Partiel de processus stochastiques (W. Werner, M. Théret), mercredi 25 mars 2009 Durée: 2 heures. Documents et calculatrices non autorisés.

Exercice 0.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilités, soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration et A un événement dans la tribu engendrée par $\cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$. Que peut-on dire de la suite de variables aléatoires $E(1_A|\mathcal{F}_n)$? Montrer qu'il existe une suite d'événements $(A_n)_{n\geq 0}$ avec $A_n \in \mathcal{F}_n$ pour tout n, telle que $P(A \setminus A_n) + P(A_n \setminus A) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 0.2

Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées dont la loi commune a pour densité $e^{-|x|}/2$ sur $(-\infty, +\infty)$. On pose $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Déterminer la limite de $P(S_n > n)^{1/n}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 1.

Attention: Toute application mal justifiée du théorème d'arrêt sera pénalisée.

Le nombre p est fixé dans $(1/2, 1]$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $P(\xi_1 = 1) = p$ et $P(\xi_1 = -1) = 1-p$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Pour tout entier strictement positif a, on définit

$$T_a = \inf\{n \geq 1 \ : \ |S_n| = a\} \text{ et } P_a = P(S_{T_a} = a).$$

1) Justifier le fait que T_a est presque sûrement fini.

2) a) Montrer que $(S_n - n(2p-1), n \geq 0)$ est une martingale dans une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ que l'on précisera.

b) Montrer que T_a est un temps d'arrêt par rapport à cette filtration.

c) En déduire une relation entre $E(T_a)$ et P_a.

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $y(x) > 0$ de sorte que le processus $(x^{S_n} y^{-n}, n \geq 0)$ soit une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

b) Que peut-on dire de y dans le cas particulier où $x = (1-p)/p$? En appliquant dans ce cas (après l'avoir soigneusement justifié) le théorème d'arrêt, déterminer P_a.

c) En déduire que $1 - P_a \leq ((1-p)/p)^a$ et une minoration pour $E(T_a)$.

4) Application. On supposera que la règle de la roulette est la suivante (en fait ce n'est pas tout à fait la vraie règle...): On mise sur une couleur (rouge ou noir). La probabilité pour que noir apparaisse est 18/37, la probabilité pour que rouge apparaisse est 18/37 et la probabilité pour que vert apparaisse est 1/37 (le zéro est colorié en vert). Si l'on a misé une certaine somme sur une couleur et qu'elle apparait, alors on double sa mise, mais si elle n'apparait pas, on perd sa mise.

Un joueur possède 500 Euros et souhaite jouer jusqu'à ce qu'il possède soit 1000 Euros soit 0 Euros. Il veut comparer deux stratégies:

Dans la première, il mise les 500 Euros sur noir dès le premier coup, et la probabilité pour qu'il sorte du casino avec 1000 Euros est donc de 18/37 et la probabilité pour qu'il sorte du casino avec 0 Euros est 19/37.

Dans la seconde stratégie, il mise 1 Euro par 1 Euro. Après un coup, il possède donc 501 Euros avec un probabilité 18/37 et 499 Euros avec probabilit 19/37 etc.

Pour cette seconde stratégie, donner une majoration de la probabilité pour que le joueur sorte du casino avec 1000 Euros, et estimer le nombre moyen de parties qu'il doit jouer avant de sortir du casino (on pourra par exemple utiliser le fait que $19/18 > 10^{0.02}$).

Exercice 2.

On se donne une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées $(\xi_j)_{j\geq 1}$ telles que $E((\xi_1)^4) < \infty$, $E((\xi_1)^2) = 1$ et $E(\xi_1) = 0$. On se donne aussi une famille $(a_{i,j})_{i\geq 1, j\geq 1}$ de réels tels que

$$\sum_{i,j\geq 1} a_{i,j}^2 < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$Q_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \xi_i \xi_j.$$

Montrer, en justifiant soigneusement, que $Q_n - \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}$ converge presque sûrement et dans L^2 vers une variable aléatoire (qui est dans L^2) lorsque $n \to \infty$.