**Processus aléatoires** | **Partiel (2 heures), 10.11.2017**
ENS Paris, 2017−2018 | Sans document et sans calculatrice

**Question 1.** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace complet séparable $\mathcal{X}$.

**(a)** Que signifie l'assertion "$X_n \overset{(d)}{\to} X$ quand $n \to \infty$" ? (donner une définition)

**(b)** Énoncer le théorème de Portmanteau (donner plusieurs conditions équivalentes à $X_n \overset{(d)}{\to} X$).

**(c)** Énoncer le théorème de Donsker.

**Question 2.** Soit $(X_n)_{n\geq 0} \in L^1(\Omega)^{\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-tribus de $\mathcal{A}$.

**(a)** Que signifie l'assertion "$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ est une filtration et le processus $(X_n)_{n\geq 0}$ est adapté à cette filtration" ? Soit $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une variable aléatoire. Que signifie l'assertion "$T$ est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$" ? (donner les définitions)

**(b)** Que signifie l'assertion "$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$" ? (donner la définition de l'espérance conditionnelle)

**(c)** Énoncer le théorème d'arrêt des martingales (sous la forme la plus générale dont vous vous rappelez).

**Problème 1.** Le but de ce problème est de déterminer la loi de la variable aléatoire $\sup_{t\geq 0}(B_t - \frac{1}{2}t)$, où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de dimension 1. Soit $S_n := \xi_1 + ... + \xi_n$ une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 0 (autrement dit, les $\xi_k$ sont i.i.d. avec $\mathbb{P}[\xi_k = \pm 1] = \frac{1}{2}$).

**(a)** Étant donné $\theta > 0$, trouver $\beta(\theta) > 0$ tel que le processus $M_n := \exp(\theta S_n - \beta(\theta)n)$ soit une martingale (pour la filtration $(\sigma(S_1, .., S_n))_{n\geq 0}$). Vérifier qu'on a $\beta(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4)$ quand $\theta \to 0$.

**(b)** Soit $N > 0$ entier et $\theta = \theta^{(N)} := N^{-1/2}$. Étant donné $a > 0$, on définit

$$\tau_a = \tau_a^{(N)} := \inf\big\{n \geq 0 : \ \theta S_n - \beta(\theta)n \ \geq \ a\big\}.$$

On considère la martingale $M_n$ introduite en (a). Justifier que $M_{n\wedge\tau_a} \to Z$ p.s. quand $n \to \infty$, où $Z$ est une variable aléatoire. En déduire que p.s., $\tau_a < \infty$ ou $\theta S_n - \beta(\theta)n \to -\infty$.

**(c)** Justifier qu'on peut appliquer le théorème d'arrêt à $(M_n)_{n\geq 0}$ et montrer qu'on a $\exp(-a - N^{-1/2}) \ \leq \ \mathbb{P}[\tau_a < \infty] \ \leq \ \exp(-a)$.

**(d)** En utilisant le théorème de Donsker, montrer que pour tout $T > 0$, le processus $(Y_t^{(N)}) := \big(N^{-1/2}S_{\lfloor Nt\rfloor} - \beta(N^{-1/2})Nt\big)_{t\in[0,T]}$ converge vers $(B_t - \frac{1}{2}t)_{t\in[0,T]}$ quand $N \to \infty$.

**(e)** Montrer que $\mathbb{P}[TN < \tau_a^{(N)} < \infty] = o(1)$ quand $T \to \infty$ uniformément en $N$. *Indication:* Estimer $\mathbb{P}[Y_T^{(N)} \geq -\frac{1}{4}T]$ et utiliser (c) pour traiter le cas $Y_T^{(N)} \leq -\frac{1}{4}T$.

**(f)** Déduire de (d) et (e) que $\mathbb{P}[\max_{t\in[0,T]}(B_t - \frac{1}{2}t) \geq a] \geq \exp(-a) + o(1)$ et que $\mathbb{P}[\max_{t\in[0,T]}(B_t - \frac{1}{2}t) \leq a] \geq 1 - \exp(-a) + o(1)$ quand $T \to \infty$.

**(g)** Quelle est la loi de la variable $\sup_{t\geq 0}(B_t - \frac{1}{2}t)$ ? Étant donné $b > 0$, quelle est la loi de la variable $\sup_{t\geq 0}(B_t - bt)$ ?

**Problème 2.** Soit $(X_k)_{k\geq 0}$ une suite de variables indépendentes strictement positives (pas forcément i.i.d.), telles que $\mathbb{E}X_k = 1$. On pose $a_k := \mathbb{E}[X_k^{1/2}]$ et $M_n := \prod_{k=1}^n X_k$.

**(a)** Montrer que $M_n \to M_\infty$ p.s. quand $n \to \infty$, où $M_\infty$ est une variable aléatoire.

**(b)** Vérifier que $N_n := \prod_{k=1}^n a_k^{-1} X_k^{1/2}$ est une martingale, et montrer que la condition $\prod_{k=1}^\infty a_k = 0$ implique $M_\infty = 0$ p.s.. *Indication:* $N_n \in L^2$.

**(c)** Montrer que la condition $\prod_{k=1}^\infty a_k > 0$ implique que $M_n \to M_\infty$ dans $L^1$ (et en particulier $\mathbb{E}M_\infty = 1$).

Soient $(X_{m,k})_{m\geq 0,\ k=0,1,\ldots,2^m-1}$ des variables i.i.d. strictement positives, avec $\mathbb{E}X_{m,k} = 1$. On considère la suite de mesures $\mu_n$ sur $[0,1[$ définies par $d\mu_n := w_n d\lambda$, où

$$w_n(x) := \prod_{m=0}^{n-1} X_{m,\lfloor 2^m x\rfloor}, \quad x \in [0,1[$$

(notons que (b) implique que $w_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $x$ fixé). Soit $l_n := \mu_n([0,1[)$.

**(d)** Montrer que la loi de $l_{n+1}$ est la même que la loi de $\frac{1}{2}X \cdot (l_n' + l_n'')$, où $X, l_n', l_n''$ sont indépendantes, $X$ a la loi de $X_{m,k}$ et $l_n', l_n''$ ont la loi de $l_n$.

**(e)** Montrer que $l_n \to l_\infty$ p.s., où $l_\infty$ est une variable aléatoire.

**(f)** Montrer que $\mathbb{P}[l_\infty = 0] = (\mathbb{P}[l_\infty = 0])^2$, de sorte que $l_\infty > 0$ p.s. ou $l_\infty = 0$ p.s..

On suppose maintenant que $a := \mathbb{E}[X \log_2 X] < 1$. Le but de la fin du problème est de montrer que dans ce cas $l_\infty > 0$, et donc que les mesures $\mu_n$ ne tendent pas vers la mesure nulle dans la limite $n \to \infty$.

**(g)** On pose $b_n := \mathbb{E}[l_n \log_2 l_n]$ (notons que $x \log_2 x \geq -\frac{1}{2}$). Déduire de (d) que

$$b_{n+1} - b_n \;=\; a - 1 + \mathbb{E}[l_n' \log_2(1 + l_n''/l_n')].$$

**(h)** En utilisant l'inégalité de Jensen, en déduire

$$b_{n+1} - b_n \;\leq\; a - 1 + \mathbb{E}[l_n \log_2(1 + l_n^{-1})].$$

En conclure que $\mathbb{E}[l_n \log_2(1 + l_n^{-1})] \geq \frac{1}{2}(1 - a) > 0$ pour une infinité de valeurs de $n$.

**(i)** Déduire de (h) que, pour $\varepsilon$ assez petit, on a $\mathbb{P}[l_n \geq \varepsilon] \geq \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de $n$, et donc qu'on ne peut pas avoir $l_n \to 0$ p.s..