**Examen du cours de Processus stochastiques, 2 Juin 2008, W. Werner, Durée 3 heures.**
Les notes de cours ne sont pas autorisées.

**Exercice 0.** (Quasiment une question de cours: Petite variation autour de l'urne de Polya)
On se donne une famille de variables indépendantes $(U_j, j \geq 1)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
A l'instant 0, on a une urne avec deux boules, une rouge et une bleue. A chaque instant $n \geq 1$, on choisit une boule $x$ au hasard dans l'urne, on la remet dans l'urne et on y rajoute $U_n$ boules bleues si $x$ était bleue, ou $U_n$ boules rouges si $x$ était rouge. On note $M_n$ la proportion de boules bleues dans l'urne juste après l'instant $n$. Montrer que $M_n$ converge p.s. lorsque $n \to \infty$.

**Exercice 0'.** (Pourquoi a-t-on choisi le terme "réversible à l'équilibre")
Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov irréductible récurrente positive sur un espace d'état $S$ au plus dénombrable. On suppose que la loi de $X_0$ est la loi stationnaire $\pi$ de la chaîne.
1) On suppose de plus que la chaîne est réversible à l'équilibre. Montrer que quel que soit $n \geq 1$, $(X_0, X_1, \dots, X_n)$ et $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$ ont même loi.
2) On ne suppose plus que la chaîne est réversible à l'équilibre. Montrer qu'il existe une chaîne de Markov $(X'_n, n \geq 0)$ dont on précisera la loi stationnaire et la fonction de transition $Q'$ telle que pour tout $n \geq 1$, $(X'_0, \dots, X'_n)$ a la même loi que $(X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$.
3)
a) Justifier le fait que l'on peut définir un processus $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{Z})$ tel que pour tout $n_0 \in \mathbb{Z}$, $(\tilde{X}_{n_0+n}, n \geq 0)$ a la même loi que $(X_n, n \geq 0)$.
a) Montrer qu'alors $(\tilde{X}_{-n}, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov irréductible récurrente positive.
b) Montrer que $(\tilde{X}_{-n}, n \in \mathbb{Z})$ et $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{Z})$ ont la même loi lorsque la chaîne $X$ est réversible à l'équilibre.

**Exercice 1.**
On suppose que cinq fois par semaine, Mr A. va le matin au bureau et rentre chez lui le soir. Il possède $K$ parapluies. Chaque matin, et chaque soir, il pleut avec probabilité $p$, indépendamment du temps qu'il faisait la demi-journée précédente. Mr A. ne prend un parapluie avec lui (pour aller ou rentrer du bureau) que s'il pleut et s'il en a un à sa disposition là où il est. On note $X_n$ le nombre parapluies qu'il a chez lui le matin de son $n$-ème jour de travail.
1) Montrer que $(X_n, n \geq 0)$ est une chaîne de Markov sur $\{0, 1, \dots, K\}$ et déterminer sa fonction de transition.
2) Lorsque $n \to \infty$, que pouvez vous dire (**justifiez bien SVP!**) de la probabilité pour que $X_n = 0$?
3) Lorsque $n \to \infty$, que pouvez-vous dire du nombre de jours où Mr A. est arrivé trempé au bureau?
4) Mr A. ne souhaite pas arriver au bureau trempé (mais il veut garder ses habitudes) plus d'une fois sur vingt en moyenne. On suppose que $p = 1/5$. Combien de parapluies doit-il avoir pour cela?

**Problème**
On définit une fonction de transition sur l'ensemble $S$ des entiers strictement positifs comme suit: Pour tout $x > 0$ et $y > 0$, on pose

$$Q(x, x+1) = \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} \text{ et } Q(x, x-1) = \frac{x-1}{2x}$$

et $Q(x, y) = 0$ lorsque $|y - x| \neq 1$.
Soit $(X_n, n \geq 0)$ une chaîne de Markov de fonction de transition $Q$ issue de $X_0 = x_0 \geq 1$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$. Pour tout $x > 0$, on pose $T_x = \min\{n \geq 0 \ : \ X_n = x\}$.
On notera $\mathcal{L}^y$ la loi d'une chaîne de Markov $(Y_n, n \geq 0)$ de même fonction de transition $Q$, issue de $y \geq 1$.

1)
a) La chaîne $(X_n, n \geq 0)$ est-elle irréductible?
b) En déduire que $T_x < \infty$ presque sûrement lorsque $x_0 < x$ (on pourra d'abord supposer que la chaîne $X$ est récurrente, puis qu'elle est transitoire).

2)
a) Montrer que sous $\mathcal{L}^y$ et lorsque $y \geq 2$, $E(1/Y_1) = 1/y$. Que se passe-t-il lorsque $y = 1$?
b) On pose $M_n = 1/X_{\min(n,T_1)}$. Montrer que $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale pour filtration $(\mathcal{F}_n)$.
c) En déduire (**en justifiant soigneusement!**) la valeur de $P(T_a < T_b)$ lorsque $1 \leq a < x_0 < b$ (on pourra étudier le comportement de $M_{\min(n,T_a,T_b)}$ lorsque $n \to \infty$).
d) En déduire que $P(T_a < \infty) = a/x_0$ lorsque $1 \leq a < x_0$.
e) En déduire que la chaîne $(X_n, n \geq 0)$ est transitoire.

3)
On suppose à partir de maintenant que $x_0 = 1$. On note $\tilde{T} = \max\{n \geq 0 \ : \ X_n = 1\}$.
a) $\tilde{T}$ est-il un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$?
b) Montrer en utilisant 2d) que pour tout $n_0 \geq 0$, on a

$$P(\tilde{T} = n_0) = P(X_{n_0} = 1, X_{n_0+1} = 2 \text{ et } X_n \geq 2 \text{ pour tout } n \geq n_0 + 1) = P(X_{n_0} = 1)/2.$$

c) On dira qu'une suite (finie) d'entiers strictements positifs $s_0, \ldots, s_k$ est une $k$-trajectoire possible si pour tout $j < k$, $|s_{j+1} - s_j| = 1$. Vérifier que dans ce cas et si $s_0 = y$,

$$P(Y_0 = s_0, \ldots, Y_k = s_k) = \frac{s_k}{2^k s_0}.$$

d) Montrer que lorsqu'en plus $s_0 = s_k = 1$, on a

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k, \tilde{T} = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

e) Montrer qu'en fait pour toute $(k + l)$-trajectoire possible avec $s_0 = 1$ et $s_j \geq 2$ pour tout $j > k$, on a

$$P(\tilde{T} = k, X_0 = s_0, \ldots, X_{k+l} = s_{k+l}) = \frac{s_{k+l}}{2^{k+l}} \times (1 - 1/s_{k+l}) = \frac{s_{k+l} - 1}{2^{k+l}}.$$

En déduire l'expression de

$$P(X_{k+1} = s_{k+1}, \ldots, X_{k+l} = s_{k+l} \mid X_0 = s_0, \ldots, X_k = s_k, \tilde{T} = k).$$

f) On note $E_1 = (X_0, \ldots, X_{\tilde{T}})$. Déduire des questions précédentes que le processus $(X_{1+\tilde{T}} - 1, X_{2+\tilde{T}} - 1, \ldots)$ est indépendant de $E_1$, et que sa loi est $\mathcal{L}^1$.
g) Pour tout $x \geq 1$, on note $\tilde{T}_x = \max\{n \geq 0 \ : \ X_n = x\}$. On note

$$E_{x+1} = (X_{1+\tilde{T}_x} - x, X_{2+\tilde{T}_x} - x, \ldots, X_{\tilde{T}_{x+1}} - x).$$

En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x \geq 1$, $E_x$ est indépendant de $(E_{x+1}, E_{x+2}, \ldots)$ et suit la même loi que $E_1$. En déduire que $(E_x, x \geq 1)$ forme une famille de variables indépendantes identiquement distribuées.

4)
Soit une marche aléatoire simple $(S_n, n \geq 0)$ sur $\mathbb{Z}$ issue de $S_0 = 1$. On pose $\tau = \min\{n \geq 0 \ : \ S_n = 0\}$.
a) Vérifier que pour toute $k$-trajectoire possible $s_0, \ldots, s_k$ pour laquelle $s_0 = s_k = 1$, on a

$$P(S_0 = s_0, \ldots, S_k = s_k, \tau = k + 1) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

En comparant avec la question 3c, en déduire que $(S_0, \ldots, S_{\tau-1})$ suit la même loi que $(X_0, \ldots, X_{\tilde{T}})$.
b) On note $I_n = \min(S_0, \ldots, S_n)$. Que vaut $I_n$ pour $n < \tau$? Que vaut $I_\tau$? Montrer que $(S_n - 2(I_n - 1), n \leq \tau)$ suit la même loi que $(X_n, n \leq \tilde{T} + 1)$. Montrer que le processus $(1 + S_{\tau+n}, n \geq 0)$ est indépendant de $(S_n, n \leq \tau)$ et suit la loi d'une marche aléatoire simple issue de 1.
c) En déduire qu'en fait $(2 + S_n - 2I_n, n \geq 0)$ suit la même loi que $(X_n, n \geq 0)$