Processus aléatoires | **Partiel (2 heures), 14.11.2016**
ENS Paris, 2016 − 2017 | Sans document et sans calculatrice

Cette épreuve comporte deux questions de cours, deux exercices et un problème indépendants.

Question 1. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace complet séparable $\mathcal{X}$.

(a) Que signifie l'assertion "la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est tendue" ? (donner la définition)

(b) Que signifie l'assertion "$X_n \overset{(d)}{\to} X$ quand $n \to \infty$" ? (donner la définition)

(c) Énoncer le théorème de Prokhorov.

(d) Énoncer le théorème de Donsker.

Question 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0} \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

(a) Que signifie l'assertion "$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est une filtration et le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à cette filtration" ? Soit $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une variable aléatoire. Que signifie l'assertion "T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$" ? (donner les définitions)

(b) Que signifie l'assertion "$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$" ? (donner la définition de l'espérance conditionnelle)

(c) Énoncer le théorème d'arrêt (pour les martingales ou sous-martingales) sous la forme la plus générale dont vous vous rappelez.

(d) Donner un exemple d'une martingale (ou sous-martingale) et d'un temps d'arrêt pour lesquels le théorème d'arrêt n'est pas valide.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire dans $L^1(\Omega)$ et soient $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{A}_2$ est indépendante de $\sigma(X) \vee \mathcal{A}_1$ (la plus petite tribu contenant $\sigma(X)$ et $\mathcal{A}_1$). Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{A}_1].$$

Indication: commencer par $A = A_1 \cap A_2$ avec $A_i \in \mathcal{A}_i$, puis utiliser le lemme de classe monotone.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $[0, 1]$ et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$. Supposons que $X_0 = a$ et que, pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{P}[\, X_{n+1} = \tfrac{1}{2} X_n \mid \mathcal{F}_n \,] = 1 - X_n, \qquad \mathbb{P}[\, 1 - X_{n+1} = \tfrac{1}{2}(1 - X_n) \mid \mathcal{F}_n \,] = X_n.$$

(a) Vérifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et montrer qu'elle converge vers une variable aléatoire Y presque sûrement et dans L^p pour tout $p \geq 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}[Y \in \{0, 1\}] = 1$ et trouver la loi de Y.

TOURNEZ LA PAGE!

Problème. Soit $(S_n)_{n\geq 0}$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, i.e. $S_n = \xi_0 + \ldots + \xi_n$ où les ξ_k sont i.i.d. et $\mathbb{P}[\xi_k = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\tau_k := \min\{n \geq 0 : |S_n| = k\}$.

(a) Montrer que $\tau_k < +\infty$ presque sûrement.

(b) Soit $|\theta| < \frac{\pi}{2k}$. Vérifier que le processus $X_n := (\cos\theta)^{-n}\cos(\theta S_n)$ est une martingale (par rapport à la filtration canonique de $(S_n)_{n\geq 0}$). En déduire que

$$\mathbb{E}[(\cos\theta)^{-\tau_k}] \leq (\cos\theta k)^{-1}.$$

(c) Montrer qu'on a en fait $\mathbb{E}[(\cos\theta)^{-\tau_k}] = (\cos\theta k)^{-1}$.

(d) Soit $t > 0$ et $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$. Montrer que

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}[\max_{m=0,..,\lfloor tN\rfloor} |S_m| < \sqrt{N}\,] \;\leq\; (\cos\alpha)^{-1}\cdot\exp(-\tfrac{\alpha^2}{2}\,t)\,.$$

(e) En prenant $\alpha = \frac{\pi}{2} - c\cdot t^{-1}$, vérifier que

$$\liminf_{N\to\infty} \mathbb{P}[\max_{m=0,..,\lfloor tN\rfloor} |S_m| < \sqrt{N}\,] \;=\; O(t\cdot\exp(-\tfrac{\pi^2}{8}\,t))$$

uniformément en $t \geq 1$.

(f) En déduire que

$$\mathbb{P}[\sup_{s\in[0,t]} |B_s| < 1] \;=\; O(t\cdot\exp(-\tfrac{\pi^2}{8}\,t)) \;\text{ quand }\; t\to\infty,$$

où $(B_s)_{s\geq 0}$ est le mouvement brownien (en dimension 1).

(g) En utilisant l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle, en déduire que

$$\mathbb{P}[\sup_{s\in[0,1]} |B_s| \leq \varepsilon\,] \;=\; O(\varepsilon^{-2}\cdot\exp(-\tfrac{\pi^2}{8}\,\varepsilon^{-2})) \;\text{ quand }\; \varepsilon\to 0.$$

Que peut-on dire de $\mathbb{P}[\sup_{s\in[0,1]} |B_s| = \varepsilon]$?

(*) Comment obtenir une borne dans l'autre sens ? Par exemple, montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}[\sup_{s\in[0,1]} |B_s| \leq \varepsilon] \;\geq\; c\exp(-c\varepsilon^{-2}) \;\text{ quand }\; \varepsilon\to 0.$$