Examen du cours de Processus stochastiques, 2 Juin 2008, W. Werner, Durée 3 heures.
Les notes de cours ne sont pas autorisées.

Rapides questions de cours.
1) Donner un exemple de martingale qui converge p.s. mais pas dans L^1.
2) Donner un exemple de chaîne de Markov récurrente nulle.
3) Donner un exemple de chaîne de Markov récurrente positive apériodique, mais pas réversible à l'équilibre.

Exercice 1. (Digicodes oubliés, chaînes de Markov et martingales)
Soit $(V_j, j \geq 1)$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $p \in (0,1)$ indépendantes. On supposera que $V_0 = V_{-1} = 0$.
Pour tout $n \geq 0$, on note $X_n = (V_n, V_{n-1})$. Ainsi, $X_0 = (0,0)$, $X_1 = (V_1, 0)$, $X_2 = (V_2, V_1)$ etc.

1) a) Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ dont on décrira les probabilités de transition.
b) La chaîne est-elle irréductible? Est-elle récurrente positive?
c) Quelle est la loi de X_n lorsque $n \geq 2$ est fixé? En déduire la loi stationnaire π de la chaîne de Markov.
d) Justifier le fait que $T = \min\{n \geq 0 \ : \ X_n = (1,1)\}$ est presque sûrement fini et que $E(T) < \infty$.

Le but des questions 2) et 3) est de déterminer $E(T)$ par deux méthodes différentes:

2) a) Soit N_n le cardinal de l'ensemble $\{k \leq n \ : \ X_k = (1,1)\}$. Que peut-on dire de $\lim_{n\to\infty} N_n/n$?
b) On définit par récurrence $T_1 = T$ puis pour tout $j \geq 1$,

$$T_{j+1} = \inf\{n > T_j \ : \ X_n = (1,1)\}.$$

Que vaut N_{T_j}? En déduire que $j/T_j \to p^2$ p.s. lorsque $j \to \infty$.
c) Justifier le fait que les variables $(T_{j+1} - T_j, j \geq 1)$ sont indépendantes et de même loi.
d) En déduire que $E(T_2 - T_1) = 1/p^2$.
e) Que vaut T_2 lorsque $V_{1+T_1} = 1$? En déduire $E(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 1)$.
f) En déduire (en rédigeant soigneusement) la valeur de $E(T_2 - T_1 | V_{1+T_1} = 0)$.
g) Montrer que conditionnellement à $V_{1+T_1} = 0$, la loi de $T_2 - T_1 - 1$ est identique à celle de T. En déduire finalement $E(T)$.

3) a) On note $U(0,0) = U(0,1) = 0$, $U(1,0) = 1/p$ et $U(1,1) = 1/p + 1/p^2$. On pose $M_n = U(X_n) - n$. Déterminer $E(U(X_{n+1})|X_n = (0,0))$, $E(U(X_{n+1})|X_n = (1,0))$ et $E(U(X_{n+1})|X_n = (0,1))$. En déduire que $(M_{\min(n,T)}, n \geq 0)$ est une martingale par rapport à une filtration que l'on déterminera.
b) En déduire (justifier bien SVP!) la valeur de $E(T)$.

4) Pour réfléchir seulement si vous avez le temps (= cette question sera sous-notée): Quels sont les codes à 4 chiffres que l'on trouve (en moyenne) le moins rapidement en tapotant au hasard sur un clavier? On supposera que l'on tape une suite de chiffres i.i.d. choisis uniformément et que la porte/le coffre s'ouvre dès que l'on a tapé le bon code dans l'ordre.

Exercice 2. (L'équation $\Delta F = F$).

Partie I.
1) Soit V une variable aléatoire à valeurs dans le cercle unité du plan mesurable par rapport à une tribu $\mathcal{G}$. Soit U une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendante de $\mathcal{G}$. Montrer que $u(V)$ est indépendante de $\mathcal{G}$ et suit une loi uniforme sur le cercle unité.
2) Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de 0. On définit $S = \inf\{t > 0 \ : \ \|B_t\| = 1\}$. On définit aussi U une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$ indépendante de B, et on note u la rotation d'angle U.
a) Montrer que $(u(B_t), t \geq 0)$ a même loi que $(B_t, t \geq 0)$. En déduire que $(u(B_S), S)$ et (B_S, S) ont même loi.
b) On pose $\mathcal{G} = \sigma(B_t, t \leq S)$. Montrer (en utilisant la question 1) que $u(B_S)$ est une variable aléatoire uniforme sur le cercle unité, indépendante de $\mathcal{G}$.
c) En déduire que B_S est indépendante de S.

Partie II.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $z \in \overline{\Omega}$, on considère un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ dans $\mathbb{R}^2$ issu de z. On note $T = \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t \notin \Omega\}$ et on définit $F(z) = E(e^{-T})$.
1) Soit S un temps d'arrêt tel que $S \leq T$ presque sûrement. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la tribu engendrée par le mouvement brownien, et $\mathcal{F}_S$ la tribu du passé avant S.
a) Rappeler la propriété de Markov forte appliquée au mouvement brownien B au temps d'arrêt S.
b) En déduire que

$$E(e^{-T}|\mathcal{F}_S) = e^{-S}F(B_S).$$

2) On supposera dans les questions suivantes (sauf dans la 5)) que F est C^2 dans Ω. On suppose que $r < d(z, \partial\Omega)$. On note $S_r = \inf\{t > 0 \ : \ \|B_t - z\| = r\}$. Montrer en combinant la question 1b) avec le résultat de la partie I, que la moyenne de F sur le cercle de rayon r autour de z est égale à $F(z)/E(e^{-S_r})$.

3)
a) Montrer que S_r et $r^2 S_1$ ont la même loi. En déduire la limite de $E(1 - e^{-S_r})/r^2$ lorsque $r \to 0+$. En déduire que pour z fixé, la moyenne de F sur le cercle de rayon r autour de z est égale à

$$F(z) + r^2 E(S_1) + o(r^2)$$

lorsque $r \to 0+$.
b) En déduire que $\Delta F = \lambda F$ dans Ω, où λ est une constante que l'on déterminera.

4)
a) Donner une condition sous laquelle F est continue sur $\overline{\Omega}$. Que vaut alors F sur $\partial\Omega$?
b) Peut-il y avoir plus d'une fonction H continue sur $\overline{\Omega}$ et C^2 dans Ω telle que $\Delta H = \lambda H$ dans Ω et $H = 1$ sur $\partial\Omega$?
c) Comment faudrait-il modifier la définition de F pour que $\Delta F = F$ dans Ω?

5) Pour réfléchir seulement si vous avez le temps (= cette question sera sous-notée): Montrer qu'effectivement, F est C^2 dans Ω (en s'inspirant de la preuve pour le cas des fonctions harmoniques vu en cours: Couplage pour la continuité, et convolution pour la régularité).