Processus aléatoires **13h00–16h00, 19.01.2018**

ENS Paris, 2017 – 2018 Documents non autorisés

Question 1. (a) Donner la définition axiomatique (par une liste de propriétés) d'un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ de dimension 1.

(b) Décrire (sans preuves) la construction de Lévy de $(B_t)_{t\geq 0}$.

(c) Donner une définition du pont brownien $(\overline{B}_t)_{t\in[0,1]}$. Expliquer pourquoi $(\overline{B}_t)_{t\in[0,1]}$ peut être considéré comme $(B_t)_{t\in[0,1]}$ « conditionné » à l'événement $B_1 = 0$.

Question 2. (a) Soit $X \in L^1(\Omega)$ une variable aléatoire et $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ une tribu. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

(b) Que signifie l'assertion « $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ » ?

(c) Soit (X_n) une martingale, $p > 1$ et $C < +\infty$ une constante telle que $\mathbb{E}[|X_n|^p] \leq C$ pour tout n. Que peut-on dire de la convergence de X_n quand $n \to \infty$ et de la limite ?

Question 3. (a) Que signifie l'assertion « $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov irréductible sur un espace d'état dénombrable E » ? (donner toutes les définitions nécessaires)

(b) Que signifie l'assertion « $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente » (donner la définition) ? Énoncer le théorème ergodique pour les chaînes de Markov récurrentes irréductibles.

(c) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov récurrente irréductible. Expliquer comment construire une mesure invariante π pour cette chaîne. Que peut-on dire concernant l'unicité de π ?

Problème 1. Soit $Q_N := \{0,1\}^N$ un hypercube de dimension N, et soit (X_n) une marche aléatoire simple sur Q_N issue de $X_0 = (0,\dots,0)$, i.e. pour tous $n \geq 0$, $1 \leq k \leq N$ et $s \in Q_N$:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = (s_1,\dots,s_{k-1}, 1-s_k, s_{k+1},\dots,s_d) \mid X_n = (s_1,\dots,s_N)] = \tfrac{1}{N}. \tag{1}$$

(a) Quelle est la mesure de probabilité invariante π de cette chaîne de Markov ? Est-il vrai que pour tout $x \in Q_N$, on a $\mathbb{P}[X_n = x] \to \pi(x)$ quand $n \to \infty$?

(b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_{2n} = x] \in \{0; 2^{1-N}\}$ pour tout $x \in Q_N$.

(c) Soit $S_n := \sum_{k=1}^N X_n^{(k)} \in \{0,\dots,N\}$, où $X_n^{(k)} \in \{0,1\}$ est la k-ième coordonnée de X_n. Est-il vrai que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov ? Si oui, quelle est sa mesure invariante ?

On considère maintenant une marche aléatoire *paresseuse* (Y_n) (issue de $(0,\dots,0)$) à la place de (X_n) : les probabilités de transition $\frac{1}{N}$ de (1) sont remplacées par $\frac{1}{2N}$, ainsi que $\mathbb{P}[Y_{n+1} = Y_n \mid Y_n] = \frac{1}{2}$. On pose

$$d_N(n) := \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_{x\in Q_N} \left|\mathbb{P}[Y_n = x] - 2^{-N}\right|.$$

(d) Construire un couplage de (Y_n) et d'une chaîne de Markov $(\widetilde{Y}_n)$ démarrée selon la mesure uniforme et dont les transitions sont les mêmes que celles de (Y_n). Pour tout $\delta > 0$, montrer qu'on a $d_N\left((1+\delta)N\log N\right) \to 0$ quand $N \to \infty$.

[*Indication :* remarquer que les transitions de (Y_n) peuvent se décrire comme suit : on choisit uniformément au hasard une coordonnée k parmi $1,\dots,N$, puis on lance une pièce non biaisée et en fonction du résultat, soit on remplace s_k par $1-s_k$ pour obtenir Y_{n+1}, soit $Y_{n+1} = Y_n$.]

Problème 2. Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale (par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$) de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}[M_n^2] < +\infty$ pour tout n) telle que $M_0 = 0$. On définit le processus $\langle M\rangle$ par récurrence comme suit :

$$\langle M\rangle_0 := 0, \quad \langle M\rangle_{n+1} := \langle M\rangle_n + \mathbb{E}[M_{n+1}^2 - M_n^2 \,|\, \mathcal{F}_n].$$

Remarquons que le processus $\langle M\rangle_n$ est *prévisible* : $\langle M\rangle_{n+1}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \geq 0$.

(a) Vérifier que $M_n^2 - \langle M\rangle_n$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale et que $\langle M\rangle_n$ est un processus croissant, c'est-à-dire que $0 = \langle M\rangle_0 \leq \langle M\rangle_1 \leq \langle M\rangle_2 \leq \ldots$ p.s.. On pose $\langle M\rangle_\infty := \lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_n$.

(b) Réciproquement, on suppose que $M_n^2 = Y_n + A_n$, où $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une martingale et $(A_n)_{n\geq 0}$ est un processus prévisible croissant avec $A_0 = 0$. Montrer que $A_n = \langle M\rangle_n$ p.s..

(c) Pour tout $a > 0$, on pose $\tau_a := \inf\{n \geq 0 | \langle M\rangle_{n+1} \geq a\}$. Vérifier que τ_a est un temps d'arrêt et montrer que la martingale $(M_{n\wedge\tau_a})$ converge (quand $n \to \infty$) p.s. et dans L^2.

(d) En déduire que M_n converge p.s. sur l'événement $\{\langle M\rangle_\infty < +\infty\}$.

(e) On pose $X_n := \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1}) \cdot (1 + \langle M\rangle_k)^{-1}$ (et $X_0 := 0$). Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale de carré intégrable et que $\langle X\rangle_{n+1} - \langle X\rangle_n \leq (1 + \langle M\rangle_n)^{-1} - (1 + \langle M\rangle_{n+1})^{-1}$.

(f) En déduire que (X_n) converge p.s.. En utilisant **(g)**, prouver que $M_n/\langle M\rangle_n \to 0$ p.s. sur l'événement $\{\langle M\rangle_\infty = +\infty\}$.

(g) Lemme (Kronecker) : Soit (a_n) une suite croissante positive avec $a_n \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Soit (x_n) une suite telle que la série $\sum_{n=1}^\infty x_n/a_n$ converge. Alors $s_n/a_n \to 0$ quand $n \to \infty$, où $s_n := x_1 + \ldots + x_n$.
[*Indication :* écrire $s_n/a_n = u_n - a_n^{-1}\sum_{k=1}^n u_{k-1}(a_k - a_{k-1})$, où $u_n = \sum_{k=1}^n x_k/a_k$.]

Problème 3. Soient $\xi_n : \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires i.i.d.. On définit une chaîne de Markov $(R_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ comme suit : $R_0 := 0$ et $R_{n+1} := (R_n + \xi_n - 1) \wedge 0$ pour tout $n \geq 0$ (cette chaîne modélise une file d'attente : à chaque minute, un nombre aléatoire ξ_n de clients arrive et un client part). Dans toute la suite, on supposera $\mathbb{P}[\xi_n = 0] > 0$ et $\mathbb{P}[\xi_n \neq 0] > 0$.

(a) Vérifier que (R_n) est irréductible. Déduire de la loi des grands nombres qu'elle est transiente si $\mathbb{E}[\xi_n] > 1$ et récurrente si $\mathbb{E}[\xi_n] < 1$.
[*Indication :* Comparer R_n avec la marche aléatoire $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k - 1)$.]

(b) On suppose dans les questions **(b)**, **(c)** et **(d)** que $\mathbb{E}[\xi_n] < 1$. Montrer que la mesure invariante π (normalisée telle que $\pi(0) = 1$) est finie et donc que $(R_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive.
[*Indication :* Soit $g(x) := \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}[\xi_n = k]x^k$ et $p(x) := \sum_{k\geq 0}\pi(k)x^k$. Justifier que $p(x)$ est bien définie au moins pour $x \in [0, g(0)[$. Vérifier que le fait que π est invariante se réécrit $p(x)(g(x) - x) = (1 - x)g(0)$ et montrer que $p(x)$ est bien définie sur $[0, 1]$ et que $p(1) < +\infty$.]

(c) On suppose $\mathbb{E}[\xi_n^p] < +\infty$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $k^{1-p} \cdot \mathbb{E}_k[\tau_k] \to +\infty$ quand $k \to \infty$, où $\tau_k := \inf\{n > 0 : R_n = k\}$ désigne le temps de retour en k.

(d) On suppose maintenant (en plus de $\mathbb{E}[\xi_n] < 1$) que $\psi(\lambda) := \log\mathbb{E}[e^{\lambda\xi_n}] < +\infty$ pour tout $\lambda > 0$. Soit $\lambda_* := \arg\min_{\lambda\in(0,\infty)}(\psi(\lambda) - \lambda)$. Justifier que $\psi(\lambda_*) - \lambda_* < 0$ et montrer que

$$\mathbb{P}_k[\tau_0 \geq n] \leq \exp\left(n(\psi(\lambda_*) - \lambda_*) + k\lambda_*\right).$$

[*Indication :* Construire une martingale appropriée.]

(e) On suppose maintenant $\mathbb{E}[\xi_n]$=1. La chaîne de Markov est-elle transiente, récurrente nulle ou récurrente positive ?