**Partiel de Processus Stochastiques. 31 mars 2010, durée 2h.**
Les notes de cours et les calculatrices ne sont pas autorisées.

**Quasi-question de cours.** Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dont la densité est $\delta_0(dx)/2 + e^{-2x} 1_{\{x>0\}}\ dx$.

Déterminer (en justifiant...) la limite lorsque $n \to \infty$ de $P(S_n > 2n/3)^{1/n}$.

**Exercice 1.** 1) On suppose que l'on dispose d'un sac avec $N$ boules rouges et $M$ boules bleues que l'on sort (au hasard) les unes après les autres. A tout moment, on peut déclarer "je parie que la prochaine boule tirée sera bleue". On doit faire cette déclaration exactement une fois (et donc au plus tard juste avant que la dernière boule ne soit tirée du sac). Ainsi, si l'on parie avant que la première boule ne soit tirée, la probabilité de gagner est $M/(N+M)$. Peut-on jouer de manière à gagner avec une probabilité supérieure? (on notera $X_n$ la proportion de boules bleues dans le sac après le $n$-ième tirage, et on pourra interpréter la question en termes de temps d'arrêt).

2) a) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On note $X' = E(X|\mathcal{G})$ et $Y' = E(Y|\mathcal{G})$. Montrer que

$$E(\max(X,Y)|\mathcal{G}) \geq E(1_{X' \geq Y'} X + 1_{Y' > X'} Y|\mathcal{G}) \geq \max(X', Y').$$

b) Soit $(M_n, n \geq 0)$ et $(\tilde{M}_n, n \geq 0)$ deux martingales par rapport à la même filtration. Montrer que $(\max(M_n, \tilde{M}_n), n \geq 0)$ est une sous-martingale.

c) Soient $(\hat{M}_n, n \geq 0)$ une sous-martingale et $T$ un temps d'arrêt (pour la même filtration) tels que $T \leq n_0$ p.s. Montrer que $E(\hat{M}_T) \leq E(\hat{M}_{n_0})$.

d) On dispose maintenant de deux sacs (appelés A et B) avec 50 boules bleues et 50 boules rouges chacune. On tire une boule dans le sac A puis une boule dans le sac B puis une boule dans le sac A etc. On doit déclarer exactement une fois "je parie que la prochaine boule tirée sera bleue" (au plus tard juste avant que la dernière boule ne soit tirée du sac B). Donner une stratégie optimale (justifier...). Quelle est la probabilité de gagner si l'on suit cette stratégie?

**Exercice 2.** Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 (à chaque pas, on tire à pile ou face pour décider si $S_{n+1} - S_n$ vaut 1 ou $-1$). On définit sur le même espace de probabilité une variable aléatoire $U$ uniforme sur $[0,1]$ indépendante de $(S_n)_{n \geq 0}$. On note pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U, S_0, \ldots, S_n)$. On fera implicitement toujours référence à cette filtration.

A) Soit $T$ un temps d'arrêt. Vérifier que pour tout $n \geq 0$, $|S_{\min(n,T)}| \leq T$. Montrer que si $E(T) < \infty$ alors $E(S_T) = 0$. En déduire que si $S_T$ est dans $L^1$ et que $E(S_T) \neq 0$ alors $E(T) = \infty$.

B) On se donne une loi de probabilité $\mathcal{L}$ sur $\mathbb{Z}$. On suppose que $T$ est un temps d'arrêt fini p.s., tel que $S_T$ a pour loi $\mathcal{L}$. Le but de l'exercice est de trouver un tel $T$ d'espérance la plus petite possible. On suppose que $Y = F(U)$ où $F$ est choisie de sorte que la loi de $Y$ est $\mathcal{L}$.

1) a) Montrer que $M_n = (S_n)^2 - n$ est une martingale.

b) Montrer que $E(T) \geq E(Y^2)$. En déduire que $E(T) = \infty$ si $E(Y^2) = \infty$.

2) On suppose que $Y$ et $-Y$ ont même loi et que $Y \in L^2$. On définit $\tau = \inf\{n > 0 : |S_n| = |Y|\}$. Montrer que la loi de $S_\tau$ est $\mathcal{L}$ et que $E(\tau) = E(Y^2)$.

3) On ne suppose plus que $Y$ et $-Y$ ont la même loi, mais on suppose que $E(Y^2) < \infty$, que $E(Y) = 0$ et que $Y \geq -1$ p.s. Montrer en utilisant une construction analogue qu'il est possible de choisir $T$ de sorte que $E(T) = E(Y^2)$.

4) Essayer de traiter le cas général.