

où

$$W_u = \sum_{v \sim u} w_{u,v}.$$

**Remarque 6.** La plupart du temps, dans la suite, pour tout  $e \in E$  on prend  $w_e = 1$ , et si  $\langle, v \rangle$  n'est pas une arête on pose  $w_{\langle u, v \rangle} = 0$ .

**Remarque 7.** Si  $u$  un sommet du graphe, on note  $\mathbb{P}_u$  la loi de la marche aléatoire démarrée de  $u$ , c'est-à-dire que pour tout événement  $A$

$$\mathbb{P}_u(A) = P(A|S_0 = u).$$

## 1.2 Réseaux électriques

A partir du graphe  $G = (V, E)$  décrit précédemment, on peut construire un réseau électrique dans lequel chaque arête  $e$  a une conductance  $w_e$ . Soit  $s, t \in V$  deux sommets distincts appelés sources, on connecte un générateur de courant électrique de  $s$  à  $t$ .

Pour chaque arête  $e = \langle u, v \rangle$  on recherche une quantité  $i(u, v)$  qu'on appelle courant de  $u$  vers  $v$ . Cette quantité est antisymétrique, c'est-à-dire

$$i(u, v) = -i(v, u),$$

et doit vérifier les 2 lois suivantes.

**Loi des mailles :** Pour tout cycle  $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$  de  $G$  on a :

$$\sum_{j=1}^n \frac{i(v_j, v_{j+1})}{w_{v_j, v_{j+1}}} = 0.$$

**Loi des nœuds :** Pour tout sommet  $u$  non sommet source on a

$$\sum_{v \in V} i(u, v) = 0.$$

Ces deux lois sont appelées lois de Kirchhoff.

**Définition 8.** Soit  $s, t \in V$  avec  $s \neq t$ . Un flot de  $s$  à  $t$   $j$  est un vecteur  $j = (j(u, v) : u, v \in V, u \neq v)$ , tel que:

1.  $j(u, v) = -j(v, u)$ ,
2.  $j(u, v) = 0$  si  $u \approx v$ ,
3. pour chaque  $u \neq s, t$  on a  $\sum_{v \in V} j(u, v) = 0$ .

Les sommets  $s$  et  $t$  sont appelés "entrée" et "sortie" du flot de  $s$  à  $t$  et on parlera plus communément de flot pour un flot de  $s$  à  $t$ . Pour un flot  $j$  et un sommet  $u$ , on note :

$$J_u = \sum_{v \in V} j(u, v)$$

Par 3. on a  $J_u = 0$  pour  $u \neq s, t$ . De plus,

$$J_s + J_t = \sum_{u \in V} J_u = \sum_{u, v \in V} j(u, v) = \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V} j(u, v) + j(v, u) = 0$$

donc  $J_s = -J_t$ .

**Définition 9.** On dit que  $|J_s|$  est la taille du flot  $j$ . Si  $|J_s| = 1$ , on dit que le flot est unitaire. Quitte à échanger  $s$  et  $t$  on suppose que  $J_s > 0$ . Dans ce cas, on dit que  $j$  est un flot de  $s$  vers  $t$ .

**Définition 10.** Soit  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\phi$  est une fonction potentiel pour  $i$  si  $i$  et  $\phi$  vérifient la loi d'Ohm, c'est à dire

$$\forall u, v \in V, i(u, v) = w_{\langle u, v \rangle} (\phi(v) - \phi(u)).$$

**Remarque 11.** La loi des mailles revient à dire qu'il existe une telle fonction. La fonction potentiel est déterminé à une constante additive près, on peut donc fixer le potentiel d'un sommet.

**Théorème 1. (Principe de superposition)** Si  $i_1$  et  $i_2$  sont solutions des deux lois de Kirchhoff avec les mêmes sommets sources alors la somme  $i_1 + i_2$  l'est aussi.

*Preuve.* Le résultat est immédiat en remarquant que toutes les relations définissant  $i$  sont linéaires par rapport à  $i$ .  $\square$

On remarque que, d'après la loi des nœuds, toute solution  $i$  des lois de Kirchhoff avec l'ensemble source  $\{s, t\}$  est un flot de  $s$  à  $t$ . La suite de cette section a pour but de montrer l'existence et l'unicité d'une telle solution.

**Théorème 2.** Soit  $i_1$  et  $i_2$  deux solutions des lois de Kirchhoff avec les mêmes sources et de même taille. Alors  $i_1 = i_2$

*Preuve.* Par le principe de superposition, le flot  $j = i_1 - i_2$  satisfait les deux lois de Kirchhoff. De plus, pour le flot  $j$ , aucun courant ne rentre ni ne sort du système. Donc  $J_u = 0$  pour tout  $u \in V$ . Supposons par l'absurde que  $j_{u_1, u_2} > 0$  pour une arête  $\langle u_1, u_2 \rangle$ . Par la loi des nœuds il existe  $u_3$  tel que  $j_{u_2, u_3} > 0$ . Comme  $|V| < \infty$ , par récurrence il existe un cycle  $u_\ell, u_{\ell+1}, \dots, u_m, u_{m+1} = u_\ell$  tel que pour tout  $k = \ell, \ell + 1, \dots, m$  on ait  $j_{u_k, u_{k+1}} > 0$ . Par définition de  $\phi$ , on a

$$\phi(u_\ell) < \phi(u_{\ell+1}) < \dots < \phi(u_{m+1}) = \phi(u_\ell),$$

ce qui contredit la loi des mailles. Donc  $j(u, v) = 0$  pour tous  $u, v \in V$ .  $\square$

**Définition 12.** Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est harmonique sur  $U \subseteq V$ , si:

$$\forall u \in U, f(u) = \frac{1}{\deg(u)} \sum_{v \sim u} f(v).$$

**Proposition 13.** Supposons que pour toute arête  $(u, v)$  du graphe,  $w_{u,v} = 1$ . Alors la fonction potentiel  $\phi$  solution des lois de Kirchhoff est harmonique sur  $V \setminus \{s, t\}$ .

En effet, pour  $u \neq s, t$ , on a

$$\sum_{v \sim u} i(u, v) = 0 \quad \text{par la loi des nœuds,}$$

donc, par définition,

$$\begin{aligned} \sum_{v \sim u} \phi(v) - \phi(u) &= 0, \\ \sum_{v \sim u} \phi(v) &= \deg(u)\phi(u). \end{aligned}$$

**Proposition 14.** Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $f$  est harmonique sur  $V \setminus \{s, t\}$  alors  $f$  est la fonction potentiel d'une solution aux lois de Kirchhoff.

*Preuve.* On pose  $i(a, b) = \begin{cases} f(b) - f(a) & \text{si } b \sim a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On a  $i(a, b) = -i(b, a)$ . En effet

- si  $\langle a, b \rangle \notin E$ , alors  $i(a, b) = 0$ ,
- si  $\langle a, b \rangle \in E$ , alors  $i(a, b) = f(b) - f(a) = -(f(a) - f(b)) = -i(b, a)$ .

De plus, pour  $u \neq s, t$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V} i(u, v) &= \sum_{v \sim u} i(u, v) \\ &= \sum_{v \sim u} f(v) - f(u) \\ &= \sum_{v \sim u} f(v) - \deg(u)f(u) \\ &= 0 \quad \text{par harmonicité de } f. \end{aligned}$$

On a donc montré que  $i$  vérifie la loi des nœuds, donc  $f$  est bien fonction potentiel d'une solution des lois de Kirchhoff.  $\square$

Le théorème suivant permet d'exhiber une fonction harmonique naturelle sur le graphe  $G$  que l'on s'est donné. A l'aide de la proposition précédente, nous pouvons donc établir un parallèle entre un réseau électrique et une marche aléatoire.

**Théorème 3.** On pose  $\tau = \inf\{n \mid S_n = s \text{ ou } S_n = t\}$ .

On définit  $g(u) = \mathbb{P}_u(S_\tau = s)$  la probabilité que la marche aléatoire touche  $s$  avant  $t$  sachant que la marche débute de  $u$ . Alors  $g$  est harmonique sur  $V \setminus \{s, t\}$ .

*Preuve.* Soit  $u \in V \setminus \{s, t\}$ . Alors

$$\begin{aligned} g(u) &= \sum_{v \sim u} \mathbb{P}_u(S_1 = v, \text{ et } S \text{ touche } s \text{ avant } t) \\ &= \sum_{v \sim u} \mathbb{P}_u(S_1 = v) \times \mathbb{P}_v(S \text{ touche } s \text{ avant } t) \\ &= \frac{1}{\deg(u)} \sum_{v \sim u} g(v) \end{aligned}$$

On en déduit que  $g$  est harmonique. □

De plus, on a  $g(s) = 1$  et  $g(t) = 0$ , donc on a un courant  $J_s$  non nul dans le circuit, en effet, sinon par le théorème 2, on aurait le courant nul dans tout le circuit et donc la fonction potentiel serait constante. D'où la contradiction. Cela assure qu'il existe une solution non nulle aux lois de Kirchhoff.

**Définition 15.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe comme décrit dans la définition 5. Soient  $s, t$  deux sommets distincts et  $j$  un flot de  $s$  à  $t$ . Soient  $i$  et  $\phi$  les fonctions intensité et potentiel satisfaisant aux lois de Kirchhoff. On définit alors la résistance effective  $R_{\text{eff}}$  par la relation

$$\phi(t) - \phi(s) = R_{\text{eff}} I_s \quad \text{où} \quad I_s = \sum_{v \sim s} i(s, v)$$

Il sera utile pour la suite de rappeler les lois de base de calcul de résistances effectives.

**Résistances en série.** Deux résistances en série  $r_1$  et  $r_2$  peuvent être remplacées par une seule résistance de valeur  $r_1 + r_2$  sans changer la résistance effective.

**Résistances en parallèle.** Deux résistances en parallèle  $r_1$  et  $r_2$  peuvent être remplacées par une résistance  $R$  donnée par  $R^{-1} = r_1^{-1} + r_2^{-1}$ , sans changer la résistance effective.

### 1.3 Flot et énergie

**Définition 16.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe comme précédemment. Soient  $s, t$  deux sommets distincts et  $j$  un flot de  $s$  à  $t$ . En notant toujours  $w_e$  la conductance de l'arête  $e$ , l'énergie dissipée par  $j$  est définie par :

$$\mathcal{E}(j) = \sum_{e=\langle u,v \rangle \in E} j^2(u, v)/w_e = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V, u \sim v} j^2(u, v)/w_{\langle u,v \rangle}.$$

**Définition 17.** On définit de même l'énergie dissipée par une fonction potentiel  $\phi$  :

$$\mathcal{E}(\phi) = \sum_{e=\langle u,v \rangle \in E} w_e(\phi(v) - \phi(u))^2 = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V, u \sim v} w_{\langle u,v \rangle}(\phi(v) - \phi(u))^2.$$

On remarque que si  $\phi$  est un potentiel pour le flot  $j$ , on a  $\mathcal{E}(\phi) = \mathcal{E}(j)$ .

**Proposition 18.** Soient  $\phi$  et  $i$  satisfaisant les lois de Kirchhoff. Alors

$$\mathcal{E}(i) = [\phi(t) - \phi(s)] I_s,$$

où  $I_s = \sum_{v \sim s} i(s, v)$ .

*Preuve.* Par la loi des nœuds, il vient :

$$\begin{aligned}
(\phi(t) - \phi(s))I_s &= -(\phi(s)I_s + \phi(t)I_t) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{v \in V} \phi(v)(-I_v) - \sum_{u \in V} \phi(u)I_u \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V} (\phi(v) - \phi(u))i(u, v) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{u, v \in V, u \sim v} j^2(u, v)/w_{\langle u, v \rangle}.
\end{aligned}$$

□

On obtient donc que l'énergie dissipée par le passage du courant de  $s$  à  $t$  est égale à l'énergie dissipée dans une seule arête reliant  $s$  à  $t$  et traversée par le courant total. On peut alors relier ce résultat à la définition de la résistance effective  $R_{\text{eff}}$  via la relation

$$R_{\text{eff}} = E(i)/I_s^2 = \frac{(\phi(t) - \phi(s))^2}{\mathcal{E}(\phi)}.$$

**Théorème 4. (principe de Thomson).** On reprend les mêmes notations que précédemment. Parmi tous les flots unitaires allant de  $s$  à  $t$ , le flot  $i$  satisfaisant les lois de Kirchhoff est l'unique flot de  $s$  à  $t$  qui minimise l'énergie dissipée. Autrement dit,

$$\mathcal{E}(i) = \inf \{ \mathcal{E}(j) : j \text{ flot unitaire de } s \text{ à } t \}.$$

*Preuve.* Soit  $j$  un flot unitaire de  $s$  à  $t$  et posons  $k = i - j$ . Alors  $k$  est un flot de taille nulle. Donc avec  $e = \langle u, v \rangle$  et  $r_e = 1/w_e$ ,

$$\begin{aligned}
2\mathcal{E}(j) &= \sum_{u, v \in V} j^2(u, v)r_e \\
&= \sum_{u, v \in V} (k_{u, v} + i(u, v))^2 r_e \\
&= \sum_{u, v \in V} k_{u, v}^2 r_e + \sum_{u, v \in V} i^2(u, v)r_e + 2 \sum_{u, v \in V} i(u, v)k_{u, v}r_e
\end{aligned}$$

Soit  $\phi$  le potentiel correspondant à  $i$ . D'après la proposition 18

$$\sum_{u, v \in V} i(u, v)k_{u, v}r_e = \sum_{u, v \in V} [\phi(v) - \phi(u)]k_{u, v} = 2[\phi(t) - \phi(s)]K_s$$

, et  $K_s = 0$  par construction. On a donc bien  $\mathcal{E}(j) \geq \mathcal{E}(i)$ , avec l'égalité si et seulement si  $j = i$ . □

**Théorème 5.** Parmi toutes les fonctions  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(s) = 0$  et  $f(t) = 1$ , la fonction  $\phi$  satisfaisant les lois de Kirchhoff est l'unique fonction potentiel qui minimise l'énergie dissipée. Soit

$$\mathcal{E}(\phi) = \inf \{ \mathcal{E}(f) : f \text{ fonction potentiel tel que } f(s) = 0 \text{ et } f(t) = 1 \}$$

*Preuve.* On nomme les sommets du graphe  $v_0, \dots, v_n$  avec  $s = v_0$  et  $t = v_n$ . Ensuite on considère l'application

$$\Psi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j), v_i \sim v_j} (x_i - x_j)^2 \quad \text{avec } x_0 = 0 \text{ et } x_n = 1$$

On observe que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \Psi(x) = +\infty$  et que  $\Psi$  est continue. Elle admet donc un minimum global. De plus, on a  $\mathcal{E}(\phi) = \Psi(\phi(v_1), \dots, \phi(v_{n-1}))$ . Soit  $x = (\phi(v_1), \dots, \phi(v_{n-1}))$  le point où  $\Psi$  atteint son minimum. On sait que  $\Psi$  est différentiable donc  $\nabla \Psi(x) = 0$  donc on a pour tout  $i$  entre 1 et  $n-1$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{2} \sum_{(k,j), k \sim j} (x_k - x_j)^2 \right) = 0,$$

$$\text{donc } \sum_{j \sim i} \phi(i) - \phi(j) = 0,$$

$$\text{puis } \deg(i)\phi(i) = \sum_{j \sim i} \phi(j).$$

On en déduit que  $\phi$  est harmonique sur  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ . Donc par la proposition 14, on a que  $\phi$  est la solution des lois de Kirchhoff.  $\square$

**Remarque 19.** On peut remarquer que pour un flot unitaire  $j$  on a  $R_{\text{eff}} \leq \mathcal{E}(j)$ . Le premier principe variationnel (ou principe de Thomson) permet de majorer la résistance effective du graphe. De même, pour une fonction  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $R_{\text{eff}} \geq \frac{1}{\mathcal{E}(f)}$ . Le second principe variationnel permet de minorer la résistance effective du graphe. Ces 2 théorèmes permettent d'estimer la valeur de  $R_{\text{eff}}$ , ils ne servent pas à la calculer explicitement.

**Théorème 6. (Principe de Rayleigh).** La résistance effective  $R_{\text{eff}}$  du réseau est une fonction croissante des résistances de chaque arête.

*Preuve.* Considérons deux réseaux sur un même graphe, où les résistances respectives vérifient  $r_e \leq r'_e$  pour tout  $e$ . On note  $i$  et  $i'$  les flot unitaires respectifs satisfaisant les lois de Kirchhoff pour  $r_e$  et  $r'_e$ . On a

$$R_{\text{eff}} = E(i)/I_s^2 = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V, u \sim v} i^2(u,v)r_e.$$

De plus,

$$R_{\text{eff}} \leq \mathcal{E}(i') = \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V, u \sim v} i'^2(u,v)r_e \quad \text{par le théorème 4 (principe de Thomson).}$$

donc

$$R_{\text{eff}} \leq \frac{1}{2} \sum_{u,v \in V, u \sim v} i'^2(u,v) r'_e \quad \text{car } r_e \leq r'_e,$$

d'où  $R_{\text{eff}} \leq R'_{\text{eff}}$ . □

**Remarque 20.** Lorsque l'on dit qu'on identifie deux sommets cela veut dire qu'on ajoute une arête de résistance nulle. Autrement dit, s'il n'y avait pas d'arête entre les deux sommets, on diminue la résistance de cette arête de  $+\infty$  à 0. Si  $\langle u, v \rangle \in E$  alors identifier  $u$  et  $v$  revient à diminuer la résistance strictement positive de cette arête à 0. Par le principe de Rayleigh, identifier des sommets dans un graphe fait diminuer la résistance effective.

Par le même raisonnement, on voit qu'ajouter une arête entre deux sommets, en diminuant la résistance de ladite arête de  $+\infty$  à 1, fait diminuer la résistance effective du circuit.

## 1.4 Récurrence et résistance

Définir un réseau électrique à partir d'un graphe donné permet d'obtenir une nouvelle caractérisation de la récurrence ou de la transience d'une marche aléatoire sur ce graphe. Rappelons tout d'abord les définitions de ces deux termes.

**Définition 21.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe infini connecté dont le degré de chaque arête est fini. Soit  $S = (S_n, n \geq 0)$  une marche aléatoire sur  $G$ . On appelle  $S_0$  l'origine du graphe, aussi désignée par 0 dans la suite. On dit que  $S$  est récurrente si elle visite l'origine une infinité de fois avec probabilité 1. Si elle visite l'origine un nombre fini de fois avec probabilité 1, elle est dite transiente.

**Remarque 22.** Vu la définition qu'on en donne en partie 1.1, on admettra qu'une marche aléatoire sur  $G$  vérifie la propriété de Markov forte. Autrement dit, si  $\tau_0^n$  est l'instant du  $n$ -ème retour en 0 de la marche aléatoire, il vient que

$$\forall n \geq 1, (S_{\tau_0^n})_{k \geq 0} \stackrel{\text{loi}}{=} (S_k)_{k \geq 0}.$$

**Proposition 23.** Une marche aléatoire retourne en 0 avec probabilité 1 si et seulement si elle retourne une infinité de fois en 0 avec probabilité de 1.

*Preuve.* Avec les notations de la remarque précédente et  $q = \mathbb{P}(\tau_0^1 < \infty)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_0^n < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_0^1 < \infty) \mathbb{P}(\tau_0^n < \infty | \tau_0^1 < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\tau_0^1 < \infty) \mathbb{P}(\tau_0^{n-1} < \infty) \quad \text{par Markov forte} \\ &= q^n \end{aligned}$$

Donc si  $q = 1$ , on a que  $\mathbb{P}(\tau_0^n < \infty) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$  et la marche est récurrente. Inversement, si  $q < 1$ , on voit que  $\mathbb{P}(\tau_0^n < \infty = 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , donc

$$\text{p.s. } \exists n, \tau_0^n = \infty$$

D'où le résultat. □

Soit  $G = (V, E)$  un graphe infini connecté dont le degré de chaque arête est fini, et  $(w_e, e \in E)$  un ensemble de conductances strictement positives. On considère la marche aléatoire  $S = (S_n, n \geq 0)$  sur  $G$  avec probabilité de passage définie dans 1.1. On cherche à établir une condition sur la paire  $(G, w)$  qui est équivalent à la récurrence de  $S$ .

On définit

$$\Lambda_n = \{u \in V : \delta(0, v) \leq n\}$$

$$\text{et } \partial\Lambda_n = \Lambda_n \setminus \Lambda_{n-1} = \{u \in V : \delta(0, v) = n\} .$$

$\partial\Lambda_n$  peut être vue comme la frontière de  $\Lambda_n$ . Soit  $G_n$  le sous graphe de  $G$  fait des sommets de  $\Lambda_n$  et des arêtes les reliant. Soit  $\overline{G}_n$  le graphe obtenu à partir de  $G_n$  en identifiant tous les sommets de  $\partial\Lambda_n$  à un unique sommet  $I_n$  (voir figure 1). Ce graphe peut être considéré comme un réseau électrique de sources 0 et  $I_n$ . Soit  $R_{\text{eff}}(n)$  la résistance effective de ce réseau. Le graphe  $\overline{G}_n$  est obtenu à partir de  $\overline{G}_{n+1}$  en identifiant tous les sommets de  $\partial\Lambda_n \cup \{I_{n+1}\}$ . D'après le principe de Rayleigh,  $R_{\text{eff}}(n)$  est croissante avec  $n$ . On peut donc définir la limite suivante dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$R_{\text{eff}} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n).$$

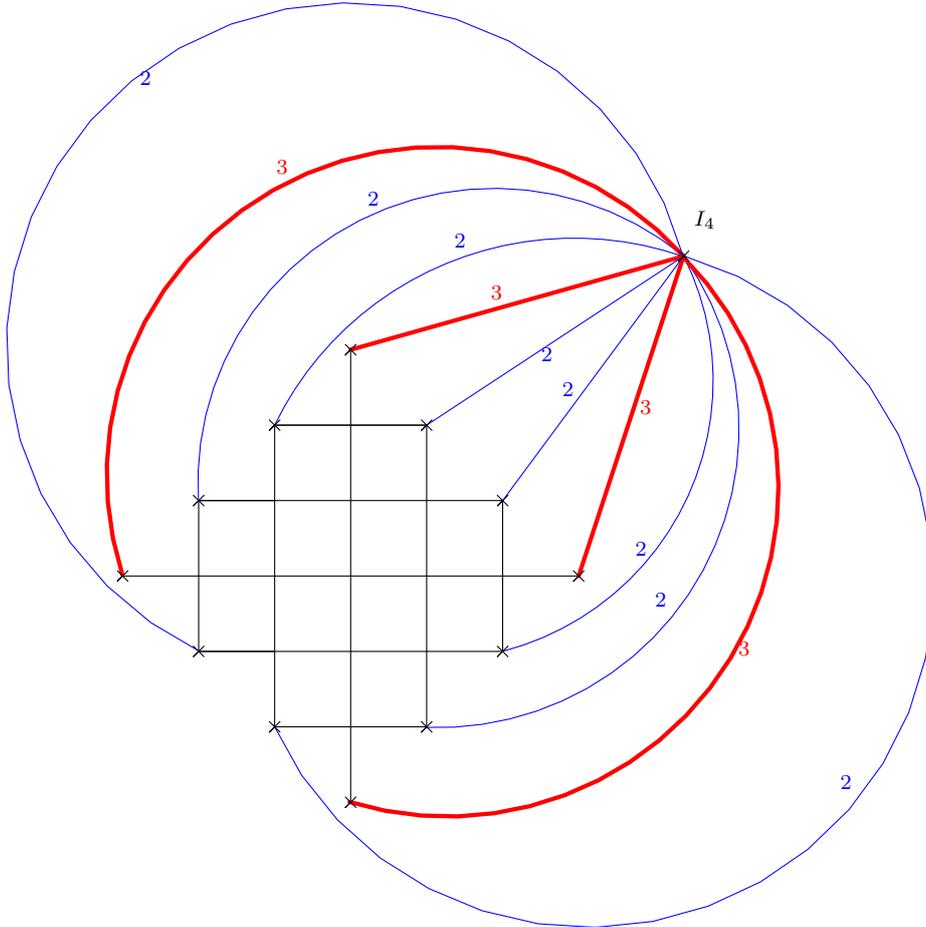


Figure 1 – Graphe équivalent  $\overline{G}_4$  du graphe  $\mathbb{L}^2$

**Théorème 7.** Soit  $\tau_0^1$  le temps de premier retour à l'origine du graphe. La probabilité de retour de  $S$  à l'origine est donnée par

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 < +\infty) = 1 - \frac{1}{W_0 R_{\text{eff}}}$$

avec  $W_0 = \sum_{v, v \sim 0} w_{\{0, v\}}$ .

*Preuve.* On a vu que pour  $v \in \Lambda_n$ ,

$$g_n(v) = \mathbb{P}_v(S \text{ atteint } \partial\Lambda_n \text{ avant } 0)$$

est l'unique fonction harmonique sur  $G_n \setminus \partial\Lambda_n = G_{n-1}$  avec pour conditions aux limites  $g_n(0) = 0$  et  $g_n(v) = 1$  pour  $v \in \partial\Lambda_n$ . On en déduit que  $g_n$  est un potentiel solution des lois de Kirchhoff sur  $\overline{G}_n$  vu comme un réseau électrique avec 0 et  $I_n$  pour sources. On note  $i(n)$  le flot solution des lois de Kirchhoff associé à la fonction potentiel.

On remarque que la marche aléatoire touche presque sûrement 0 ou  $I_n$ . En effet la fonction  $h : V \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $h(u) = \mathbb{P}_u(\text{la marche aléatoire touche } 0 \text{ ou } I_n)$  est harmonique sur  $\overline{G}_n \setminus \{0, I_n\}$ . Or, on a  $h(0) = 1$  et  $h(I_n) = 1$  donc par unicité de la solution aux lois de Kirchhoff on a  $h$  constante égale à 1. La marche aléatoire touche donc bien 0 ou  $I_n$ .

En conditionnant par le premier pas de la marche et en utilisant la loi d'Ohm,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(S \text{ revient à } 0 \text{ avant d'atteindre } \partial\Lambda_n) &= 1 - \sum_{v, v \sim 0} p_{0,v} g_n(v), \\ &= 1 - \sum_{v, v \sim 0} \frac{w_{0,v}}{W_0} (g_n(v) - g_n(0)), \\ &= 1 - \frac{|i(n)|}{W_0} \end{aligned}$$

où  $|i(n)|$  est la taille du flot  $i(n)$ . Vu les conditions aux limites portant sur  $g_n$ , on a  $|i(n)| = 1/R_{\text{eff}}(n)$ . D'où le théorème, en remarquant que par continuité de la mesure de probabilité

$$\mathbb{P}_0(S \text{ revient à } 0 \text{ avant d'atteindre } \partial\Lambda_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_0(\tau_0 < +\infty)$$

On définit un flot de 0 à l'infini comme un vecteur  $j$  vérifiant les deux premières propriétés d'un flot, et la troisième pour tout  $u$  non nul (cf définition 8).  $\square$

**Corollaire 24.** - La marche  $S$  est récurrente si et seulement si  $R_{\text{eff}} = \infty$ .

- La marche  $S$  est récurrente si et seulement si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un potentiel  $\phi$  tel que  $\phi(0) = 1$  ainsi que  $\phi(v) \xrightarrow{\partial(v,0) \rightarrow +\infty} 0$  et  $\mathcal{E}(\phi) \leq \epsilon$ .
- La marche  $S$  est transiente si et seulement s'il existe un flot  $j$  de 0 à l'infini non nul et d'énergie  $E(j) = \sum_e j_e^2/w_e$  finie.

*Preuve.* La première affirmation découle directement du théorème 7. Démontrons la deuxième, sachant que la réciproque est claire. Soit le potentiel  $\phi$  tel que  $\phi = 0$  sur  $G \setminus G_n$  et  $\phi$  solution des lois de Kirchhoff sur  $G_n$ . Comme  $S$  est récurrente, on a bien

$$\mathcal{E}(\phi) = \frac{1}{R_{\text{eff}}(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc pour  $n$  assez grand l'implication est démontrée.

Démontrons le dernier point. Soit  $i_n$  le flot unitaire solution des lois de Kirchhoff sur  $\overline{G_n}$  de source 0 et  $I_n$ , d'énergie  $E(i_n) = R_{\text{eff}}(n)$ . Soit  $i$  un flot non nul de 0 à l'infini, qu'on peut supposer unitaire. En le restreignant aux sommets de  $\overline{G_n}$ , on obtient un flot unitaire de 0 à  $I_n$ . En notant,  $E_n$  l'ensemble des arêtes de  $\overline{G_n}$ , il vient par le principe de Thomson

$$E(i_n) \leq \sum_{\langle u,v \rangle \in E_n} i^2(u,v)/w_{\langle u,v \rangle} \leq E(i).$$

Donc  $E(i) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} E(i_n) = R_{\text{eff}}$ . D'où  $E(i) = \infty$  si la marche est récurrente.

Réciproquement, supposons que la chaîne est transiente. Par extraction diagonale, il existe une sous-suite  $(n_k)$  telle que  $i_{n_k}$  converge en chaque arête vers  $j$ . Comme chaque  $i_{n_k}$  est un flot unitaire depuis l'origine,  $j$  est un flot unitaire de 0 à l'infini. Alors pour un  $m \in \mathbb{N}$

$$E(i_{n_k}) = \sum_{\langle u,v \rangle \in E} \frac{(i_{n_k}(u,v))^2}{w_{\langle u,v \rangle}} \geq \sum_{\langle u,v \rangle \in E_m} \frac{(i_{n_k}(u,v))^2}{w_{\langle u,v \rangle}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{\langle u,v \rangle \in E_m} \frac{j(e)^2}{w_{\langle u,v \rangle}} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} E(j)$$

D'où  $E(j) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n_k) = R_{\text{eff}} < \infty$  et  $j$  est bien un flot avec les propriétés requises.

□

## 1.5 Théorème de Polya

Le but de cette partie est d'utiliser le principe de modélisation de graphes par des réseaux électriques afin d'étudier des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$ . Une application intéressante de cette approche est une nouvelle démonstration du théorème de Polya.

**Définition 25.** On appelle réseau cubique en dimension  $d$ , le graphe  $G = (V, E)$  avec  $V = \mathbb{Z}^d$  et  $E = \{\langle a, b \rangle, \|b - a\|_1 = 1\}$ . On le note  $\mathbb{L}^d$ .

**Théorème 8. (de Polya)** Soit  $(S_n)$  une marche aléatoire sur  $\mathbb{L}^d$ . Elle est :

- récurrente si  $d \leq 2$ ,
- transiente si  $d \geq 3$ .

**Remarque 26.** Si  $d \leq d'$ , alors  $\mathbb{L}^d$  est un sous graphe de  $\mathbb{L}^{d'}$ . Donc par le principe de Rayleigh la résistance  $R_{\text{eff}}$  est plus petite pour  $\mathbb{L}^{d'}$  que pour  $\mathbb{L}^d$ . En effet, ajouter des arêtes signifie faire passer la résistance entre les deux points de  $l'∞$  à 1. Donc si on montre que  $(S_n)$  est récurrente sur  $\mathbb{L}^2$  et transiente sur  $\mathbb{L}^3$ , on pourra en déduire le théorème.

On commence par examiner le cas  $d = 2$ .

*Preuve. Cas  $d = 2$*

Identifier 2 sommets revient à rajouter une arête de résistance 0 entre les deux points. Ici, dans notre graphe  $\mathbb{L}^2$ , on va identifier tous les sommets de même distance à 0. Cela nous donne un graphe linéaire avec des arêtes multiples entre les points (voir la figure 2). Le graphe ainsi obtenu a donc une résistance plus faible par la remarque 20.

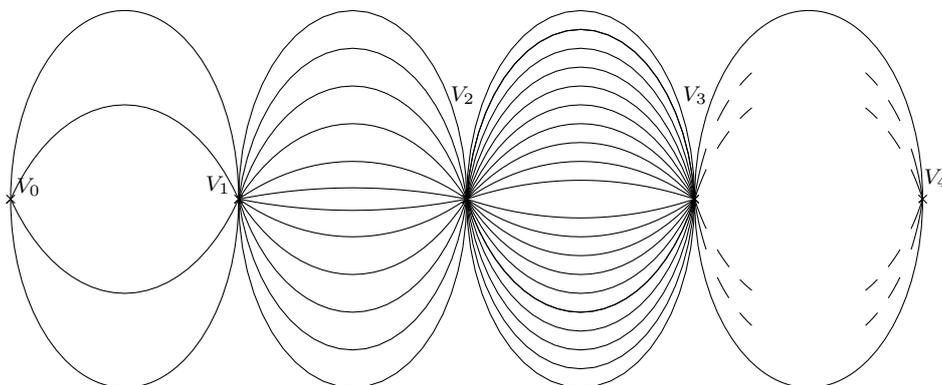


Figure 2 – Graphe obtenu après identification des sommets équidistants

Notons  $x_n$  le point situé à une distance  $n$  de 0, obtenu après l'identification des sommets situés à une distance  $n$  de 0. On doit maintenant compter le nombre d'arêtes qui relient le point  $n$  au point  $n+1$ . Tout d'abord, on a  $|\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2, |x| + |y| = n\}| = 4n$ . En effet, on a 4 points où  $x = 0$  ou  $y = 0$ , et si  $x \neq 0, n$  on a  $n-1$  choix pour  $|x|$  et ensuite il ne nous reste plus qu'à choisir le signe de  $x$  et de  $y$ . Et on a donc  $4 + 4 \times (n-1) = 4n$  points distants de  $n$  à 0 dans  $\mathbb{L}^2$ .

Comptons les arêtes reliant  $n$  à  $n+1$ , Il y a 4 points avec 3 arêtes qui relient  $n$  à  $n+1$ , les points tel que  $x = 0$  ou  $y = 0$ , les autres points (il y en a  $4(n-1)$ ) relie  $n$  à  $n+1$  avec 2 arêtes. On a donc un total de  $4 \times 3 + 4(n-1) \times 2 = 8n + 4$  arêtes qui relient  $n$  à  $n+1$ , donc la résistance équivalente entre  $n$  à  $n+1$  est égale à  $\frac{1}{8n+4}$ .

On en déduit que

$$R_{\text{eff}}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{8n+4}$$

On a donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{\text{eff}}(n) = \infty$$

Ce qui conclut. □

*Preuve. Cas  $d = 3$ .*

On cherche à montrer que la résistance équivalente est finie. On peut donc se permettre

d'enlever des arêtes de  $\mathbb{L}^3$ . Si on arrive à montrer que ce nouveau graphe a une résistance équivalente finie alors par le principe de Rayleigh, la résistance de ce nouveau graphe est plus grande que celle de  $\mathbb{L}^3$ .

On va essayer de d'extraire un sous- graphe  $G$  de  $\mathbb{L}^3$  tel que  $G$  soit de résistance finie.

### Construction du sous-graphe $G$ dans $\mathbb{L}^3$

On définit d'abord  $H_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3, x + y + z = 2^n - 1\}$ . Construisons d'abord par récurrence un sous-ensemble  $L_n$  dont les points seront les sommets de  $G$  dans  $H_n$  d'où partent de nouvelles branches.

- $L_0 = (0, 0, 0)$
- Si  $v \in L_{n-1}$ , on note  $A_v, B_v, C_v$  les 3 branches qui partent de  $v$  dans les directions  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  jusqu'à rencontrer  $H_n$ . Les 3 points d'intersection obtenus sont alors dans  $L_n$ . Ce dernier est finalement obtenu en répétant l'opération pour tout les  $v$  dans  $L_{n-1}$ .

On pose alors

$$G = \bigcup_{v \in \bigcup L_n} A_v \cup B_v \cup C_v$$

### Equivalence à un arbre ternaire

Montrons maintenant que la résistance équivalente de  $G$  est la même que celle d'un arbre à 3 ramifications, noté  $T$ , plus facile à étudier (voir figure 3).

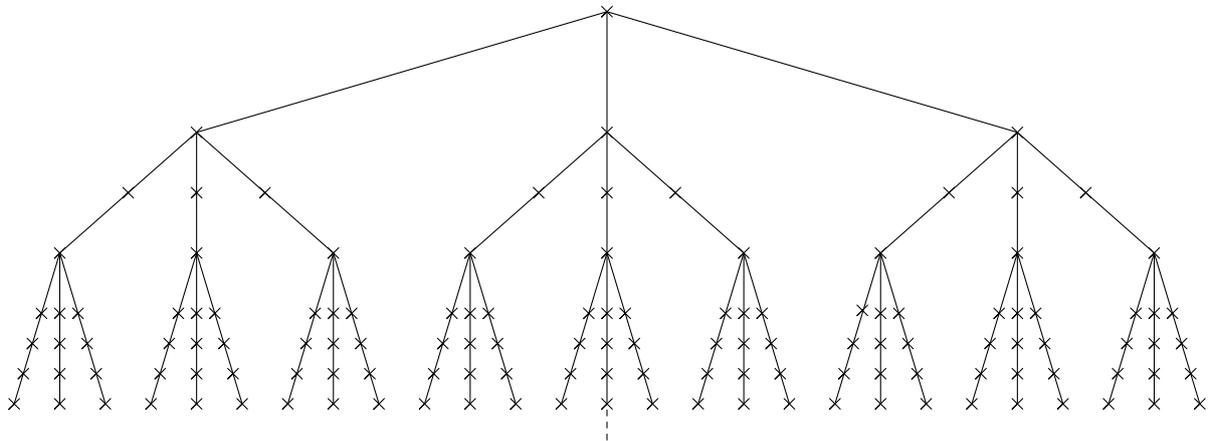


Figure 3 – L'arbre ternaire  $T$

$T$  est un arbre ternaire construit par récurrence de la manière suivante : on pose pour  $T_0$  un unique sommet. A l'étape  $n$ , l'on prolonge les  $3^n$  sommets extrémaux (en distance à 0) de  $T$  par trois branches rectilignes sans ramifications comportant  $2^n - 1$  sommets. Puis on pose  $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ .

**Lemme 27.** On peut obtenir  $G$  à partir de  $T$  en identifiant des sommets de telle manière que 2 sommets identifiés soient à la même hauteur et ne soient dans aucun  $H_n, n \in \mathbb{N}$ .

*Preuve.* Si 2 branches du sous graphe construit se croisent, vu la construction du sous graphe le point d'intersection correspond à 2 points de la même distance à 0. Et donc, si on ajoute une arête entre les 2 points, aucun courant ne passe car la valeur de  $\phi$  est la même pour les 2 points. On peut donc les identifier ou les séparer, cela nous donne le même résultat du point de vue de la résistance effective.

Montrons maintenant que les points de  $H_n$  ne sont jamais des points où deux branches se croisent. Supposons par l'absurde qu'il existe 2 branches qui se croisent dans  $H_n$ . On peut supposer que l'une est selon  $x$  et l'autre selon  $y$ . Notons  $(x, y, z)$  le point d'intersection. Comme les branches sont rectilignes et viennent toutes les deux de  $H_{n-1}$ , on a d'une part que pour la branche qui est selon  $x$ ,  $x \geq 2^{n-1}$  et d'autre part pour la branche qui vient de  $y$ ,  $y \geq 2^{n-1}$ . Alors  $x + y + z \geq 2^n$ , ce qui est absurde car  $(x, y, z) \in H_n$ .  $\square$

Par construction, on a donc que  $G$  et  $T$  ont la même résistance effective. Or, en utilisant les lois de résistances en série et en parallèle, on peut montrer par récurrence que pour  $T$

$$R_{\text{eff}}(n) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

Cette somme étant finie, cela prouve bien que  $T$  et donc  $G$  ont une résistance effective finie. Ceci achève la preuve du cas  $d = 3$ .  $\square$

## 2 Marche aléatoire sur un empilement de cercles tangents

### 2.1 Motivations et premières considérations géométriques

Nous nous intéressons désormais à des empilements de cercles tangents dans le plan. Nous verrons plus loin que sous certaines conditions, on peut associer à un empilement de cercles tangents un graphe connexe. Il est alors possible de déterminer des propriétés de l'empilement de cercles à l'aide de l'étude d'une marche aléatoire sur le graphe. Nous montrerons notamment que le caractère borné ou non de l'empilement de cercles tangents est directement lié à la récurrence ou à la transience de la marche aléatoire.

**Définition 28.** Un graphe  $G = (V, E)$  est dit planaire s'il admet un plongement dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans toute la suite, comme on considérera des empilements de cercles tangents dans le plan et des graphes sur ces cercles, on travaillera exclusivement avec des graphes planaires.

Grâce à la nature géométrique d'un empilement de cercles tangents, si on se donne un cercle complètement entouré par d'autres cercles, on peut contrôler le rapport des rayons des cercles adjacents à celui du cercle central. Cette propriété est en fait assez restrictive et nous permettra par la suite de caractériser les marches aléatoires définies sur un empilement de cercles tangents.

**Lemme 29.** Soit  $M \in \mathbb{N}$  et notons  $r_i$  le rayon du cercle  $C_i$ . Soit un ensemble de cercles  $C_0, \dots, C_m$  tel que  $C_0$  est tangent à tous les autres cercles et pour tout  $1 \leq i \leq m$  on a  $C_i$  tangent à  $C_{i+1}$  (avec  $m + 1 = 1$ ). Il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $m \leq M$ ,

$$\forall i \in [1, m], \frac{r_0}{r_i} \leq A.$$

*Preuve.* On va commencer par énoncer un lemme géométrique.

**Lemme 30.** Soit  $C_0$  un cercle de rayon 1, et  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  trois cercles tangents à  $C_0$  de rayon respectif  $r_1$ ,  $r_2$ , et  $r_3$  et tel que  $C_2$  soit tangent à  $C_1$  et  $C_3$ . On a

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, r_2 \leq \varepsilon \Rightarrow r_1 \leq \delta \text{ ou } r_3 \leq \delta.$$

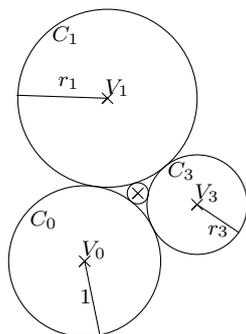


Figure 4 – Illustration du lemme dans le cas limite où  $C_1$  et  $C_3$  sont tangents

*Preuve.* Les centres des cercles  $C_0, \dots, C_3$  sont nommés  $V_0, \dots, V_3$ . On rappelle la loi d'Al-Kashi :

$$\cos(\widehat{PQR}) = \frac{PQ^2 + QR^2 - PR^2}{2PQ \times QR}$$

pour  $P, Q$  et  $R$  trois points distincts. Par l'absurde on suppose que  $r_1 > \delta$  et  $r_3 > \delta$ . Comme  $C_1$  et  $C_3$  se coupent uniquement s'ils sont tangents, on a clairement  $V_1V_3 \geq r_1 + r_3$ . Par Al-Kashi, on a

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{V_1V_0V_3}) &= \frac{V_0V_1^2 + V_0V_3^2 - V_1V_3^2}{2V_0V_1 \times V_0V_3} \\ &\leq \frac{(1 + r_1)^2 + (1 + r_3)^2 - (r_1 + r_3)^2}{2(1 + r_1) \times (1 + r_3)}. \end{aligned}$$

On définit la fonction

$$f(x, y) = \frac{(1 + x)^2 + (1 + y)^2 - (x + y)^2}{2(1 + x) \times (1 + y)}.$$

On calcule à  $y > 0$  fixé

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2(1+y)} \times \frac{(2(1+x) - 2(x+y))(1+x) - ((1+x)^2 + (1+y)^2 - (x+y)^2)}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{2(1+y)} \times \frac{(1+x)^2 - 2(x+y)(1+x) - (1+y)^2 + (x+y)^2}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{2(1+y)} \times \frac{(1+x-x-y)^2 - (1+y)^2}{(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{2(1+y)} \times \frac{(1-y)^2 - (1+y)^2}{(1+x)^2} < 0 \quad \text{car } y > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que  $f$  est décroissante en  $x$ . Comme  $f(x, y) = f(y, x)$ , on a aussi que  $f$  est décroissante en  $y$ .

On a  $\cos(\widehat{V_1V_0V_3}) \leq f(r_1, r_3)$  et  $r_1 \geq \delta$  et  $r_3 \geq \delta$  donc

$$\cos(\widehat{V_1V_0V_3}) \leq f(\delta, \delta) = \frac{2(1+\delta)^2 - 4\delta^2}{2(1+\delta)^2} = 1 - \frac{2\delta^2}{(1+\delta)^2} < 1$$

. Maintenant, nous allons minorer  $\cos(\widehat{V_1V_0V_2})$ . On a par Al-Kashi

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{V_1V_0V_2}) &= \frac{V_0V_1^2 + V_0V_2^2 - V_1V_2^2}{2V_0V_1 \times V_0V_2} \\
&= \frac{(1+r_1)^2 + (1+r_2)^2 - (r_1+r_2)^2}{2(1+r_1) \times (1+r_2)} \\
&= f(r_1, r_2).
\end{aligned}$$

On doit donc minorer  $f$ . Comme  $f$  est décroissante en  $x$  on regarde la limite de  $f$  quand  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1 + 2x + x^2 + 1 + 2y + y^2 - x^2 - 2xy - y^2}{2(1+x)(1+y)} \\
&= \frac{1 + x + y - xy}{(1+x)(1+y)} \\
&= \frac{x(1-y) + 1 + y}{(1+x)(1+y)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1-y}{1+y}
\end{aligned}$$

On a donc une minoration de  $\cos(\widehat{V_1V_0V_2})$  et également de  $\cos(\widehat{V_2V_0V_3})$  par symétrie du

problème. On en déduit une minoration de  $\cos(\widehat{V_1V_0V_3})$ .

$$\begin{aligned}
\cos(\widehat{V_1V_0V_3}) &= \cos(\widehat{V_1V_0V_2} + \widehat{V_2V_0V_3}) \\
&= \cos(\widehat{V_1V_0V_2}) \cos(\widehat{V_2V_0V_3}) - \sin(\widehat{V_1V_0V_2}) \sin(\widehat{V_2V_0V_3}) \\
&= \cos(\widehat{V_1V_0V_2}) \cos(\widehat{V_2V_0V_3}) - \sqrt{1 - \cos(\widehat{V_1V_0V_2})^2} \sqrt{1 - \cos(\widehat{V_2V_0V_3})^2} \\
&\geq \left( \frac{1-r_2}{1+r_2} \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{1-r_2}{1+r_2} \right)^2 \right) \\
&\geq 2 \left( \frac{1-r_2}{1+r_2} \right)^2 - 1 \xrightarrow{r_2 \rightarrow +\infty} 1
\end{aligned}$$

On choisit  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que  $\left( \frac{1-r_2}{1+r_2} \right)^2 - 1 > f(\delta, \delta)$  pour tout  $r_2 \geq \varepsilon$ . On a donc une contradiction. Ce qui prouve le lemme.  $\square$

Revenons sur la démonstration du lemme 29. On peut prendre le rayon de  $C_0$  égale à 1. Il reste donc à montrer que les rayons des cercles sont uniformément minorés.

Soit  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$  une suite de réels définie par  $\varepsilon_1 = \frac{1}{M}$ , et pour  $\varepsilon_i > 0$  donné on utilise le lemme 30 avec  $\delta = \varepsilon_i$ . Le lemme nous donne  $\varepsilon_{i+1} > 0$ . On peut supposer que la suite est décroissante.

Supposons que l'un des cercles ait un rayon plus petit que  $\varepsilon_M$ . On a par le lemme qu'un de ses deux voisins a un rayon plus petit que  $\varepsilon_{M-1}$ . On procède comme cela par récurrence, et on remarque que tous les cercles ont des rayons inférieurs à  $\varepsilon_1 = \frac{1}{M}$ .

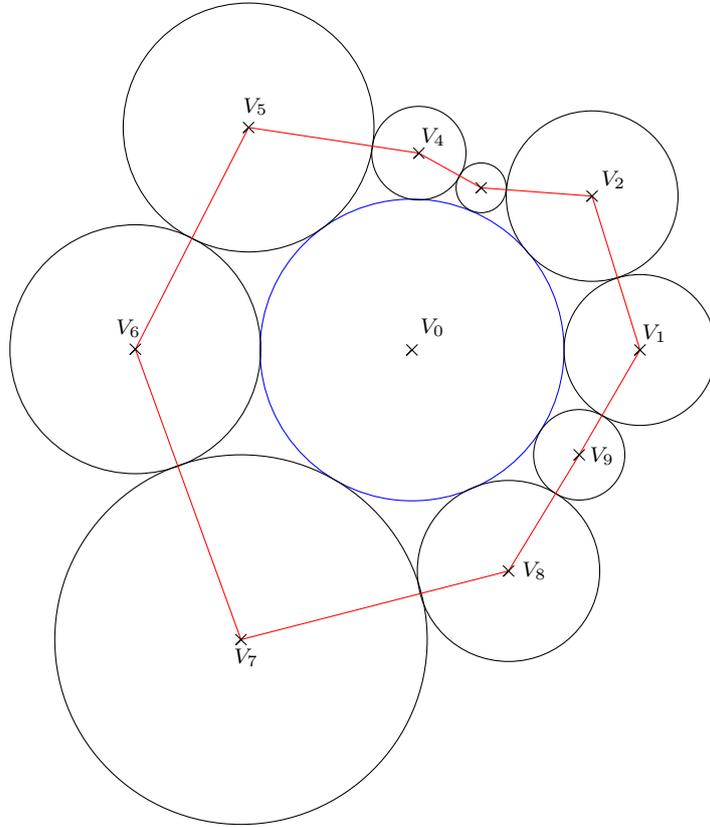


Figure 5 – Illustration du lemme

Or les cercles  $C_1, \dots, C_m$  entourent  $C_0$ , donc le périmètre du polygone formé par les sommets  $V_1, \dots, V_n$  doit être plus grand que le périmètre du cercle  $C_0$ , donc

$$2\pi \leq \sum_{i=1}^m 2r_i \leq \frac{2m}{M} \leq 2 \text{ car } m \leq M$$

Ce qui est absurde. On pose  $A = \varepsilon_M$ , qui nous donne la constante recherchée.  $\square$

Nous allons donc maintenant nous intéresser à aux marches aléatoires sur des graphes définis à partir d'empilement de cercles tangents. Pour pouvoir correctement appliquer le lemme de l'anneau sur ces graphes, il faut montrer qu'on peut les ramener à des graphes plus simples, appelés triangulations.

**Définition 31.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire connexe. On dit que  $G$  est une triangulation si tout cycle de  $G$  de quatre sommets ou plus possède une corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non adjacents du cycle. On appelle alors face de  $G$  le triangle délimité par tout cycle de trois sommets de  $G$ .

**Proposition 32.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire connexe de degré borné. Alors, quitte à rajouter des arêtes,  $G$  peut être ramené à une triangulation.

*Preuve.* En effet, si une face correspond à un cycle de plus de trois sommets, alors il suffit de relier ces sommets par un nombre fini d'arêtes de manière à obtenir plusieurs triangles.  $\square$

## 2.2 Marche aléatoire sur un empilement de cercles tangents recouvrant le plan

**Définition 33.** Soit  $G = (V, E)$  une triangulation et  $P = \{C_v, v \in V\}$  un empilement de cercles tangents correspondant à  $G$ . On définit le support de  $P$ , noté  $\text{supp}(P)$ , comme la réunion de tous les disques de  $P$  et des faces de  $G$ .

**Théorème 9.** Soit  $G = (V, E)$  une triangulation de degré borné et  $P = \{C_v, v \in V\}$  un empilement de cercles tangents tel que  $\text{supp}(P) = \mathbb{R}^2$ . Alors la marche aléatoire sur  $G$  est récurrente.

Afin de prouver ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 34.** Il existe des constantes  $A > 1$  et  $c > 0$  telles que pour tout  $R \geq 1$ , on ait :

- i) il n'y a pas d'arête reliant directement  $V_{B(0,R)}$  et  $V \setminus V_{B(0,AR)}$ , où si  $A$  est une partie du plan,  $V_A$  désigne l'ensemble des sommets contenu dans  $A$ .
- ii)  $R_{\text{eff}}(V_{B(0,R)} \leftrightarrow V_{B(0,AR)}) \geq c$ .

Nous admettons d'abord le lemme et prouvons le théorème.

*Preuve.* D'après le corollaire 24 du théorème 7, il nous suffit de montrer que le flot unitaire  $j$  allant de 0 à l'infini est d'énergie  $\mathcal{E}(j)$  infinie. On considère l'ensemble  $V_{1 \leftrightarrow A}$  des sommets  $u$  de  $G$  tels que  $C_u$  a son centre dans l'anneau délimité par  $B(0, 1)$  et  $B(0, A)$ . Cet ensemble est non vide d'après la partie *i*) du lemme. D'après le principe de Thomson, la somme des énergies des arêtes reliant les sommets de  $V_{1 \leftrightarrow A}$  à ceux de  $V_{B(0,1)}$  et de  $V \setminus V_{B(0,A)}$  est d'au moins  $c$ . On a en effet

$$R_{\text{eff}}(V_{B(0,1)} \leftrightarrow V_{B(0,A)}) = \inf\{\mathcal{E}(j) \mid j \text{ est un flot unitaire entre } V_{B(0,1)} \text{ et } V_{B(0,A)}\}.$$

D'où  $R_{\text{eff}}(V_{B(0,1)} \leftrightarrow V_{B(0,A)}) \geq c \Rightarrow \mathcal{E}(j) \geq c$ .

On considère maintenant l'ensemble des arêtes reliant les sommets de  $V_{A \leftrightarrow AR}$  à ceux de  $V_{B(0,A)}$  et de  $V \setminus V_{B(0,AR)}$ . Encore une fois, la somme des énergies de ces arêtes sera plus grande que  $c$ . Nous continuons à procéder ainsi avec des puissances de  $A$ . Il est clair, d'après la partie *i*) du lemme, que ces ensembles d'arêtes sont disjoints, ce qui montre que l'on peut ajouter les résistances en série. Alors pour atteindre une distance de  $R$  en partant de l'origine, nous devons répéter le processus un nombre de fois de l'ordre de  $\log(R)$ . Soit :

$$R_{\text{eff}}(0 \leftrightarrow V_{B(0,R)}) \geq c \log(R).$$

Donc comme  $\text{carr}(P) = \mathbb{R}^2$ , on peut faire tendre  $R$  vers l'infini dans la relation précédente, ce qui montre que  $R_{\text{eff}} = \infty$  et enfin que  $\mathcal{E}(j) = \infty$ . □

Prouvons maintenant le lemme.

*Preuve.*

- i) Supposons que le cercle  $C_0$  de centre l'origine du graphe est le cercle unité. Supposons par l'absurde qu'il existe une arête reliant  $V_{(0,1)}$  et  $V \setminus V_{B(0,AR)}$ . Cela signifie qu'il existe deux sommets  $u$  et  $v$  formant une arête  $\langle u, v \rangle$  tels que  $C_u$  a son centre  $p_u$  dans  $B(0, R)$  et que  $C_v$  a son centre en  $p_v$  avec  $\|p_v\| \geq AR$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Nécessairement, ces deux cercles sont tangents, ce qui signifie que le rayon  $r_v$  de  $C_v$  doit vérifier  $r_v \geq (A - 1)R$ . Mais comme  $C_u$  doit avoir son centre à l'intérieur de  $B(0, R)$ , on a également que  $r_u < R$ , sinon  $C_u$  intersecte forcément  $C_0$ . Des deux inégalités établies, on obtient :

$$\frac{r_v}{r_u} \geq A - 1.$$

Or, d'après le lemme de l'anneau, comme le degré de chaque arête de  $G$  est fini, si  $C_u$  et  $C_v$  sont tangents, le rapport  $\frac{r_v}{r_u}$  doit être borné supérieurement.  $A$  doit donc être borné indépendamment des arêtes.

ii) Soit  $\phi$  une fonction potentiel sur  $G$  satisfaisant aux lois de Kirchhoff. D'après le théorème 5, on sait que si  $s$  et  $t$  sont respectivement les source et sortie du graphe,

$$\mathcal{E}(\phi) = \inf \{ \mathcal{E}(f) \mid f : V \rightarrow \mathbb{R}, f(s) = 0 \text{ et } f(t) = 1 \}.$$

Or, on a aussi  $R_{\text{eff}} = E(i)/I_s^2 = \frac{(\phi(t) - \phi(s))^2}{\mathcal{E}(\phi)}$ . D'où

$$R_{\text{eff}}(s \leftrightarrow t) = \inf \{ \mathcal{E}(h) \mid h : V \rightarrow \mathbb{R}, h(t) = 1 \text{ et } h(s) = 0 \}.$$

On cherche à évaluer la résistance effective de l'anneau  $A(R, AR)$  délimité par  $B(0, R)$  et  $B(0, AR)$ . Pour tout sommet  $x$  tel que le cercle associé  $C_x$  ait son centre dans ledit anneau, on définit la fonction potentiel  $h$  sur  $G$  par :

$$h(x) = \frac{\text{dist}(x, B(0, R))}{(A-1)R}, \text{ avec } d(\cdot, \cdot) \text{ la distance euclidienne sur } \mathbb{R}^2.$$

Soit  $C_s$  un cercle de centre  $p_s \in B(0, R)$  ; on a  $h(s) = 0$ , et quitte à choisir  $A$  de sorte qu'il existe un cercle  $C_t$  de centre  $p_t \in \delta B(0, AR)$ , on a  $h(t) = 1$  avec  $t$  la sortie du réseau. On peut donc  $\mathcal{E}(h)$  pour majorer  $\mathcal{E}(\phi)$ . En utilisant l'inégalité triangulaire inversée, on montre qu'on a

$$|h(x) - h(y)| \leq \frac{\text{dist}(x, y)}{(A-1)R}.$$

En remarquant que les  $x$  et  $y$  du membre de gauche désignent des sommets du graphe alors que ceux de droite désignent le centre des cercles  $C_x$  et  $C_y$  associés. Si  $x$  et  $y$  sont voisins, alors par le lemme de l'anneau on a que  $\frac{r_y}{r_x} \leq B$ , avec  $B > 0$  une constante donnée. Alors si  $x$  et  $y$  sont voisins :

$$\text{dist}(x, y) = r_x + r_y \leq (B+1)r_x, \text{ soit } |h(x) - h(y)| \leq \frac{(B+1)r_x}{(A-1)R}.$$

Alors en notant  $M$  le nombre bornant les degrés de  $G$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(h) &\leq \sum_{x \sim y, x, y \in V_{A(R, AR)}} |h(x) - h(y)|^2 \leq \sum_{x \sim y, x, y \in V_{A(R, AR)}} \frac{(B+1)^2 r_x^2}{(A-1)^2 R^2} \\ &\leq \sum_{x \sim y, x, y \in V_{A(R, AR)}} \frac{(B+1)^2 \text{Aire}(C_x)}{(A-1)^2 \pi R^2} \\ &\leq \frac{(B+1)^2}{(A-1)^2 \pi^2 R^2} \sum_{x \in V_{A(R, AR)}} \text{deg}(x) \text{Aire}(C_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(h) &\leq \frac{(B+1)^2 M}{(A-1)^2 \pi^2 R^2} \sum_{x \in V_{A(R, AR)}} \text{Aire}(C_x) \\
&\leq \frac{(B+1)^2 M}{(A-1)^2 \pi R^2} \text{Aire}(B(0, A^2 R)) \\
&\leq \frac{(B+1)^2 M A^4}{(A-1)^2 \pi}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien majoré  $\mathcal{E}(h)$  par une constante donc minoré  $R_{\text{eff}}$ .

□

### 2.3 Marche aléatoire sur un empilement de cercles tangents contenu dans un domaine borné

**Théorème 10.** Soit  $G$  un graphe de degré borné. Supposons que  $G$  soit une triangulation. Si  $P$  est un empilement de cercle associée à  $G$  et si  $\text{supp}(P)$  est borné, alors la marche aléatoire symétrique sur  $G$  est transiente.

*Preuve.* Pour montrer que la marche est transiente, on va chercher un flot sur  $G$  d'énergie finie. Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur les marches autoévitantes (i.e. une marche qui ne passe jamais deux fois par le même sommet) partant de  $V_0$ . On pose si  $\langle u, v \rangle$  une arête

$$j(u, v) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle u, v \rangle}^{\rightarrow} - \mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle v, u \rangle}^{\rightarrow}).$$

Si  $\langle u, v \rangle$  n'est pas une arête de  $G$  on pose  $j(u, v) = 0$ .

On remarque que  $j$  est un flot. En effet, on a clairement que  $j(u, v) = -j(v, u)$  et que  $j(u, v) = 0$  si  $\langle u, v \rangle \notin E$ . Il reste seulement à vérifier que le flot  $j$  vérifie la loi des nœuds. Soit  $u$  un sommet différent de  $V_0$ , On a

$$\begin{aligned}
\sum_{v \sim u} j(u, v) &= \sum_{v \sim u} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle u, v \rangle}^{\rightarrow} - \mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle v, u \rangle}^{\rightarrow}) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{v \sim u} \mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle u, v \rangle}^{\rightarrow}) - \mathbb{E}(\sum_{v \sim u} \mathbf{1}_{\text{la marche passe par } \langle v, u \rangle}^{\rightarrow}) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\text{la marche part de } u}) - \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\text{la marche arrive en } u}) \\
&= 0 \qquad \qquad \qquad \text{car } u \neq V_0
\end{aligned}$$

On peut supposer que le rayon du cercle correspondant à  $V_0$  est 1. Comme  $\text{supp}(P)$  est borné, Pour un  $R$  suffisamment grand on a  $\text{supp}(P) \subset D(V_0, R)$ .

On choisit uniformément  $Q$  sur le cercle de centre  $V_0$  et de rayon  $R$  et on trace le segment de  $V_0$  à  $Q$ . On définit une marche sur le graphe. La marche part de  $V_0$  et passe par les sommets dont les cercles associés coupent le segment  $V_0 Q$ . Si cette marche est bien définie, elle est clairement autoévitante.

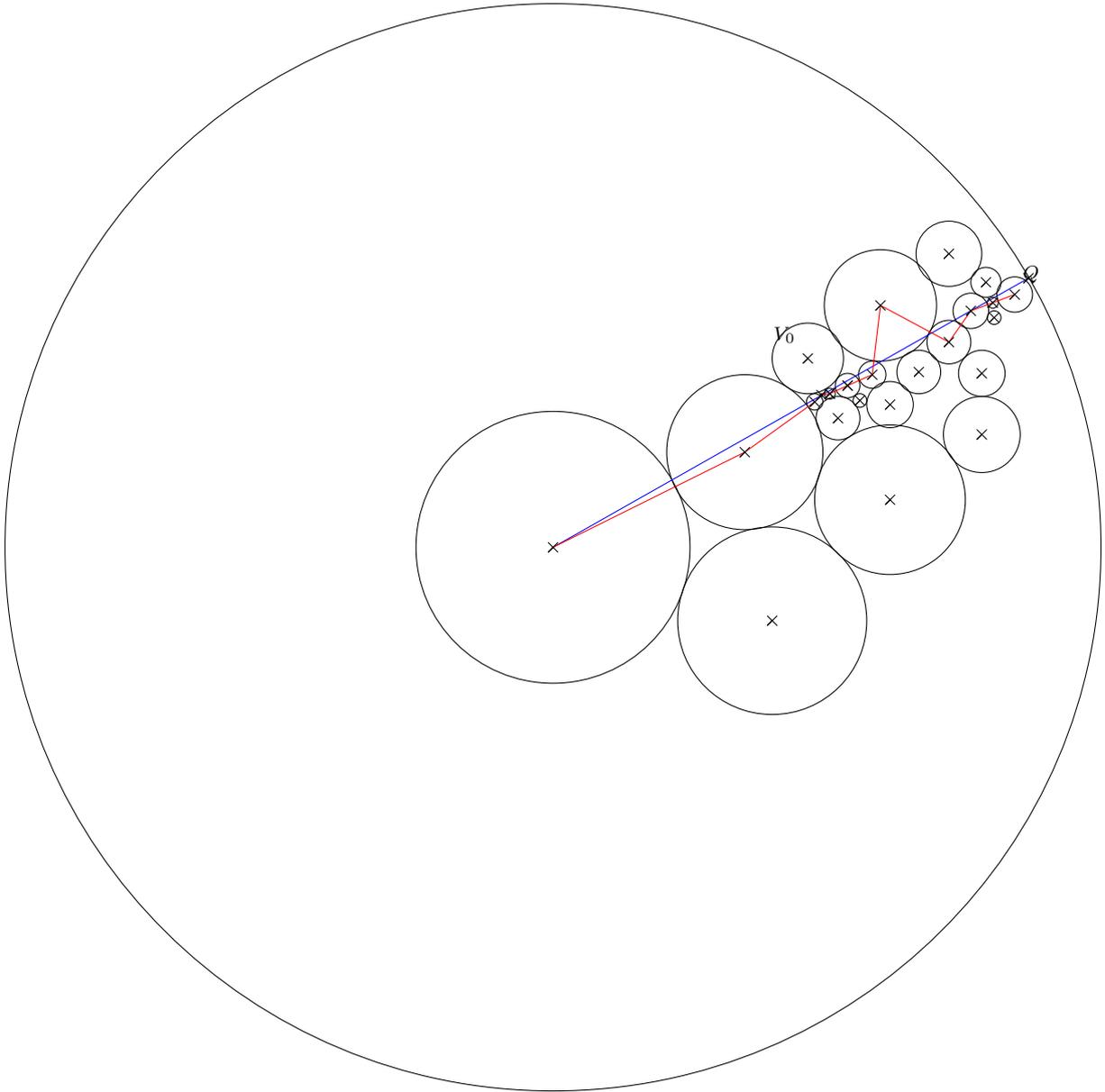


Figure 6 – illustration de la marche effectuée

Il faut montrer que si un cercle  $C_1$  coupe le segment  $V_0Q$ , alors le prochain cercle (disons  $C_2$ ) qui coupe le segment  $V_0Q$  est tangent à  $C_1$ .

Si ce n'est pas le cas, on peut créer un cycle dans le graphe qui ne se réduit pas à un cycle à 3 sommets. Pour construire ce cycle on part de  $C_1$  et on prend le cercle le plus proche du segment qui est tangent à  $C_1$ . On continue ainsi jusqu'à atteindre  $C_2$ . On crée de même un deuxième chemin de  $C_1$  vers  $C_2$  en passant par l'autre côté du segment  $V_0Q$ . Ainsi, on a un cycle d'au moins 4 sommets car  $C_1$  et  $C_2$  ne sont pas tangents, et ce cycle ne peut pas se réduire par construction. Ce qui est en contradiction avec le fait que  $G$  est une triangulation.

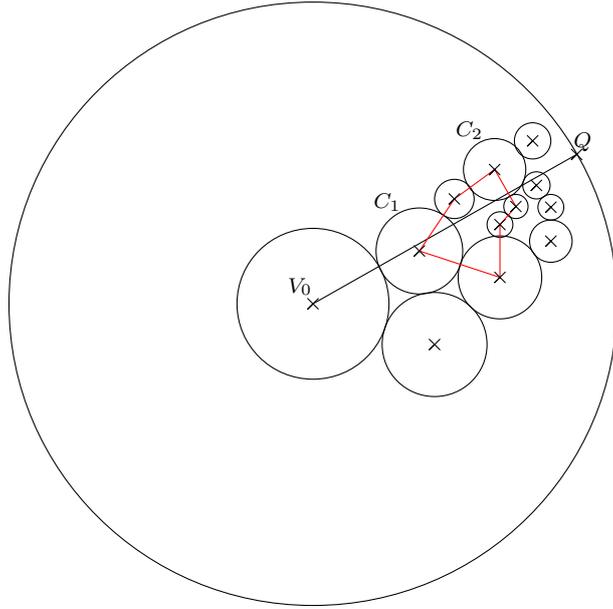


Figure 7 – empilement de cercle qui n'est pas une triangulation

Maintenant, on va majorer l'énergie de  $j$ .

On remarque tout d'abord que pour  $u \neq V_0$

$$\mathbb{P}(\text{la marche passe par le sommet } u) \leq Cr_u$$

où  $r_u$  est le rayon du cercle associé au sommet  $u$  et  $C$  une constante bien choisi.

On en déduit

$$\begin{aligned}
 E(j) &= \sum_{\langle u,v \rangle \in E} j(u,v)^2 \\
 &\leq \sum_{\langle u,v \rangle \in E} \mathbb{P}(\text{la marche passe par l'arête } \langle u,v \rangle)^2 \\
 &\leq \sum_{u \in V \setminus \{V_0\}} \text{deg}(u) \mathbb{P}(\text{la marche passe par le sommet } u)^2 \\
 &\leq M \sum_{u \in V \setminus \{V_0\}} (Cr_u)^2 \\
 &\leq MC^2 \times R^2.
 \end{aligned}$$

Ce flot d'énergie fini assure que la marche aléatoire sur le graphe  $G$  est transiente □