FIMFA: Partiel de M1, processus aléatoires, durée 2h.

Les notes de cours ou les calculatrices ne sont pas autorisées.

Questions de cours (ou presque).
1)
a) Rappeler (sans preuve) les différentes caractérisations des martingales qui convergent dans L^1 (on pourra utiliser sans preuve ces résultats dans les questions suivantes)
b) Rappeler la preuve du fait que si X est une variable aléatoire dans $L^1(\mathcal{F})$ et si $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de la tribu de référence $\mathcal{F}$, alors $|E(X|\mathcal{G})| \leq E(|X|\ |\mathcal{G})$. En déduire que la famille des variables $E(X|\mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ parcourt toutes les sous-tribus de $\mathcal{F}$, est uniformément intégrable.
c) Rappeler la définition d'un temps d'arrêt par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et la définition de la tribu $\mathcal{F}_T$ associée. Rappeler la preuve du fait que si $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable (on notera M_∞ sa limite), et si S est un temps d'arrêt par rapport à la même filtration avec $S \leq n_0$ p.s., alors $M_S = E(M_\infty|\mathcal{F}_S) p.s.$.
d) Si T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et si $m \geq 0$ est fixé, $S_m := \min(m, T)$ est elle toujours un temps d'arrêt par rapport à cette même filtration? Déduire du a) et du b) que si la martingale $(M_n, n \geq 0)$ est uniformément intégrable, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{S_m}, m \geq 0)$.

2)
Soit $(\xi_n, n \geq 1)$ une suite de variable aléatoires indépendantes de même loi avec $P(\xi_1 = 1/2) = P(\xi_1 = 3/2) = 1/2$. On note $M_0 = 1$ et $M_n = \prod_{j=1}^n \xi_j$ pour tout $n \geq 1$.
Montrer, en moins de dix lignes que M_n converge p.s. lorsque $n \to \infty$ et déterminer sa limite.

Exercice 1.
On modifie le mécanisme de l'urne de Polya comme suit: A l'instant 0, il y a 1000 boules dans l'urne, x bleues et $1000 - x$ rouges où x est un entier fixé dans $(0, 1000)$. On tire l'une des boules au hasard, et on la jette. Puis, on tire l'une des 999 boules restantes au hasard (toujours uniformément), on la remet dans l'urne et on rajoute dans l'urne (en plus de la boule que l'on remet) un autre boule de la même couleur. Il y a donc à nouveau 1000 boules dans l'urne à l'instant 1. On recommence la même opération à chaque instant $n \geq 1$.
1) Montrer que le nombre X_n de boules bleues dans l'urne à l'instant n converge presque sûrement lorsque $n \to \infty$ vers une variable aléatoire X.
2) Que peut-on dire de $E(X)$ (bien justifier!)?
3) Montrer qu'en fait $X \in \{0, 1\}$ presque sûrement et déterminer $P(X = 1)$.
4) Pour tout $a \in [0, 1000]$, on note T_a le premier instant où il y a exactement a boules bleues dans l'urne (et on note $T_a = \infty$ s'il n'y a pas de tel instant). Que vaut $P(T_a < T_b)$ lorsque $0 \leq a < x \leq b \leq 1000$? En déduire la loi de $\max_{n\geq 0} X_n$.

Exercice 2.
On suppose donnée une fonction h continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée par 1 (c'est à dire que pour tout x, $|f(x)| < 1$) et tel qu'il existe une unique valeur x_0 telle que $h(x_0) = x_0$. On suppose en outre que $h(x) > 0$ si et seulement si $x > x_0$

(de sorte que pour tout x, $(x - x_0)h(x) \geq 0$). On se propose de trouver un algorithme aléatoire qui converge presque sûrement vers x_0.
On se donne une famille i.i.d. de variables $(\epsilon_n, n \geq 1)$ avec $P(\epsilon_n = +1) = P(\epsilon_n = -1) = 1/2$. On pose $Z_0 = 0$ et on définit par récurrence

$$Z_{n+1} = Z_n + \frac{1}{n+1}(-h(Z_n) + \epsilon_n)$$

pour tout $n \geq 0$. On notera et $\mathcal{F}_n = \sigma(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$.
1) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $E((Z_{n+1} - x_0)^2 | \mathcal{F}_n) \leq (Z_n - x_0)^2 + (2/(n+1)^2)$.
2) En déduire que la suite $(Z_n - x_0)^2$ est bornée dans L^2.
3) On pose $M_n = (Z_n - x_0)^2 + \sum_{j>n}(2/j^2)$. Que peut-on dire de $(M_n, n \geq 0)$? En déduire que M_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire finie M_∞.
4) Montrer que Z_n converge p.s. lorsque $n \to \infty$ et que sa limite est presque sûrement égale à x_0.