FIMFA: Examen de Processus Stochastiques. 2 Juin 2010, durée 3h.

Les notes de cours ou les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1.

On se donne un graphe connexe fini G, tel que deux sites donnés sont reliés par au maximum une arête, et tel qu'aucune arête ne relie un site à lui-même. Pour chaque point x du graphe, on note d_x le nombre de voisins de x dans le graphe G. On définit la marche aléatoire $(X_n, n \geq 0)$ issue du site x_0 sur le graphe de la manière suivante: C'est une chaîne de Markov issue de $X_0 = x_0$, et de fonction de transition Q donnée par

$$Q(x,y) = \frac{1}{d_x} \times 1_{\{y \text{ est voisin de } x\}}$$

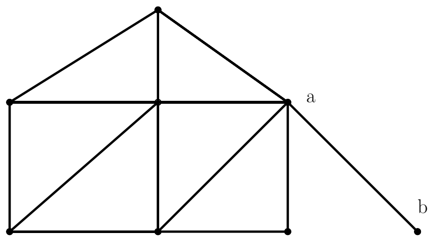
(intuitivement, à chaque pas, X_{n+1} est choisi uniformément au hasard parmi les voisins de X_n).

1) a) La chaîne est-elle forcément récurrente positive?

b) On définit $M = \sum_{x \in G} d_x$. Montrer que $m(x) = d_x/M$ est une loi réversible pour la chaîne.

c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $T = \min\{n > 0 \ : \ X_n = x_0\}$.

2) On considère une marche aléatoire issue de $X_0 = a$ sur le graphe suivant.



En utilisant la question 1c) et sans calcul long, déterminer l'espérance du premier temps d'atteinte de b par $(X_n, n \geq 0)$?

Exercice 2.

Dans cet exercice K désignera un entier supérieur à 2 et on notera $\omega = e^{2i\pi/K}$ On considère une chaîne de Markov irréductible de fonction de transition Q sur l'ensemble $R_K = \{\omega^j \ : \ j \in \{0, \ldots, K-1\}\}$ des racines K-ièmes de l'unité. On suppose que pour tous x et y dans R_K, $Q(x,y) = Q(\omega x, \omega y)$.

1) a) Justifier le fait que la chaîne a une unique loi de probabilité invariante π.

b) On pose pour tout x, $\nu(x) = \pi(\omega x)$. Montrer que ν est aussi une loi de probabilité invariante.

c) En conclure que π est la loi uniforme sur R_K.

2) On considère $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur R_K, de fonction de transition Q issue de $X_0 = 1$. On note $T = \min\{n > 0 \ : \ X_n = 1\}$.

a) Déterminer $E(T)$.

b) On note N le nombre de visites effectuées par X en ω avant l'instant T. Montrer que $E(N) = 1$.

3) On considère une suite $(\xi_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, telle que $P(\xi_1 = 1) > 0$. On note τ le premier instant strictement positif tel que $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ est un multiple entier de 2010. En utilisant la question 2), montrer que $\tau < \infty$ presque sûrement et déterminer $E(\tau)$.

Exercice 3.
Dans cet exercice, $(X_t, t \geq 0)$ et $(Y_t, t \geq 0)$ désigneront deux mouvement browniens réels indépendants issus respectivement de x_0 et de y_0, avec $|x_0 y_0| < 1$. On notera $B_t = (X_t, Y_t)$. On définit la fonction $F(x, y) = xy$. On note $\sigma = \inf\{t > 0 \ : \ B_t \in [2, 3]^2\}$ et on rappelle que $\sigma < \infty$ presque sûrement (c'est une conséquence du cours).

000) Vérifier que $\Delta F = 0$.

1) On définit H_n l'ensemble des points (x, y) tels que $|x| \leq n$, $|y| \leq n$ et $|xy| \leq 1$, et on note τ_n le premier instant où $B_t \in \partial H_n$. Vérifier que $\tau_n < \sigma$ presque sûrement, et déterminer (en justifiant soigneusement) la valeur de $E(F(B_{\tau_n}))$?

2) On note τ le premier instant où $|X_t Y_t| = 1$. Montrer que $\tau < \infty$ presque sûrement, et qu'il existe presque sûrement n_0 tel que $B[0, \tau) \subset H_{n_0}$. En conclure que presque sûrement, il existe n_0 tel que $\tau_n = \tau$ pour tout $n \geq n_0$.

3) En déduire la valeur de $E(F(B_\tau))$, puis la probabilité pour que B_τ appartienne à l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ (et non à celle d'équation $y = -1/x$).

Exercice 4.
On suppose que $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel standard issu de $B_0 = 0$. On définit

$$T = \inf\{t \geq 0 \ : \ |B_t| = 1/2\}.$$

1) Soit n un entier strictement positif. Vérifier que si $|B_n - B_{n-1}| > 1$ alors $T \leq n$. En déduire que $P(T \geq n) \leq P(|B_1| \leq 1)^n$.

2) On définit le processus $\tilde{B}_t$ de la manière suivante: Pour tout $t \leq T$, on pose $\tilde{B}_t = -B_t$, et pour tout $t \geq T$, on pose $\tilde{B}_{T+t} = \tilde{B}_T + (B_{T+t} - B_T) = B_{T+t} - 2B_T$.

a) Que peut-on dire du processus $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$?

b) Que peut-on dire de $|B_t - \tilde{B}_t|$ lorsque $t \geq T$?

c) Pour tout entier n, on note $J_n = [n - 1/2, n + 1/2]$. On note

$$\mathcal{P} = \cup_{n \text{ pair}} J_n \text{ et } I = \cup_{n \text{ impair}} J_n.$$

Montrer que $P(T < t \text{ et } B_t \in I) = P(T < t \text{ et } B_t \in \mathcal{P})$, et en déduire que

$$P(T \geq t) = P(B_t \in \mathcal{P}) - P(B_t \in I).$$

d) Pour tout $x \in [0, 1/2)$ et tout entier n, on note $J_n(x) = [n, n + x]$. Montrer que

$$P(T \geq t \text{ et } B_t \in [0, x)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n P(B_t \in J_n(x)).$$

En déduire une expression pour la densité de la loi de $B_t 1_{t<T}$ sur l'intervalle $(0, 1/2)$.

Exercice subsidiaire/facultatif.
Soit $(X_n, n \geq 0)$ une marche aléatoire sur un graphe connexe infini S (mais où chaque site n'a qu'un nombre fini de voisins de sorte qu'elle peut être définie comme dans l'exercice 1). Montrer qu'elle ne peut pas être récurrente positive (on pourra par exemple supposer qu'elle l'est et commencer par trouver un point où la loi stationnaire est maximale).