Processus aléatoires **(3 heures), 17.01.2017**
ENS Paris, 2016 − 2017 Sans document et sans calculatrice

Le sujet est composé de deux questions de cours, un exercice préliminaire et trois problèmes quasiment indépendants.

Question 1. (a) Quand dit-on qu'un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une sous-martingale pour sa filtration canonique ?

(b) Formuler l'inégalité maximale de Doob pour les sous-martingales.

(c) Soit $1 \leq p < +\infty$ et soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une martingale telle que $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq 1$ pour tout $n \geq 0$. On pose $X_n^* := \max_{0\leq k\leq n} |X_n|$. Pour $p > 1$, donner une borne uniforme pour la suite $(\mathbb{E}[|X_n^*|^p])_{n\geq 0}$. Pour $p = 1$, est-il toujours vrai que la suite $(\mathbb{E}[|X_n^*|])_{n\geq 0}$ est bornée ?

Question 2. (a) Quand dit-on qu'un processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur un espace d'états (dénombrable) E de matrice de transition $Q(x, y)$? Donner toutes les définitions nécessaires.

(b) Quand dit-on qu'une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible ? Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est irréductible, quand dit-on qu'elle est récurrente ? Qu'elle est transiente ?

(c) Quand dit-on qu'une mesure π sur E est invariante pour $(X_n)_{n\geq 0}$? Si X est récurrente, comment construire une mesure invariante pour X ?

(d) Décrire la différence entre une chaîne récurrente positive et une chaîne récurrente nulle, et donner une expression de l'espérance du temps de retour $\mathbb{E}^x[\tau_x]$, où $\tau_x := \min\{n > 0 | X_n = x\}$.

Dans l'exercice et les problèmes qui suivent, on suppose que $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ est une suite de variables i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ de loi $\mu : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ avec

$$\mathbb{E}[|\xi|] < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\xi] < 0.$$

$$\text{On pose} \quad S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n \quad \text{et} \quad M := \max\nolimits_{n\geq 0} S_n.$$

Dans certaines questions (précisées dans la suite), on se limitera au cas $\mu(+1) = p < \frac{1}{2}$ et $\mu(-1) = q = 1 - p > p$ (i.e. à la marche simple biaisée sur $\mathbb{Z}$).

Exercice. (a) Justifier que $M < +\infty$ p.s.

(b) On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que $\mu(k) = 0$ pour tout $k \geq 2$ et on pose $\psi(\lambda) := \log \mathbb{E}[\exp(\lambda\xi)]$ pour tout $\lambda \geq 0$. En utilisant l'inégalité de Hölder, vérifier que ψ est une fonction convexe sur $[0, +\infty[$.

(c) Calculer $\psi'(0^+)$ et en déduire qu'il existe un unique $\lambda_0 > 0$ tel que $\psi(\lambda_0) = 0$. Vérifier que $\lambda_0 = \log(q/p)$ pour la marche simple biaisée sur $\mathbb{Z}$.

(d) Vérifier que $Z_n := \exp(\lambda_0 S_n)$ est une martingale et, en utilisant l'inégalité maximale de Doob, montrer que $\mathbb{P}(M \geq k) \leq \exp(-\lambda_0 k)$ pour tout $k \geq 0$.

(e) On pose $\tau_k := \min\{n > 0 : S_n = k\}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} Z_{n\wedge\tau_k} = e^{\lambda_0 k}\mathbb{1}_{\tau_k<+\infty}$. Calculer $\mathbb{P}(\tau_k < +\infty)$, et la loi de la variable M. Comparer le résultat avec celui obtenu en (d).

Tournez la page !

Problème 1. On suppose que $\mu(1) = p > 0$ et $\mu(k) = 0$ pour tout $k \geq 2$.
(a) Justifier que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible. Est-elle récurrente ?
(b) Soit $M_n := \max_{0\leq k\leq n} S_k$. On considère le processus $(M_n, M_n - S_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Montrer que c'est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition.

Dans tout le reste du problème, on se restreint à la marche simple biaisée sur $\mathbb{Z}$ (cf. page précédente). On rappelle que dans ce cas on a $\lambda_0 = \log(q/p)$.
(c) Étant donné $m \geq 0$, on définit une fonction g de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}^+$ comme suit : $g(a,b) := (p/q)^{a+b-m}$ si $a < m$; $g(a,b) := (1-p/q)^{-1}(1-(p/q)^{b+1})$ si $a = m$; et $g(a,b) := 0$ si $a > m$. Vérifier que cette fonction est harmonique pour la chaîne de Markov définie en (b).
(d) Étant donné $m \geq 0$, on considère le processus $(M_n, M_n - S_n)_{n\geq 0}$ conditionné à l'événement $\{\max_{n\geq 0} M_n = m\}$. Montrer que c'est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition. Décrire les transitions de la marche simple biaisée sur $\mathbb{Z}$ conditionnée à l'événement $\{\max_{n\geq 0} S_n = m\}$. Est-ce une chaîne de Markov ?

Dans les deux problèmes qui suivent, on supposera que $\mu(k) = 0$ pour tout $k < -1$, que $\mu(-1) = q > 0$ et qu'il existe $k > 0$ tel que $\mu(k) > 0$. On suppose toujours $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=-1}^{+\infty} k\mu(k) < 0$. On considère la chaîne de Markov R définie par

$$R_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad R_{n+1} := (R_n + \xi_{n+1}) \wedge 0.$$

Problème 2. (a) Vérifier que $(R_n)_{n\geq 0}$ est irréductible. Est-elle récurrente ou transiente ?
(b) Soient $m(x) := \sum_{k\geq 0} \mu(k-1)x^k$, $x \in [0,1]$ et $p(x) := \sum_{k\geq 0} \pi(k)x^k$ la série génératrice (formelle) de la mesure invariante π de $(R_n)_{n\geq 0}$, normalisée de telle manière que $p(0) = \pi(0) = 1$. Montrer que

$$p(x) = \frac{(1-x)m(0)}{m(x) - x}.$$

(c) Montrer que m est convexe sur $[0,1]$ et que $m(x) > x$ sur $[0,1[$. En déduire que $p(x)$ est bien définie sur $[0,1]$ et que $(R_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive.
(d) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}^k(R_n = 0)$ existe pour tout $k \geq 0$ et calculer sa valeur.

Problème 3. Dans ce problème, on suppose également que $\psi(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda\xi}] < +\infty$ pour tout $\lambda \geq 0$. Dans ce qui suit, on utilisera la notation $\tau_0 := \inf\{n > 0 : R_n = 0\}$.
(a) On pose $\psi(\lambda_{\min}) := \inf_{\lambda\geq 0} \psi(\lambda)$ et $r := \exp(\psi(\lambda_{\min}))$. Soit $Z_n = r^{-n}\exp(\lambda_{\min} R_n)$. Vérifier que $(Z_{n\wedge\tau_0})_{n\geq 0}$ est une martingale et en déduire que $\mathbb{P}^k(\tau_0 \geq n) \leq r^n \exp(\lambda_{\min} k)$.
(b) Montrer qu'il existe c tel que $\mathbb{E}^\pi[\tau_0 \geq n] \leq cr^n$ pour tout $n \geq 0$, où $\mathbb{E}^\pi$ est la mesure sous laquelle la loi de R_0 est la mesure de probabilité π invariante de $(R_n)_{n\geq 0}$.
(c) Construire un couplage monotone de deux chaînes de Markov R^0 (démarrée de 0) et R^π (démarrée d'un entier choisi selon la mesure invariante) et montrer qu'il existe c' tel que $\sum_{k\geq 0} |\mathbb{P}^0(R_n = k) - \pi(k)| \leq c' r^n$ pour tout $n \geq 0$.

(*) Trouver la valeur de r dans le cas où $(R_n)_{n\geq 0}$ est construit à partir de la marche simple biaisée sur $\mathbb{Z}$. La question (c) donne-t-elle une vitesse de mélange optimale ?