Ecole Normale Supérieure
ENS

Année 2011-2012
FIMFA

Partiel

Durée : deux heures. Pas de document autorisé.
Le barème approximatif est 4/7/9.

Exercice 1 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ (c'est-à-dire $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$). On note $S = X + Y$.

1. Dans le cas $\lambda = \mu$, déterminer rapidement $\mathbb{E}[X|S]$.
2. Calculer la loi conditionnelle de X sachant S et reconnaître une loi binomiale dont on précisera les paramètres. Que vaut $\mathbb{E}[X|S]$?

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilités $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ et $\mathbb{P}$ =mesure de Lebesgue sur Ω.
Soit $I_{k,n} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(I_{0,n}, \dots, I_{2^n-1,n})$, $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne (il existe $L > 0$ tel que que $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ pour tous $x, y \in [0,1]$). On pose :

$$X_n(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{f((k+1)2^{-n}) - f(k2^{-n})}{2^{-n}} \mathbf{1}_{I_{k,n}}(\omega)$$

1. Montrer que $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ est une filtration, que X_n est intégrable et $\mathcal{F}_n$-mesurable, et enfin que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$-martingale.
2. Montrer que X_n converge p.s. quand $n \to \infty$. On note X_∞ sa limite.
3. Discuter la convergence de X_n dans L^1.
4. Montrer que pour tous $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left[X_\infty \mathbf{1}_{[a,b]}\right] = f(b) - f(a)$$

5. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, expliciter X_∞.

Exercice 3 On considère une équation d'évolution aléatoire :

$$X_{n+1} - X_n = X_n r_{n+1}, \qquad X_0 = 1 \tag{1}$$

où les r_k sont des v.a. bornées à valeurs dans $]-1, +\infty[$. On note $R_n = \sum_{k=1}^n r_k$ et $R_0 = 0$.

1. On note $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ et $\mathcal{F}_n^R = \sigma(R_0, \dots, R_n)$. Que dire des filtrations $(\mathcal{F}_n^X)_{n\geqslant 0}$ et $(\mathcal{F}_n^R)_{n\geqslant 0}$?
2. Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale si et seulement si $(R_n)_{n\geqslant 0}$ l'est.
3. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que les r_k sont i.i.d. de loi commune $\mathrm{P}(r_1 = \varepsilon) = \mathrm{P}(r_1 = -\varepsilon) = 1/2$.
   (a) Montrer que X_n tend vers 0 quand $n \to \infty$ p.s.. La convergence a-t-elle lieu dans L^1 ?
   (b) Soit $z > 1$ fixé. On note T_z le temps de premier passage de X_n au dessus de z : $T_z = \inf\{n \geqslant 1, X_n \geqslant z\}$ (avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).
   Sur $\{T_z < +\infty\}$, déterminer une borne supérieure et une borne inférieure pour X_{T_z}.
   Montrer que

$$\frac{1}{z(1+\varepsilon)} \leqslant \mathrm{P}(T_z < \infty) \leqslant \frac{1}{z}$$