FIMFA: Examen de Processus Stochastiques, Juin 2010, Très brèves indications de corrigé.

Exercice 1.
1) a) Question de cours: Oui, car elle est irréductible sur un espace d'état fini.
b) Il suffit de voir que $d_x Q(x,y) = 1_{x \text{ est voisin de } y} = d_y Q(y,x)$ pour tous x, y, et que m est une loi de probabilité.
c) On sait que $E(T) = 1/m(x_0)$, et donc $E(T) = M/d_{x_0}$.
2) On utilise la question 1 pour voir que l'espérance du temps de retour en a pour une chaîne issue de a vaut $26/1 = 26$ (il y a 13 arêtes dans le graphe). Or pour une telle chaîne, on a forcément $X_1 = b$. Du coup, l'espérance du temps d'atteinte de a lorsque l'on part de b vaut 25.

Exercice 2.
1) a) Encore du cours.
b) Voir juste que $\nu(y) = \pi(\omega y) = \sum_x \pi(\omega x) Q(\omega x, \omega y) = \sum_x \nu(x) Q(x,y)$.
c) Comme pour tout x, $\pi(x) = \pi(\omega x)$ par unicité de la loi stationnaire, π est bien la loi uniforme.
2) a) C'est juste parce que $1/E(T) = \pi(1)$.
b) C'est juste parce que le nombre moyen de visites de ω pendant une excursion en dehors de 1 vaut $\pi(\omega)/\pi(1)$.
3) Si on note $X_n = \exp(2i\pi(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/2010)$, on remarque que c'est une chaîne de Markov vérifiant les conditions précédentes, et que τ est le premier temps de retour en 1 de X_n. D'où $E(\tau) = 2010$.

Exercice 3.
1) On applique le cours: F est harmonique sur $\overline{H}_n$, H_n est un ouvert *borné*, donc $xy = F(B_0) = E(F(B_{\tau_n}))$.
2) On sait que le mouvement brownien plan va presque sûrement visiter un voisinage du point $(2,2)$ (cf. cours), et il va donc presque sûrement sortir de H. Comme la trajectoire du mouvement brownien est continue, on en déduit qu'il existe n_0 tel que $B[0,\tau] \subset [-n_0, n_0]^2$, et donc $\tau_n = \tau$ pour tout $n \geq n_0$.
3) On sait que $B_{\tau_n} \to B_\tau$ presque sûrement, et que F est bornée dans $\overline{H}$. Par convergence dominée, on a donc $E(F(B_{\tau_n})) \to E(F(B_\tau))$ lorsque $n \to \infty$. On en conclut que $E(B_\tau) = xy$. Comme, B_τ vaut 1 ou -1 en fonction de l'hyperbole sur laquelle elle se trouve, on en déduit que la probabilité p recherchée vérifie $p - (1-p) = xy$ et donc que $p = (1+xy)/2$.

Exercice 4.
1) Si $|B_{n+1} - B_n| \geq 1$ et que $|B_n| < 1/2$, alors forcément $|B_{n+1}| \geq 1/2$ et donc $T \leq n+1$. Comme les variables $(B_{n+1} - B_n, n \geq 0)$ sont i.i.d., on en déduit tout de suite que $P(T \geq n) \leq P(|B_1| \leq 1)^n$.
2) a) On justifie que $\tilde{B}$ est un MB comme dans le cours (principe de réflexion), en utilisant la propriété de Markov forte.

b) Comme $B_T = -\tilde{B}_T$ et que $|B_T| = 1/2$, on a $|B_T - \tilde{B}_T| = 1$ p.s., et pour tout $t \geq T$, $|\tilde{B}_t - B_t| = 1$ aussi.
c) Comme $|B_t - \tilde{B}_t| = 1$ dès que $t \geq T$, on en déduit qu'alors, $B_t \in P$ si et seulement si $\tilde{B}_t \in I$. Ainsi (comme $T \leq t$ dès que $B_t \in I$ ou que $\tilde{B}_t \in I$),

$$\begin{aligned} P(T \geq t) &= P(B_t \in P) - P(B_t \in P \text{ et } T \leq t) \\ &= P(B_t \in P) - P(\tilde{B}_t \in I) = P(B_t \in P) - P(B_t \in I). \end{aligned}$$

d) C'est essentiellement le même argument. Pour obtenir la densité, on dérive terme à terme, en justifiant soigneusement.

Exercice facultatif.
On suppose que la chaîne est récurrente positive. Elle a alors une loi stationnaire μ. Comme $\sum_x \mu(x) = 1$ et que $d_x \geq 1$ pour tout x, on en déduit qu'il existe x_0 tel que $\mu(x_0)/d_{x_0}$ est maximal dans l'espace des états. Mais l'équation de stationnarité, au site x_0 montre que

$$\mu(x_0) = \sum_{x \sim x_0} \mu(x)/d_x.$$

En d'autres termes, $\mu(x_0)/d_{x_0}$ est égal à la moyenne des valeurs de $\mu(x)/d_x$ aux d_{x_0} voisins de x_0. Toutes ces valeurs étant positives, on en déduit que $\mu(x)/d_x = \mu(x_0)/d_{x_0}$ pour tout x voisin de x_0, puis par récurrence (de proche en proche) pout tout x sur le graphe. Mais alors, $\mu(x)$ est minoré par une constante strictement positive indépendante de x, ce qui contredit le fait que $\sum_x \mu(x) = 1$ quisque l'espace d'états est infini.