1

Correction du partiel de processus stochastiques du 31 mars 2010

Quasi-question de cours :

* les (X_n) sont i.i.d.
* $\mathbb{E}[|X_1|] \underset{\underset{X_1 \geq 0}{\uparrow}}{=} \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{2} \times 0 + \int y e^{-2y} dy$

$$\underset{\underset{\text{intégration par partie}}{\uparrow}}{=} \left[-y \frac{e^{-2y}}{2}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-2y}}{2} dy = 0 + \left[-\frac{e^{-2y}}{4}\right]_0^\infty = \frac{1}{4}$$

donc pour tout n, X_n est intégrable.

* De plus, on en déduit que : $\frac{2}{3} > \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{4}$.
* Par ailleurs, on voit que : $\mathbb{P}[X_1 > \frac{2}{3}] = \int_{]\frac{2}{3}, +\infty[} e^{-2y} dy > 0$.

$\rightsquigarrow$ nous pouvons donc essayer d'appliquer le théorème de Cramér.

On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\Lambda(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] e^{-\lambda \frac{2}{3}}$

$$= e^{-\lambda\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} + \int_0^\infty e^{\lambda y} e^{-2y} dy\right)$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda \geq 2 \\ e^{-\lambda\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2-\lambda}\right) & \text{si } \lambda < 2 \end{cases}$$

On voit donc que Λ est bien défini et dérivable en tout point $\lambda < 2$. On cherche un minimum global de Λ. On calcule donc sa dérivée :

$$\forall \lambda < 2, \Lambda'(\lambda) = \frac{e^{-\lambda\frac{2}{3}}}{3(2-\lambda)^2} \left[-\lambda^2 + 6\lambda - 5\right]$$

donc $\Lambda'(\lambda) \geq 0$ ssi $\underbrace{-\lambda^2 + 6\lambda - 5}_{\Delta = 16 = 4^2 \rightsquigarrow \text{2 racines : 5 et 1}} \geq 0$

donc sur $]-\infty, 2[$, ce polynôme admet une unique racine : 1

On vérifie facilement que $\Lambda'(\lambda)<0$ si $\lambda<1$ et $\Lambda'(\lambda)>0$ si $1<\lambda<2$, donc Λ admet un minimum global en 1. De plus Λ est bien défini au voisinage de 1.

Le théorème de Cramér nous permet d'affirmer que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[S_n > \frac{2}{3} n \right]^{1/n} = \Lambda(1) = \frac{3}{2} e^{-2/3}$$

<u>Erreurs à éviter dans cet exercice</u>

1) pour appliquer le théorème de Cramér, il faut s'assurer que <u>toutes</u> les hypothèses sont vérifiées. Il ne suffit pas de trouver le minimum de la fonction Λ ...

2) attention aux erreurs de calcul.

3) en particulier, certains ont calculé par erreur : $\mathbb{E}[X_1] = 1$, puis m'ont déclaré

" $\frac{2}{3} < 1 = \mathbb{E}[X_1]$, donc je peux appliquer le théorème
(erreur dans le sens de l'inégalité entre s et $\mathbb{E}[X_1]$ ...)

(double erreur
$\rightsquigarrow$ on peut s'appercevoir de la double erreur avec un peu de bon sens :

si $s < \mathbb{E}[X_1]$, alors par la loi des grands nombres on a $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1]$ ps donc en probabilité,

d'où $\mathbb{P}[S_n > ns] \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

et donc $\mathbb{P}[S_n > ns]^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, il n'y a rien à faire...

Exercice 1

1) Soit X_n la proportion de boules bleues dans l'urne après le n^e tirage, pour $n \in \{0, 1, \dots, N+M-1\}$.

$\forall n \geq N+M$, on définit par exemple $X_n = X_{N+M-1}$.

Soit $\xi_i = \mathbb{1}_{\{\text{la } i^e \text{ boule tirée est bleue}\}}$, $i \in \{1, \dots, N+N\}$

et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$.

* Montrons que $(X_n)_{n \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

↳ $\forall n \geq 0$, $0 \leq X_n \leq 1$ donc $X_n \in L^1$

↳ $\forall n \geq 0$, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable par définition de $\mathcal{F}_n$.

↳ $\forall n \geq N+M-1$, on a trivialement $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$.

$\forall n < N+M-1$, on a

$$\begin{cases} X_{n+1} = \dfrac{M - \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i}{M+N-(n+1)} = \dfrac{(M+N-n)X_n - \xi_{n+1}}{M+N-(n+1)} \\ \mathbb{P}[\xi_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n. \end{cases}$$

et donc

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \underset{\substack{\text{linéarité} \\ \text{de l'espérance} \\ \text{conditionnelle}}}{=} \frac{M+N-n}{M+N-(n+1)} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] - \frac{\mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n]}{M+N-(n+1)}$$

$$\underset{\substack{\text{car } X_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mes.} \\ \text{et } \mathbb{E}[\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n}}{=} \frac{M+N-n-1}{M+N-(n+1)} X_n = X_n$$

On en déduit que $(X_n)_{n \geq 0}$ est bien une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

* Une stratégie est la donnée d'un temps T, a priori aléatoire, auquel on dit "je parie que la prochaine boule tirée est bleue". On doit choisir de parier en connaissant uniquement le résultat des tirages

précédant le temps choisi, et avant le $M+N$ e tirage, ce qui signifie que :

$$T \leqslant M+N-1 \quad \text{et } \forall n \leq N+M-1,\ \{T=n\} \in \mathcal{F}_n .$$

On en déduit immédiatement que T est un temps d'arrêt (noter que $\forall n \geqslant N+M$, $\{T=n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$) qui est borné par $M+N-1$.

* Pour une stratégie T donnée, la probabilité de réussite est la suivante :

$$\mathbb{P}\left[\begin{array}{c}\text{succès avec la}\\ \text{stratégie } T\end{array}\right] = \mathbb{P}\left[\xi_{T+1} = 1\right] = \mathbb{E}\left[\xi_{T+1}\right]$$

$$\underset{T\leq N+M-1}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N+M-1} \mathbb{1}_{T=k}\, \xi_{k+1}\right]$$

$$\underset{\substack{\text{propriété caractéristique}\\ \text{de l'espérance conditionnelle}\\ \text{car } \{T=k\}\in\mathcal{F}_k}}{=} \sum_{k=0}^{N+M-1} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}\left[\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right]}_{=X_k} \mathbb{1}_{T=k}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{N+M-1} X_k\, \mathbb{1}_{T=k}\right] \underset{T\leq N+M-1}{=} \mathbb{E}[X_T]$$

* Or $\left.\begin{array}{l}(X_n) \text{ est une martingale}\\ T \text{ est un temps d'arrêt borné}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{d'arrêt}]{\text{théorème}} \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] = \dfrac{N}{M+N}$

<u>Rem</u> : de façon équivalente

$\left.\begin{array}{l}(X_n) \text{ est une martingale UI car } \forall n,\ 0\leq X_n \leq 1\\ T \text{ est un temps d'arrêt}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{d'arrêt}]{\text{thm}} \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0] = \dfrac{N}{M+N}$

En fait, $\left.\begin{array}{l}(X_n) \text{ martingale}\\ T \text{ temps d'arrêt}\end{array}\right\} \Longrightarrow (X_{n\wedge T})$ martingale,

puis on utilise T borné (1) ou (X_n) UI (2) pour voir que $(X_{n\wedge T})$ est UI, donc converge ps et dans L^1, et sa limite est par définition X_T, qui existe car soit $T<\infty$ ps (1), soit X_∞ est bien défini comme $\lim_{n\to\infty} X_n$ ps (2).

On en déduit que $\mathbb{E}[X_T] \underset{\text{cv } L^1}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_{n\wedge T}] \underset{(X_{n\wedge T}) \text{ mart.}}{=} \mathbb{E}[X_0]$

* Conclusion : quelle que soit la stratégie adoptée, la probabilité de réussite est $\frac{N}{M+N}$. Il n'y a donc pas de meilleure stratégie que parier dès l'instant 0 que le 1er tirage sera bleu.

<u>Erreurs à ne pas commettre sur cette question</u> :

1) dire "la probabilité de tirer une boule bleue au n^{e} tirage est X_n" :
- une probabilité est un réel dans $[0,1]$,
- X_n est une variable aléatoire manifestement non égale à une constante ps pour $n \neq 0$,

$\Rightarrow$ ces deux objets ne peuvent pas être égaux !
C'est la probabilité de cet événement <u>sachant</u> $\mathcal{F}_n$ qui est égal à X_n.

2) bien justifier que :
$\mathbb{P}\left[\begin{smallmatrix}\text{réussite avec la}\\ \text{stratégie } T\end{smallmatrix}\right] = \mathbb{E}[X_T]$.

3) ne pas massacrer les théorèmes d'arrêt pour les martingales (ceci est valable également pour la suite). En particulier, si (M_n) martingale et T temps d'arrêt, il est toujours vrai que $(M_{n \wedge T})$ est une martingale.
Par contre, $T<\infty$ ps <u>ne suffit pas</u> pour affirmer que $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$!!

2) a] Voici une méthode possible, ça n'est pas la seule :

* $\max(X,Y) = \underbrace{\max(X,Y)}_{\geq X} \mathbb{1}_{X' \geq Y'} + \underbrace{\max(X,Y)}_{\geq Y} \mathbb{1}_{Y' > X'} \geq X \mathbb{1}_{X' \geq Y'} + Y \mathbb{1}_{Y' > X'}$

donc par positivité de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}[\max(X,Y) \mid \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X' \geq Y'} + Y \mathbb{1}_{Y' > X'} \mid \mathcal{G}]$$

* De plus,

$$\mathbb{E}[X \underbrace{\mathbb{1}_{X' \geq Y'}}_{\mathcal{G}\text{-mes.}} + Y \underbrace{\mathbb{1}_{Y' > X'}}_{\mathcal{G}\text{-mes}} \mid \mathcal{G}] = \mathbb{1}_{X' \geq Y'} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + \mathbb{1}_{Y' > X'} \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$$

$$= X' \mathbb{1}_{X' \geq Y'} + Y' \mathbb{1}_{Y' > X'} = \max(X', Y')$$

Conclusion :

$$\mathbb{E}[\max(X,Y) \mid \mathcal{G}] \geq \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{X' \geq Y'} + Y \mathbb{1}_{Y' > X'} \mid \mathcal{G}] \underset{(\text{en fait } =)}{\geq} \max(X', Y')$$

Erreur très fréquente à cette question

Ce que " positivité de l'espérance conditionnelle " veut dire est la chose suivante :

soit U une variable aléatoire, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$,

si $\forall \omega \in \Omega$, $U(\omega) \geq 0$, alors $\mathbb{E}[U \mid \mathcal{G}] \geq 0$ ps.

C'est la propriété que nous avons appliquée.

Attention : en revanche, $U(\omega_0) \geq 0$ (pour un ω_0 donné, ou $\omega_0 \in A \in \mathcal{F}$) $\not\Longrightarrow \mathbb{E}[U \mid \mathcal{G}](\omega_0) \geq 0$

contre exemple : si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$

et $U(\omega) = \begin{cases} -2 & \text{si } \omega \in A, \ \mathbb{P}[A] = 1/2 \\ +1 & \text{si } \omega \in A^c \end{cases}$

alors $\forall \omega \in A^c$ (donc avec proba $1/2$), $U(\omega) \geq 0$

mais ps, $\mathbb{E}[U \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[U] < 0$.

Conséquence : il est faux d'affirmer que " sur l'événement $X' \geq Y'$, on a $X' \geq Y'$ " et tout ce qui pourrait en découler.

2) b] * $\forall n$, $\max(M_n, \tilde{M}_n) = M_n \mathbb{1}_{M_n \geq \tilde{M}_n} + \tilde{M}_n \mathbb{1}_{\tilde{M}_n > M_n}$

est $\mathcal{F}_n$-mesurable car M_n et $\tilde{M}_n$ le sont (on a noté $(\mathcal{F}_n)$ la filtration par rapport à laquelle (M_n) et $(\tilde{M}_n)$ sont des martingales).

* $\forall n$, $|\max(M_n, \tilde{M}_n)| \leq |M_n| + |\tilde{M}_n| \in L^1$

car M_n et $\tilde{M}_n$ sont intégrables

* $\forall n$, $$\mathbb{E}[\max(M_{n+1}, \tilde{M}_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \underset{2)\,a]}{\leq} \max(\underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{\substack{= M_n \\ \text{car } (M_n) \text{ mart.}}}, \underbrace{\mathbb{E}[\tilde{M}_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{\substack{= \tilde{M}_n \\ \text{car } (\tilde{M}_n) \text{ mart}}})$$

$$\leq \max(M_n, \tilde{M}_n)$$

Conclusion : $(\max(M_n, \tilde{M}_n))$ est une sous-martingale.

Attention :

il est insuffisant de vérifier seulement la dernière propriété, il faut d'abord vérifier que $\max(M_n, \tilde{M}_n) \in L^1(\mathcal{F}_n)$, $\forall n$.

2) c] $$\mathbb{E}[\hat{M}_T] \underset{T \leq n_0 \text{ ps}}{=} \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{E}[\hat{M}_k \mathbb{1}_{T=k}]$$

or $(\hat{M}_n)$ sous-martingale $\Longrightarrow \forall k \leq n_0$, $\hat{M}_k \leq \mathbb{E}[\hat{M}_{n_0} | \mathcal{F}_k]$

(cette propriété se vérifie immédiatement par récurrence).

donc $$\mathbb{E}[\hat{M}_T] = \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{E}[\hat{M}_k \mathbb{1}_{T=k}] \quad (\text{car } T \leq n_0 \text{ ps})$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n_0} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}[\hat{M}_{n_0} | \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_{T=k}]}_{\underset{\substack{\text{propriété caractéristique} \\ \text{car } \{T=k\} \in \mathcal{F}_k}}{=} \mathbb{E}[\hat{M}_{n_0} \mathbb{1}_{T=k}]}$$

$$\leq \mathbb{E}[\hat{M}_{n_0}] \quad (\text{car } T \leq n_0 \text{ ps}).$$

Erreurs fréquentes :

1) certains ont voulu utiliser le fait que :

$$\forall k \leq n_0, \quad \mathbb{E}[\hat{M}_k] \leq \mathbb{E}[\hat{M}_{n_0}]$$

(qui est plus faible que $\hat{M}_k \leq \mathbb{E}[\hat{M}_{n_0} | \mathcal{F}_k]$ ...)

et ont donc écrit :

$$\text{“} \mathbb{E}[\hat{M}_T] = \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{E}[\hat{M}_k \mathbb{1}_{T=k}] \cancel{=} \sum_{k=0}^{n_0} \mathbb{P}[T=k]\, \mathbb{E}[\hat{M}_k] \text{”}$$

etc ...

ceci est faux !

car $\mathbb{1}_{T=k}$ et $\hat{M}_k$ ne sont pas indépendants

2) j'ai rencontré plusieurs fois l'affirmation suivante :

“ $(\hat{M}_n)$ sous-martingale $\not\Longrightarrow$ $\forall k \leq n_0$, $\hat{M}_k \leq \hat{M}_{n_0}$ ps ”.

ceci est faux.

Cette implication est fausse : la suite $(\mathbb{E}[\hat{M}_n])$ est $\nearrow$ mais nous n'avons pas d'information sur une éventuelle monotonie de $(\hat{M}_n)$.

En outre, si ceci était vrai, alors une martingale serait ... une suite de variables adaptées et intégrables telle que $\forall n$, $M_n = M_0$ p.s. ! Nous ne nous donnerions pas la peine d'étudier une telle suite, toutes les propriétés annoncées étant triviales ...

2)d) * Soit X_n^A la proportion de boules bleues dans l'urne A après le n^e tirage (attention, je compte les tirages dans les urnes A et B ...) pour $n \leq 198$, et $X_n^A = X_{198}^A$ $\forall n > 198$.

Soit X_n^B —— l'urne B —— pour $n \leq 199$, et $X_n^B = X_{199}^B$ $\forall n > 199$.

Soit $\varphi_i = \mathbb{1}_{\text{la } i^e \text{ boule tirée est bleue}}$, $i \leq 200$.

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1^A, X_1^B, \dots, X_n^A, X_n^B)$, $\forall n$.

On note que
$$\mathbb{P}[\varphi_{n+1}=1 \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\varphi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \begin{cases} X_n^A & \text{si } n \text{ pair}, n\leq 199 \\ X_n^B & \text{si } n \text{ impair}, n\leq 199 \end{cases}$$
et on remarque que $X^A_{2n+1} = X^A_{2n+2}$ et $X^B_{2n} = X^B_{2n+1}$, $\forall n$.

* On montrerait exactement comme à la question 1) que (X_n^A) et (X_n^B) sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales (je ne le refais pas ici).

D'après 2) b), on en déduit que $(\max(X_n^A, X_n^B))_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-sous martingale.

* <u>idée</u> : le résultat de la question 2) c) nous suggère que la meilleure stratégie va être d'attendre "le plus possible". Attention cependant, il ne faut pas parier au temps 199 que la 200e boule tirée sera bleue : la probabilité de réussite serait $\mathbb{E}[X^B_{199}]$, et ne s'exprimerait pas à l'aide de $(\max(X_n^A, X_n^B))$. Il faut vraisemblablement décider au temps 198 de parier sur le 199e tirage ou le 200e tirage, c'est à dire sur le dernier tirage dans l'urne A ou B, en choisissant une urne qui contient une boule bleue si elle existe.

* On formalise : soit $T_0 = 198\, \mathbb{1}_{X^A_{198} \geq X^B_{198}} + 199\, \mathbb{1}_{X^B_{198} > X^A_{198}}$

(c'est exactement la stratégie qu'on vient de décrire). Calculons la probabilité de réussite de cette stratégie, et montrons qu'elle est optimale.

* $$\mathbb{P}[\text{réussite avec } T_0] = \mathbb{E}[\varphi_{T_0+1}] = \mathbb{E}\left[\varphi_{199}\, \mathbb{1}_{X^A_{198}\geq X^B_{198}} + \varphi_{200}\, \mathbb{1}_{X^B_{198} > X^A_{198}}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi_{199}\, \mathbb{1}_{X^A_{198}\geq X^B_{198}} + \varphi_{200}\, \mathbb{1}_{X^B_{198}>X^A_{198}} \mid \mathcal{F}_{198}\right]\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X^A_{198}\geq X^B_{198}}\, \mathbb{E}[\varphi_{199} \mid \mathcal{F}_{198}] + \mathbb{1}_{X^B_{198}>X^A_{198}}\, \mathbb{E}[\varphi_{200} \mid \mathcal{F}_{198}]\right]$$

or $\mathbb{E}[\xi_{199} \mid \mathcal{F}_{198}] = X^A_{198}$ et $\mathbb{E}[\xi_{200} \mid \mathcal{F}_{198}] = \mathbb{E}\big[\underbrace{\mathbb{E}[\xi_{200} \mid \mathcal{F}_{199}]}_{= X^B_{199} = X^B_{198}} \mid \mathcal{F}_{198}\big]$

$$= X^B_{198}$$

donc $\mathbb{P}[\text{réussite avec } T_0] = \mathbb{E}\left[X^A_{198}\, \mathbb{1}_{X^A_{198} \geq X^B_{198}} + X^B_{198}\, \mathbb{1}_{X^B_{198} > X^A_{198}}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\max\left(X^A_{198}, X^B_{198}\right)\right].$$

* or $X^A_{198} = \begin{cases} 0 \text{ avec proba } 1/2 \\ 1 \text{ avec proba } 1/2 \end{cases}$ par symétrie entre les boules rouges et bleues

(la dernière boule dans l'urne A est bleue avec proba $1/2$)

et X^B_{198} a même loi, et est indépendant de X^A_{198} (car les tirages sont effectués indépendemment dans l'urne A et l'urne B).

donc $\mathbb{P}[\text{réussite avec } T_e] = \mathbb{E}\left[\max\left(X^A_{198}, X^B_{198}\right)\right]$

$$= 1 - \mathbb{P}\left[\{X^A_{198} = 0\} \cap \{X^B_{198} = 0\}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

* On considère une autre stratégie, c'est à dire un autre temps d'arrêt T, tel que $T \leq 199$.

Alors $\mathbb{P}[\text{réussite avec } T] = \mathbb{E}[\xi_{T+1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{199} \mathbb{1}_{T=k}\, \xi_{k+1}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{198} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{T=k}\, \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{k+1} \mid \mathcal{F}_k]}_{\substack{= \begin{cases} X^A_k \text{ si } k \text{ pair} \\ X^B_k \text{ si } k \text{ impair} \end{cases} \\ \leq \max(X^A_k, X^B_k)}}\Big] + \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{T=199}\, \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{200} \mid \mathcal{F}_{199}]}_{\substack{= X^B_{199} \\ = X^B_{198} \\ \leq \max(X^A_{198}, X^B_{198})}}\Big]$$

on met 199 à part car X^A_{199} n'a plus vraiment de sens...

car $\{T=k\} \in \mathcal{F}_k$

$$\leq \sum_{k=0}^{198} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T=k} \max(X^A_k, X^B_k)\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{T=199} \max(X^A_{198}, X^B_{198})\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\max\left(X^A_{T'}, X^B_{T'}\right)\right]$$

où on a posé $T' = T\, \mathbb{1}_{T \leq 197} + 198\, \mathbb{1}_{T \geq 198}$

On vérifie immédiatement que T' est bien un temps d'arrêt, et

on obtient que
$$\mathbb{P}[\text{réussite avec } T] \leq \mathbb{E}[\max(X^A_{T'}, X^B_{T'})] \underset{\substack{\text{par 2) c]} \\ \text{car } T' \text{ temps d'arrêt} \leq 198}}{\leq} \mathbb{E}[\max(X^A_{198}, X^B_{198})]$$

Conclusion : la stratégie décrite par T_0 est bien optimale.

Exercice 2

$\boxed{A}$ $*$ $\forall n \geq 0$, $|S_{n\wedge T}| \underset{S_0=0}{=} \left|\sum_{k=1}^{n\wedge T} S_k - S_{k-1}\right| \leq \sum_{k=1}^{n\wedge T} \underbrace{|S_k - S_{k-1}|}_{=1} \leq n\wedge T \leq T.$

$*$ (S_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale (cf cours, ou à remontrer rapidement) et T un temps d'arrêt

$\Longrightarrow$ $(S_{n\wedge T})$ est une martingale,

donc en particulier, $\forall n \geq 0$, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[S_0] = 0$.

$*$ On suppose $\mathbb{E}[T] < \infty$: alors S_T est bien défini ($T<\infty$ ps)

$$\left.\begin{array}{l} \text{et } S_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_T \text{ p.s.} \\ \text{or } \forall n \geq 0, \ |S_{n\wedge T}| \leq T \in L^1 \end{array}\right\} \overset{\text{TCD}}{\Longrightarrow} S_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to\infty]{} S_T \text{ dans } L^1$$

donc $0 = \mathbb{E}[S_{n\wedge T}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[S_T]$

d'où $\mathbb{E}[S_T] = 0$.

Remarque : de façon équivalente, on peut dire que la martingale $(S_{n\wedge T})$ satisfait :

$\forall n \geq 0$, $|S_{n\wedge T}| \leq T \in L^1$

donc elle est UI, ce qui implique qu'elle converge ps et dans L^1 vers une limite, qui est S_T (on sait que $S_{n\wedge T} \longrightarrow S_T$ ps)

donc $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[S_T]$, et on conclut de même.

Attention :

j'insiste encore une fois : il est ~~faux~~ d'affirmer que

$$\left.\begin{array}{l}(M_n) \text{ martingale} \\ T \text{ temps d'arrêt} < \infty \text{ ps.}\end{array}\right\} \not\Longrightarrow \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$$

* On suppose $S_T \in L^1$, et $\mathbb{E}[S_T] \neq 0$.

Si on avait $\mathbb{E}[T] < \infty$, on aurait (cf. ce qu'on vient de montrer) $\mathbb{E}[S_T] = 0$, ce qui est absurde.

Donc $\mathbb{E}[T] = \infty$.

B] 1) a] * $\forall n$, $M_n = S_n^2 - n$ est $\mathcal{F}_n$-mes car S_n l'est.

* $\forall n$, $|M_n| \leq n^2 + n$ donc $M_n \in L^1$

* $\forall n$, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] - M_n$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ M_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mes.}}}{=} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - S_n^2 | \mathcal{F}_n] - 1$$

or $\mathbb{E}[(S_{n+1} - S_n)^2 | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 + S_n^2 - 2 S_n S_{n+1} | \mathcal{F}_n]$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mes}}}{=} \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] + S_n^2 - 2 S_n \underbrace{\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{\substack{= S_n \\ \text{car } (S_n) \text{ mart.}}}$$

$$= \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - S_n^2$$

$$= \mathbb{E}[S_{n+1}^2 - S_n^2 | \mathcal{F}_n]$$

d'où $\forall n$, $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] - M_n = \underbrace{\mathbb{E}[(\underbrace{S_{n+1} - S_n}_{\in \{-1, +1\}})^2 | \mathcal{F}_n]}_{= 1} - 1$

$= 1 - 1 = 0$

donc (M_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

1) b) * (M_n) martingale, T temps d'arrêt $\Big\} \Longrightarrow (M_{n\wedge T})$ martingale

donc en particulier, $\forall n$, $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = 0$

donc $\forall n$, $\mathbb{E}[S^2_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[n\wedge T]$

* D'une part, $n\wedge T \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} T$ ps

donc par TCM : $\mathbb{E}[n\wedge T] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[T]$

* D'autre part, $T<\infty$ ps dc S_T est bien défini et $S^2_{n\wedge T} \xrightarrow[n\to\infty]{} S^2_T$ ps.

or $\forall n$, $S^2_{n\wedge T} \geq 0$

donc par le lemme de Fatou, on obtient :

$$\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} S^2_{n\wedge T}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}[S^2_{n\wedge T}]}_{\substack{= \mathbb{E}[n\wedge T] \\ \downarrow n\to\infty \\ \mathbb{E}[T]}}$$

Conclusion : $\mathbb{E}[S_T^2] \leq \mathbb{E}[T]$.

* or $S_T = Y$ en loi, donc $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[Y^2]$

donc si $\mathbb{E}[Y^2] = \infty$, $\mathbb{E}[T] \geq \mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \infty$.

2) * On vérifie facilement que τ est bien un temps d'arrêt, car (S_n) est adapté à $(\mathcal{F}_n)$ et Y est $\mathcal{F}_n$-mesurable, pour tout n.

De plus $Y \in L^2$ donc $Y<\infty$ ps donc $\tau < \infty$ ps :

$$\mathbb{P}[\tau=\infty] \underset{Y<\infty \text{ ps}}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[\{|Y|=k\} \cap \{\tau=\infty\}]$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[\{|Y|=k\} \cap \{\tilde{T}_k=\infty\}] \quad \text{où } \tilde{T}_k = \inf\{n\geq 0 / |S_n|=k\}$$

$$\underset{\perp\!\!\!\perp}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[|Y|=k] \times \underbrace{\mathbb{P}[\tilde{T}_k=\infty]}_{=0 \text{ (cf cours)}} = 0$$

* Par définition de τ, on a $|S_\tau| = |Y|$ en loi.

On sait que la loi de Y est symétrique (par hypothèse) vérifions que la loi de S_τ est symétrique aussi :

↳ si on pose $\forall n$, $\tilde{S}_n = -S_n$: par symétrie de la loi de (S_n), on a $(\tilde{S}_n) \overset{\text{loi}}{=} (S_n)$ (*)

et donc si on note $\tilde{\tau} = \inf\{n \geq 0 \mid |\tilde{S}_n| = |Y|\}$

on a $\tilde{S}_{\tilde{\tau}} \overset{\text{loi}}{=} S_\tau$ par (*)

↳ or $\tilde{\tau} = \inf\{n \geq 0 \mid |\tilde{S}_n| = |Y|\}$
$= \inf\{n \geq 0 \mid |-S_n| = |Y|\}$
$= \inf\{n \geq 0 \mid |S_n| = |Y|\}$
$= \tau$

donc $\tilde{S}_{\tilde{\tau}} = \tilde{S}_\tau \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par définition de } \tilde{S}}}{=} -S_\tau$

Conclusion : $S_\tau \overset{\text{loi}}{=} -S_\tau$, donc la loi de S_τ est symétrique.

$$\left.\begin{array}{l} |S_\tau| \overset{\text{loi}}{=} |Y| \\ \text{les lois de } Y \text{ et de } S_\tau \text{ sont symétriques} \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow} S_\tau \overset{\text{loi}}{=} Y$$

(*) car S_τ et Y sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}[S_\tau = k] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la loi de } S_\tau \text{ est} \\ \text{symétrique}}}{=} \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}[S_\tau = k] + \mathbb{P}[S_\tau = -k]\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left[|S_\tau| = |k|\right]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ |S_\tau| \overset{\text{loi}}{=} |Y|}}{=} \frac{1}{2}\mathbb{P}\left[|Y| = |k|\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la loi de } Y \text{ est} \\ \text{symétrique}}}{=} \mathbb{P}[Y = k].$$

* On peut repartir de 1) b) :
on a montré que $\forall n$, $\mathbb{E}[S^2_{n\wedge\tau}] = \mathbb{E}[n \wedge \tau]$
(τ satisfaisant bien les hypothèses demandées dans 1) b)).
Toujours par TCM, comme $n\wedge\tau \xrightarrow[n\to\infty]{\nearrow} \tau$ ps, on a $\mathbb{E}[n\wedge\tau] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\tau]$.
De plus, par définition de $\tau = \inf\{n \geq 0 \mid |S_n| = |Y|\} = \inf\{n \geq 0 \mid |S_n| \geq |Y|\}$
on a $\forall n$, $|S_{n\wedge\tau}| \leq |Y|$ et donc $|S^2_{n\wedge\tau}| \leq Y^2 \in L^1$
or $S^2_{n\wedge\tau} \xrightarrow[n\to\infty]{} S^2_\tau$ (bien déf. car $\tau < \infty$ ps) donc par TCD, $\mathbb{E}[S^2_{n\wedge\tau}] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[S^2_\tau]$.

On en déduit que $\mathbb{E}[S_\tau^2] = \mathbb{E}[\tau]$
et donc comme $S_\tau^2 \overset{loi}{=} Y^2$, $\mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[\tau]$.

Remarque : au lieu d'utiliser un TCD, on peut remarquer que $(S_{n\wedge\tau})$ est une martingale bornée dans L^2 (par $\mathbb{E}[Y^2]<\infty$), donc elle converge ps et dans L^2; sa limite ps étant S_τ, on en déduit que $\mathbb{E}[S_{n\wedge\tau}^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[S_\tau^2]$.

Erreurs "classiques"

1) utilisation erronée des théorèmes d'arrêt (cf. les questions précédentes...)

2) beaucoup d'élèves m'ont affirmé :
"$\forall n$, la loi de S_n est symétrique $\not\Rightarrow$ la loi de S_τ aussi".
Ceci est faux en général, la conclusion n'est vrai que parce que le temps d'arrêt τ considéré a lui aussi de bonnes propriétés.
Contre exemple avec un autre temps d'arrêt :
soit $\tau' = \inf\{n \geq 0 \mid S_n = -1\}$
τ' est bien un temps d'arrêt fini ps.
On voit immédiatement que $S_{\tau'} = -1$ ps
donc $\mathbb{P}[S_{\tau'} = -1] = 1 \neq 0 = \mathbb{P}[S_{\tau'} = +1]$.

3) Idée : on veut que $S_T \overset{loi}{=} Y$, mais pour copier ce qui a été fait en 2) on a aussi besoin de montrer que $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[S_T^2]$, donc idéalement on souhaite avoir une domination de $|S_{n\wedge T}^2|$...

⇝ on essaie $T = \inf\{n \geq 0 \,/\, S_n = -1 \text{ ou } S_n = Z\}$

pour Z une va ≥ 0, $< \infty$ ps, $\perp\!\!\!\perp (S_n)$, dont la loi est à définir où Z sera construit comme une fonction de U : $\boxed{Z = G(U)}$, où G est choisi de sorte que Z a la loi voulue.

* On voit que T est un t.a. (Z $\mathcal{F}_n$-mes), $T < \infty$ ps., que S_T est à valeurs dans $\{-1, 0, 1, \dots\}$ (comme Y) et on a :

$$\forall k \geq 0, \ \mathbb{P}[S_T = k] = \mathbb{P}[\{Z = k\} \cap \{T_k < T_{-1}\}]$$

où on note $T_i = \inf\{n \geq 0 \,|\, S_n = i\}$, $i \in \mathbb{Z}$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Z \perp\!\!\!\perp (S_n)}}{=} \mathbb{P}[Z = k] \times \mathbb{P}[T_k < T_{-1}]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \left[\text{cf cours : on connait } \mathbb{P}[T_k < T_{-1}]\right]}}{=} \frac{\mathbb{P}[Z = k]}{k+1}.$$

On souhaite que $\forall k \geq 0, \ \mathbb{P}[S_T = k] = \mathbb{P}[Y = k]$ $(*)$

(si c'est le cas, alors $\mathbb{P}[S_T = -1] = 1 - \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}[S_T = k] = 1 - \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}[Y = k] = \mathbb{P}[Y = -1]$ et donc on aura bien montré que $S_T = Y$ en loi).

$(*)$ est vérifié ssi $\forall k \geq 0, \ \mathbb{P}[Z = k] = (k+1)\,\mathbb{P}[Y = k]$

Problème : ceci définit-il la loi de Z, ie, a-t-on $\sum_{k \geq 0} (k+1)\mathbb{P}[Y = k] = 1$?

Réponse : oui, car $\sum_{k \geq 0} (k+1)\mathbb{P}[Y = k] = \mathbb{E}[(Y+1)\mathbb{1}_{Y \geq 0}] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \geq 0}] + \mathbb{P}[Y \geq 0]$

or $0 = \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \geq 0}] - \underbrace{\mathbb{P}[Y = -1]}_{= 1 - \mathbb{P}[Y \geq 0]} = \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{Y \geq 0}] + \mathbb{P}[Y \geq 0] - 1$

donc $\sum_{k \geq 0} (k+1)\mathbb{P}[Y = k] = 1$

On peut donc bien choisir Z va ≥ 0, $< \infty$ ps, tq $\forall k \geq 0$, $\mathbb{P}[Z = k] = (k+1) \times \mathbb{P}[Y = k]$

$Z \perp\!\!\!\perp (S_n)$, $Z = G(U)$ donc Z est $\sigma(U)$-mesurable, ce qui implique que $S_T = Y$ en loi.

* Il reste à montrer que $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T]$. On est tenté d'imiter la preuve faite en 2) en utilisant la domination :

$$\forall n, \ |S_{n \wedge T}^2| \leq 1 + Z^2$$

le problème est que $Y \in L^2 \not\Longrightarrow Z \in L^2$, car en fait : $\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{k \geq 0} k^2 (k+1) \mathbb{P}[Y=k]$.

<u>Idée</u> : on va se servir d'une martingale légèrement différente :

$$\forall n \geq 0, \quad M'_n = M_n \mathbb{1}_{Z<k} = (S_n^2 - n) \mathbb{1}_{Z<k}$$

où $k \in \mathbb{N}$ est un entier fixé.

↳ on vérifie que (M'_n) est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale :

$\forall n$, $|M'_n| \leq |M_n| \in L^1$, M'_n est $\mathcal{F}_n$-mes. car M_n et Z le sont (noter que Z est $\mathcal{P}(U)$-mes.)

$$\text{et } \mathbb{E}[M'_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{Z<k}}_{\mathcal{F}_n\text{- mes.}} M_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

$$= \mathbb{1}_{Z<k} \underbrace{\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{= M_n \text{ car } (M_n) \text{ mart.}}$$

$$= M'_n.$$

↳ $\left.\begin{array}{l}(M'_n) \text{ martingale} \\ T \text{ temps d'arrêt}\end{array}\right\} \Rightarrow (M'_{n\wedge T})$ martingale

$$\Rightarrow \forall n, \ \mathbb{E}[M'_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M'_0] = 0$$

$$\Rightarrow \forall n, \ \mathbb{E}[S^2_{n\wedge T} \mathbb{1}_{Z<k}] = \mathbb{E}[(n\wedge T) \mathbb{1}_{Z<k}].$$

↳ A k fixé : $\mathbb{E}[(n\wedge T) \mathbb{1}_{Z<k}] \xrightarrow[n\to\infty]{\text{TCM}} \mathbb{E}[T \mathbb{1}_{Z<k}]$

et $\forall n$, $S^2_{n\wedge T} \mathbb{1}_{Z<k} \leq (1+Z^2) \mathbb{1}_{Z<k} \leq 1+k^2$;

or $S^2_{n\wedge T} \mathbb{1}_{Z<k} \xrightarrow[n\to\infty]{} S^2_T \mathbb{1}_{Z<k}$ ps, donc $\mathbb{E}[S^2_{n\wedge T} \mathbb{1}_{Z<k}] \xrightarrow[n\to\infty]{\text{TCD}} \mathbb{E}[S^2_T \mathbb{1}_{Z<k}]$

$$\text{d'où} \quad \mathbb{E}[S^2_T \mathbb{1}_{Z<k}] = \mathbb{E}[T \mathbb{1}_{Z<k}].$$

↳ Ceci est vrai pour tout k et par TCM, quand $k\to\infty$, on obtient $\mathbb{E}[S_T^2] = \mathbb{E}[T]$ (car $Z<\infty$ ps)

<u>Remarque</u> : la question 4), qui généralise 3), n'a été abordée par aucun élève.