Ecole Normale Supérieure Année 2011-2012
ENS **FIMFA**

Examen - processus stochastiques

Durée : trois heures. Pas de document autorisé.

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - p$). On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geqslant 1$. On pose $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j, \quad n \geqslant 1$$

Pour $y \in \mathbb{N}$ on introduit le temps d'arrêt

$$T_y = \inf\{n \geqslant 0,\, S_n = y\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

1. Montrer que $\lim S_n = +\infty$ p.s.. En déduire que $T_y < \infty$ p.s..
2. On pose $M_n = S_n - np$.
   (a) Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[T_y]$ (utiliser le théorème d'arrêt).
3. On note $N_y = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{S_k = y}$ le nombre de visites de $(S_n)_{n\geqslant 0}$ en $y \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $\mathbf{1}_{S_k=y}$ sur $\{k < T_y\}$, sur $\{T_y \leqslant k < T_{y+1}\}$, et sur $\{k \geqslant T_{y+1}\}$.
   (b) En déduire que $N_y = T_{y+1} - T_y$ p.s. et calculer $\mathbb{E}[N_y]$.
4. On remarque que $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire avec matrice de transition Q donnée par : $Q(x, y) = 1 - p$ si $y = x$ et $Q(x, y) = p$ si $y = x + 1$ (on ne demande pas de le prouver). On peut supposer que la chaîne $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est donnée sous forme canonique.
   (a) Calculer la loi de S_n pour tout n et la loi de T_1.
   (b) Prouver (en utilisant la propriété de Markov fort) que N_y a même loi que T_1 pour tout y.
   (c) Calculer la loi de T_y.

Exercice 2 Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ de loi $\mathbb{P}(Z_n = 1) = \mathbb{P}(Z_n = -1) = 1/(2n)$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n$. On note $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. On pose $X_0 = 0$ puis

$$X_n = Z_n \mathbf{1}_{X_{n-1}=0} + n|Z_n| X_{n-1} \mathbf{1}_{X_{n-1}\neq 0}, \quad n \geqslant 1$$

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence p.s. de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que X_n est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, que $|X_n| \leqslant n!$ p.s., puis que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité et identifier la limite X_∞.
3. Donner une formule de récurrence pour $\mathbb{E}[|X_n|]$, calculer $\mathbb{E}[|X_n|]$, et en déduire la limite de $\mathbb{E}[|X_n|]$ quand $n \to \infty$. Peut-on appliquer le théorème de convergence p.s. des martingales ?
4. Calculer $\mathbb{P}\big(Z_n \neq 0 \text{ pour un nombre fini de } n\big)$. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas p.s. vers X_∞. Est-ce que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger p.s. ?

Exercice 3 Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ indépendantes et identiquement distribuées. On note $F(k) = \mathbb{P}(Y_0 \leqslant k)$ et on suppose $\mathbb{P}(Y_0 = 1) > 0$ et $F(k) < 1$ $\forall k \geqslant 1$.

Soit X_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $F_0(k) = \mathbb{P}(X_0 \leqslant k)$.

On considère la suite récurrente aléatoire :

$$X_{n+1} = \max(X_n, Y_n) - 1, \quad n \geqslant 0$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible à valeurs dans $\mathbb{N}$. Identifier sa matrice de transition Q.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\mathbb{P}(X_{n+1} \leqslant k) = \mathbb{P}(X_n \leqslant k+1)F(k+1)$$
puis déterminer $\mathbb{P}(X_n \leqslant k)$ en fonction de F et F_0. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j)$$
3. Vérifier que $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty} F(j) = 0$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{\infty}[1 - F(j)] = \infty$.
Vérifier que $\mathbb{E}[Y_0] = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_0 > j)$.
En déduire que $\mathbb{E}[Y_0] = \infty$ si et seulement si $\displaystyle\prod_{j=1}^{\infty} F(j) = 0$.
4. Montrer que si $\mathbb{E}[Y_0] < \infty$ alors
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \nu(k) \qquad \text{avec } \nu(k) = [1 - F(k)] \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j)$$
et en déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente positive.

Exercice 4 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien. On définit le processus $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ par $Z_t = B_t - tB_1$. On appelle ce processus le pont brownien (remarquer que $Z_0 = Z_1 = 0$).

1. Calculer la moyenne m_t et la fonction de covariance $K(s,t)$ de $(Z_t)_{t\in[0,1]}$.
2. On pose $Z'_t = Z_{1-t}$. Montrer que le processus $(Z'_t)_{t\in[0,1]}$ a même loi que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$.
3. Soit $Y_t = (1-t)B_{t/(1-t)}$ pour $t \in [0, 1[$.
Montrer que $Y_t \to 0$ quand $t \nearrow 1$. On pose $Y_1 = 0$.
Indication : on rappelle la loi des grands nombres pour le mouvement brownien : $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ *p.s.*
Montrer que $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ a même loi que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$.
4. Montrer que $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ est indépendant de B_1.
5. Soit $G : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. En notant $B = (B_t)_{t\in[0,1]}$ et $Z = (Z_t)_{t\in[0,1]}$, montrer que
$$\mathbb{E}\big[G(B) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}[G(Z)]$$
Indication : utiliser la question précédente.
6. Déterminer la loi de $M_1 = \sup_{t\in[0,1]} Z_t$ (montrer que c'est une variable aléatoire à densité et identifier la densité).
Indication : commencer par retrouver la loi jointe de $(\sup_{t\in[0,1]} B_t, B_1)$.

Exercice 1 (Corrigé exercice 1) 1. D'après la loi des grands nombres, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] = p$ p.s., et comme $p > 0$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ p.s..
Comme $\{T_y \leqslant n\} = \{S_n \geqslant y\}$, on en déduit que $\mathbb{P}(T_y < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T_y \leqslant n) = 1$.

2. (a) Pour tout n, M_n est intégrable (car minorée par $-np$ et majorée par $n(1-p)$ p.s.) et $\mathcal{F}_n$-mesurable. De plus

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_{n-1} + X_n - np|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} - np + \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]$$

et comme X_n est indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$, on a $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n] = p$, ce qui donne $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$.

(b) D'après le théorème d'arrêt, pour tout n on a $\mathbb{E}[M_{n\wedge T_y}] = \mathbb{E}[M_0] = 0$. Donc $p\mathbb{E}[T_y \wedge n] = \mathbb{E}[S_{n\wedge T_y}]$. Lorsque $n \to \infty$, le membre de gauche converge vers $\mathbb{E}[T_y]$ par convergence monotone. Lorsque $n \to \infty$, le membre de droite converge vers $\mathbb{E}[S_{T_y}]$ par convergence dominée (en effet, $S_{n\wedge T_y} \in [0, y]$ pour tout n). Comme $S_{T_y} = y$ p.s., on en déduit que $\mathbb{E}[T_y] = y/p$.

3. (a) Si $k < T_y$, alors $S_k < y$ et donc $\mathbf{1}_{S_k=y} = 0$.
Si $T_y \leqslant k < T_{y+1}$, alors $S_k = y$ et donc $\mathbf{1}_{S_k=y} = 1$.
Si $k \geqslant T_{y+1}$, alors $S_k > y$ et donc $\mathbf{1}_{S_k=y} = 0$.

(b) On a donc $N_y = \sum_{k=T_y}^{T_{y+1}-1} 1 = T_{y+1} - T_y$ p.s. et $\mathbb{E}[N_y] = \mathbb{E}[T_{y+1}] - \mathbb{E}[T_y] = 1/p$.

4. (a) S_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p) : $\mathbb{P}(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.
T_1 suit une loi géométrique de paramètre p :

$$\mathbb{P}(T_1 = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = 0, X_k = 1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = 0)\mathbb{P}(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}p$$

(b) On a $N_y = T_{y+1} - T_y = T_{y+1} \circ \theta_{T_y}$. Donc

$$\mathbb{P}(N_y = k) = \mathbb{P}(T_{y+1}\circ\theta_{T_y} = k) = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}_{S_{T_y}}(T_{y+1} = k)\big] = \mathbb{P}_y(T_{y+1} = k) = \mathbb{P}_0(T_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$$

(c) Soit $y \geqslant 2$ et $k \geqslant y$:

$$\mathbb{P}(T_y = k) = \mathbb{P}(S_{k-1} = y-1, X_k = 1) = \mathbb{P}(S_{k-1} = y-1)\mathbb{P}(X_k = 1) = C_{k-1}^{y-1} p^y (1-p)^{k-y}$$

Si $k < y$ on a $\mathbb{P}(T_y = k) = 0$.

Exercice 2 (Corrigé exercice 2) 1. On a $|X_1| = |Z_1| \leqslant 1$ et par récurrence $|X_n| \leqslant |Z_n| \max(1, n|X_{n-1}) \leqslant \max(1, n|X_{n-1})| \leqslant n!$.

2. On a $\{X_n = 0\} = \{Z_n = 0\}$ et donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n$. On obtient ainsi pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|X_n| \neq 0) \leqslant \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 en probabilité.

3. On a

$$|X_n| = |Z_n|\mathbf{1}_{X_{n-1}=0} + n|Z_n||X_{n-1}|\mathbf{1}_{X_{n-1}\neq 0} = |Z_n|\big(\mathbf{1}_{X_{n-1}=0} + n|X_{n-1}|\big)$$

et donc

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}\big[|Z_n|\big(\mathbf{1}_{X_{n-1}=0} + n|X_{n-1}|\big)\big]$$

Par indépendance de Z_n et $\mathcal{F}_{n-1}$,

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}\big[|Z_n|\big]\mathbb{E}\big[\mathbf{1}_{X_{n-1}=0} + n|X_{n-1}|\big] = \mathbb{E}\big[|Z_n|\big]\big(\mathbb{P}(X_{n-1} = 0) + n\mathbb{E}[|X_{n-1}]\big)$$

ce qui donne

$$\mathbb{E}[|X_n|] = \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n-1}\Big) + \mathbb{E}[|X_{n-1}]$$

Donc pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mathbb{E}[|X_n|] = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}\Big(1 - \frac{1}{k-1}\Big)$$

Comme $1/k^2$ est sommable et $1/k$ ne l'est pas, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = +\infty$$

On ne peut donc pas appliquer le théorème de convergence p.s. des martingales.

4. On a $\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = 1/n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) = +\infty$. Puisque les événements $\{Z_n \neq 0\}$ sont indépendants, par le lemme de Borel Cantelli on a $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{Z_n \neq 0\}) = 1$. Il y a donc p.s. une suite $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $|Z_{n_k}| = 1$ et donc $|X_{n_k}| \geqslant |Z_{n_k}| = 1$. Il s'en suite que p.s. $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas zero, qui est la limite en probabilité.
   La suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ ne peut pas converger ps, car si elle convergeait ps, alors elle convergerait vers une va X'_∞ différente de 0, et une sous-suite convergerait en probabilité vers X'_∞, ce qui contredirait le fait que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 en probabilité.

Exercice 3 (Corrigé exercice 3) 1. On calcule

$Q(x, y) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x) = \mathbb{P}(\max(x, Y_n) = y+1)) = F(x)\mathbf{1}_{y=x-1}+[F(y+1)-F(y)]\mathbf{1}_{y\geqslant x}$

Pour prouver l'irréductibilité :
- si $x > y$, alors on peut passer de x à y par saut de -1. Plus exactement, $Q^{x-y}(x, y) \geqslant \prod_{j=y+1}^{x} Q(j, j-1) = \prod_{j=y+1}^{x} F(j) > 0$.
- si $x \leqslant y$, alors on peut passer de x à y en sautant d'abord un point au delà de y, puis en redescendant par saut de -1 jusqu'à x. Plus exactement, il existe $k \geqslant y$ tel que $F(k+1) - F(k) > 0$ (sinon on aurait $F(y) = 1$). Alors $Q^{k-y+1}(x, y) \geqslant Q(x, k)\prod_{j=y+1}^{k} Q(j, j-1) = [F(k+1) - F(k)]\prod_{j=y+1}^{k} F(j) > 0$.

2. Comme $X_{n+1} = \max(X_n - 1, Y_n - 1)$, on a $\{X_{n+1} \leqslant k\} = \{X_n - 1 \leqslant k\} \cap \{Y_n - 1 \leqslant k\}$. Par indépendance de X_n et Y_n on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} \leqslant k) &= \mathbb{P}(X_n \leqslant k+1, Y_n \leqslant k+1) = \mathbb{P}(X_n \leqslant k+1)\mathbb{P}(Y_n \leqslant k+1)\\ &= \mathbb{P}(X_n \leqslant k+1)F(k+1)\end{aligned}$$

   Donc

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \prod_{j=k+1}^{k+n} F(j)F_0(k+n)$$

   Comme F_0 est une fonction de répartition, on a $F_0(n) \nearrow 1$ quand $n \to \infty$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant k) = \prod_{j=k+1}^{\infty} F(j)$$

3. On note $a_j = 1 - F(j)$. Comme $F(j) \nearrow 1$ quand $j \to \infty$, on a $a_j \searrow 0$ quand $j \to \infty$.
   Il existe $\delta > 0$ tel que $-2x \leqslant \log(1-x) \leqslant -x$ pour tout $x \in [0, \delta]$.
   Il existe n_0 tel que $a_j \in [0, \delta]$ pour tout $j \geqslant n_0$. Donc pour tout $n \geqslant n_0$,

$$-2\sum_{j=n_0}^{n} a_j \leqslant \log\Big[\prod_{j=n_0}^{n}(1-a_j)\Big] \leqslant -\sum_{j=n_0}^{n} a_j$$

   Par convergence monotone,

$$-2\sum_{j=n_0}^{\infty} a_j \leqslant \log\Big[\prod_{j=n_0}^{\infty}(1-a_j)\Big] \leqslant -\sum_{j=n_0}^{\infty} a_j$$

   Si $\prod_{j=1}^{\infty}(1-a_j) = 0$, alors la première inégalité impose que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$.
   Si $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty$, alors la seconde inégalité impose que $\prod_{j=1}^{\infty}(1-a_j) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_0] &= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(Y_0=j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\mathbb{P}(Y_0=j) \overset{Tonelli}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0=j) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0\geqslant k) = \mathbb{P}(Y_0\geqslant 1) + \sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0\geqslant k) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(Y_0 > k)
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}[Y_0] = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}[1-F(j)]$$

$\mathbb{E}[Y_0]=\infty$ ssi $\sum_{j=1}^{\infty}[1-F(j)]=\infty$ ssi $\prod_{j=1}^{\infty}F(j)=0$.

On a $\mathbb{P}(X_n=k)=\mathbb{P}(X_n\leqslant k)-\mathbb{P}(X_n\leqslant k-1)$, donc comme chaque terme converge, on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n=k) = \prod_{j=k+1}^{\infty}F(j) - \prod_{j=k}^{\infty}F(j) = \nu(k) \text{ avec } \nu(k) = [1-F(k)]\prod_{j=k+1}^{\infty}F(j)$$

ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$. On peut vérifier que ν est invariante par calcul :

$$\begin{aligned}
\nu Q(k) &= \sum_{l=0}^{\infty}\nu(l)Q(l,k) = \nu(k+1)F(k+1) + \sum_{l=0}^{k}\nu(l)[F(k+1)-F(k)] \\
&= [1-F(k+1)]\prod_{j=k+2}^{\infty}F(j)F(k+1) + [F(k+1)-F(k)]\prod_{j=k+1}^{\infty}F(j) \\
&= \prod_{j=k+1}^{\infty}F(j)\big[1-F(k+1)+F(k+1)-F(k)\big] \\
&= \nu(k)
\end{aligned}$$

Plus simplement on sait que pour tout k, n

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \sum_{l=0}^{k+1}\mathbb{P}(X_n=l)Q(l,k)$$

et on peut passer à la limite $n\to\infty$ pour obtenir $\nu(k)=\nu Q(k)$. Donc la chaîne possède une mesure de probabilité invariante, et elle est irréductible, elle est donc récurrente positive.

Exercice 4 (Corrigé exercice 4)

1. $m_t=\mathbb{E}[Z_t]=0$.
   Pour $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$, $\mathbb{E}[Z_sZ_t]=\mathbb{E}[B_sB_t]-t\mathbb{E}[B_1B_s]-s\mathbb{E}[B_1B_t]+st\mathbb{E}[B_1^2]=s-st=s(1-t)$.
   Donc $K(s,t)=\inf(s,t)-st$.
2. $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien de moyenne m_t et de covariance K.
   $(Z_{t'})_{t\in[0,1]}$ est aussi un processus gaussien de moyenne m_t et de covariance K. En effet, pour $0\leqslant s<t\leqslant 1$, $\mathbb{E}[Z'_sZ'_t]=\mathbb{E}[Z_{1-s}Z_{1-t}]=K(1-s,1-t)=K(s,t)$.
   Donc $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ et $(Z_{t'})_{t\in[0,1]}$ ont même loi.
3. On veut montrer que $Y_t\to 0$ quand $t\nearrow 1$. C'est équivalent à montrer (poser $s=t/(1-t)$ ou $t=s/(s+1)$) que $B_s/(s+1)\to 0$ quand $s\to+\infty$. Or

   $$\frac{B_s}{s+1}=\frac{B_s}{s}\frac{s}{s+1}$$

   Comme $B_s/s\to 0$ quand $s\to+\infty$ p.s. (c'est la loi des grands nombres pour le mouvement brownien) et comme $s/(s+1)\to 1$, on obtient que $B_s/(s+1)\to 0$ quand $s\to+\infty$ p.s..
   $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ est un processus gaussien. Sa fonction moyenne est nulle et sa fonction de covariance (pour $0\leqslant s\leqslant t<1$) est

   $$\mathbb{E}[Y_tY_s]=(1-t)(1-s)\mathbb{E}[B_{t/(1-t)}B_{s/(1-s)}]=(1-t)(1-s)[s/(1-s)]=(1-t)s$$

   On a aussi $\mathbb{E}[Y_tY_s]=0$ si $0\leqslant s\leqslant t=1$ car $Y_1=0$. Donc $(Y_t)_{t\in[0,1]}$ et $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ ont même loi.

4. Soit $F : \left| \begin{array}{l} C([0,1],\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \to C([0,1],\mathbb{R}) \\ (f,x) \mapsto g \end{array} \right.$ la fonction qui à tout $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$ associe $g \in C([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$g(t) = f(t) + xt \quad \forall t \in [0,1]$$

F est une fonction continue (avec la norme du sup pour C), et on a

$$\mathbb{E}\big[G(B) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] = \mathbb{E}\big[G \circ F(Z, B_1) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] = \frac{\mathbb{E}\big[G \circ F(Z,B_1)\mathbf{1}_{|B_1|<\varepsilon}\big]}{\mathbb{P}(|B_1| < \varepsilon)}$$

Comme Z et B_1 sont indépendants :

$$\mathbb{E}\big[G(B) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbb{E}\big[G \circ F(Z,b)\big] e^{-b^2/2} db}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-b^2/2} db}$$

ou encore

$$\mathbb{E}\big[G(B) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] = \frac{\int_{-1}^{1} \mathbb{E}\big[G \circ F(Z,\varepsilon b)\big] e^{-\varepsilon^2 b^2/2} db}{\int_{-1}^{1} e^{-\varepsilon^2 b^2/2} db}$$

En utilisant le théorème de convergence dominée pour le dénominateur et le numérateur, on trouve que

$$\mathbb{E}\big[G(B) \bigm| |B_1| < \varepsilon\big] \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}\big[G \circ F(Z,0)\big] = \mathbb{E}\big[G(Z)\big]$$

5. Cf le polycopié ou le cours : pour tout $a \geqslant 0$, pour tout $b \leqslant a$:

$$\mathbb{P}\big(\sup_{[0,1]} B_t \geqslant a, B_1 \leqslant b) = \mathbb{P}(B_1 \geqslant 2a - b)$$

On a, pour tout $a > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_1 \geqslant a) &= \lim_{b \to 0} \frac{\mathbb{P}(\sup_{[0,1]} B_t \geqslant a, -b \leqslant B_1 \leqslant b)}{\mathbb{P}(-b \leqslant B_1 \leqslant b)} \\ &= \lim_{b \to 0} \frac{\mathbb{P}(\sup_{[0,1]} B_t \geqslant a, B_1 \leqslant b) - \mathbb{P}(\sup_{[0,1]} B_t \geqslant a, B_1 \leqslant -b)}{\mathbb{P}(-b \leqslant B_1 \leqslant b)} \\ &= \lim_{b \to 0} \frac{\mathbb{P}(B_1 \geqslant 2a - b) - \mathbb{P}(B_1 \geqslant 2a + b)}{\mathbb{P}(-b \leqslant B_1 \leqslant b)} \\ &= \lim_{b \to 0} \frac{\mathbb{P}(2a - b \leqslant B_1 \leqslant 2a + b)}{\mathbb{P}(-b \leqslant B_1 \leqslant b)} \\ &= e^{-2a^2} \end{aligned}$$

Comme $Z_0 = 0$, on a $M_1 \geqslant 0$ p.s. et donc M_1 est une v.a à densité

$$p(a) = 4ae^{-2a^2} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(a)$$