Processus aléatoires **Corrigé du partiel**
ENS Paris, 2017 – 2018

Voir le cours pour les corrigés des questions de cours. Les 6 questions étaient chacune notées sur 1 point.

Problème 1

(a) (**2 points**) Voir TD 7, exercice 3.5. On obtient $\beta(\theta) = \log(\cosh\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^4)$.

(b) (**1 point**) M est une martingale et τ_a un temps d'arrêt, donc $(M_{\tau_a \wedge n})$ est une martingale positive, donc converge p.s.. De plus, supposons $\tau_a = +\infty$, de sorte que $M_n = M_{\tau_a \wedge n} \to Z$. Si $Z = 0$, alors $\theta S_n - \beta n \to -\infty$. Sinon, $\theta S_n - \beta n \to \log Z$, ce qui est absurde car pour tout n :

$$|(\theta S_{n+1} - \beta(n+1)) - (\theta S_n - \beta n)| \geq \theta - \beta.$$

(c) (**2 points**) D'après le théorème d'arrêt, $\mathbb{E}[M_{\tau_a \wedge k}] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ pour tout k. Or, d'après (b), quand $k \to +\infty$, on a $M_{\tau_a \wedge k} \to M_{\tau_a}$ si $\tau_a < +\infty$ et 0 sinon. De plus, $M_{\tau_a - 1} < e^a$ par définition de τ_a donc $M_{\tau_a} < e^{a+\theta}$, donc par convergence dominée $\mathbb{E}[M_{\tau_a}] = 1$. On a de plus

$$e^a \mathbb{1}_{\tau_a < +\infty} \leq M_{\tau_a} \leq e^{a+\theta} \mathbb{1}_{\tau_a < +\infty},$$

d'où le résultat en prenant l'espérance.

(d) (**1 point**) $Y^{(N)}$ est la somme de deux termes. Quand $N \to +\infty$, le premier converge en loi vers B par le théorème de Donsker. Le second vaut $\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) t$ quand $N \to +\infty$. La somme des deux converge donc en loi par le lemme de Slutsky.

(e) (**3 points**) On a $\mathbb{P}\left(TN < \tau_a^{(N)} < +\infty\right) \leq \mathbb{P}\left(Y_T^{(N)} \geq -\frac{1}{4}T\right) + \mathbb{P}\left(Y_T^{(N)} < -\frac{1}{4}T, TN < \tau_a^{(N)} < +\infty\right)$.
Or, d'après le théorème de Portmanteau et (d), on a

$$\limsup_N \mathbb{P}\left(Y_T^{(N)} \geq -\frac{T}{4}\right) \leq \mathbb{P}\left(B_T - \frac{T}{2} \geq -\frac{T}{4}\right) = \mathbb{P}\left(B_T \geq \frac{T}{4}\right) \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0.$$

D'autre part, supposons que $Y_T^{(N)} < -\frac{1}{4}T$ mais que $TN < \tau_a^{(N)} < +\infty$. On pose $\widetilde{S}_k = S_{k+TN} - S_{TN}$. Notons que $\widetilde{S}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. Alors il existe $k > 0$ tel que $\theta S_{k+TN} - \beta(k + TN) \geq a$, soit $\theta \widetilde{S}_k - \beta k \geq a + \beta TN - \theta S_{TN} \geq a + \frac{T}{4}$ (la première inégalité vient de la définition de $\widetilde{S}$ et la seconde de l'hypothèse sur $Y_T^{(N)}$). Mais comme $\widetilde{S}$ est une marche aléatoire simple, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists k, \theta \widetilde{S}_k - \beta k \geq a + \frac{T}{4}\right) = \mathbb{P}\left(\tau_{a+T/4}^{(N)} < +\infty\right) \leq e^{-a-T/4} \xrightarrow[T \to +\infty]{} 0,$$

en utilisant (c) à la fin.

(f) (**1 point**) D'après Portmanteau et (d), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{[0,T]} B_t - t/2 \geq a\right) &\geq \limsup_N \mathbb{P}\left(\max_{[0,T]} Y^{(N)} \geq a\right) \\
&= \limsup_N \mathbb{P}\left(\tau_a^{(N)} \leq TN\right) \\
&= \limsup_N \left(\mathbb{P}\left(\tau_a^{(N)} < +\infty\right) - \mathbb{P}\left(TN < \tau_a^{(N)} < +\infty\right)\right).
\end{aligned}$$

D'après (c), le premier terme tend vers e^{-a} quand $N \to +\infty$. D'après (e), le second terme est $o(1)$ quand $T \to +\infty$, uniformément en N, d'où le résultat. Le raisonnement pour la borne dans l'autre sens est similaire.

(g) (**2 points**) Soit $a > 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \leq a\right) = \lim_{T\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \leq a\right) \geq 1 - e^{-a}$$

d'après (f). D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a (toujours d'après (f))

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) > a - \varepsilon\right) &= \lim_{T\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) > a - \varepsilon\right) \\
&\geq \liminf_{T\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{t\in[0,T]}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \geq a\right) \\
&= e^{-a}
\end{aligned}$$

et, en faisant tendre ε vers 0, on obtient $\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0}\left(B_t - \frac{t}{2}\right) \geq a\right) \geq e^{-a}$. Comme la somme des deux événements vaut au plus 1, on a égalité dans les deux dernières inégalités, donc $\sup_{t\geq 0}(B_t - t/2)$ est exponentielle de paramètre 1. De plus, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\sup_{t\geq 0}(B_t - bt) = \sup_{t\geq 0} B_{\alpha t} - b\alpha t \sim \sup_{t\geq 0}(\sqrt{\alpha}B_t - b\alpha t) = \sqrt{\alpha}\sup_{t\geq 0}(B_t - \sqrt{\alpha}bt),$$

en utilisant l'invariance du mouvement brownien par changement d'échelle. En prenant $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{2b}$, on en déduit que $\sup_{t\geq 0}(B_t - bt)$ est exponentielle de paramètre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 2b$.

Problème 2

(a) (**2 points**) M est un produit de variables positives indépendantes d'espérance 1, donc c'est une martingale positive, donc M converge p.s..

(b) (**2 points**) Il y avait une erreur particulièrement facétieuse dans l'énoncé : l'indication "$N_n \in L^2$" était destinée à la question (c) plutôt qu'à la (b). La question (b) traite justement le cas où N n'est pas bornée dans L^2, donc ne converge pas dans L^2.

Notons tout d'abord que les a_k sont bien définis car par Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}[X_k^{1/2}]^2 \leq \mathbb{E}[X_k] = 1 < +\infty$. De même qu'en (a), N est un produit de variables positives indépendantes d'espérance 1, donc N est une martingale positive, donc elle converge p.s. vers une variable N_∞. On a de plus $M_n = N_n^2 \prod_{k=1}^n a_k^2$ pour tout n, donc $M_\infty = N_\infty^2 \prod_{k=1}^\infty a_k = 0$ p.s..

(c) (**2 points**) On a $\mathbb{E}[N_n^2] = \prod_{k=1}^n (a_k^{-2}\mathbb{E}[X_k]) = \prod_{k=1}^n a_k^{-2}$ qui est borné, donc N est bornée dans L^2, donc N converge dans L^2. La manière la plus rapide de conclure est de remarquer qu'on a $\mathbb{E}[N_\infty^2] = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}[N_n^2] = \left(\prod_{k=1}^\infty a_k\right)^{-2}$, donc $\mathbb{E}[M_\infty] = \mathbb{E}\left[N_\infty^2 \left(\prod_{k=1}^\infty a_k\right)^2\right] = 1$. D'après le lemme de Scheffé, on a donc $M_n \xrightarrow{L^1} M_\infty$. On pouvait également majorer $\mathbb{E}[|M_n - M_\infty|]$ en l'exprimant en fonction de N et en utilisant Cauchy–Schwarz.

(d) (**2 points**) Soit $X = X_{0,0}$. Pour tous $m \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^m - 1$, on pose aussi $X'_{m,k} = X_{m+1,k}$ et $X''_{m,k} = X_{m+1,2^{m-1}+k}$. On construit w'_n, l'_n à partir des X' et w''_n, l''_n à partir des X'' de la même manière qu'on a construit w_n, l_n à partir des X. Ainsi, X, l'_n et l''_n sont indépendantes (car elles dépendent de $X_{m,k}$ différents), et l'_n et l''_n ont la même loi que l_n. De plus, on peut vérifier que pour tout $x \in [0,1[$, on a

$$w_{n+1}(x) = \begin{cases} Xw'_n(2x) & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ Xw'_n(2x-1) & \text{si } x \in [1/2, 1[. \end{cases}$$

On en déduit $l_{n+1} = \frac{1}{2}X(l'_n + l''_n)$.

(e) (**1 points**) Comme l est positive, il suffit de vérifier que c'est une martingale. Soit $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les $X_{m,k}$ pour $m \le n-1$. Alors l est adapté à $(\mathcal{F}_n)$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[l_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= \sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{2^n}\mathbb{E}\left[\prod_{m=0}^{n} X_{m,\lfloor 2^{m-n}k\rfloor}|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{2^n}\prod_{m=0}^{n-1} X_{m,\lfloor 2^{m-n}k\rfloor}\mathbb{E}[X_{n,k}] \\
&= \sum_{k'=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-1}}\prod_{m=0}^{n-1} X_{m,\lfloor 2^{m-n+1}k\rfloor} \\
&= l_n.
\end{aligned}$$

(f) (**1 points**) On utilise (d) : on a $l_\infty = \frac{1}{2}X(l'_\infty + l''_\infty)$ donc $l_\infty = 0$ ssi $l'_\infty = l''_\infty = 0$, ce qui arrive avec proba $\mathbb{P}(l_\infty = 0)^2$.

(g) (**2 points**) On utilise (d) :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[X(l'_n + l''_n)\left(\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 X + \log_2(l'_n + l''_n)\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[Xl'_n\left(\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 X + \log_2(l'_n + l''_n)\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[l'_n] + \mathbb{E}[X\log_2 X]\mathbb{E}[l'_n] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[l'_n\log_2(l'_n + l''_n)] \\
&= -1 + a + \mathbb{E}[l'_n\log_2 l'_n] + \mathbb{E}\left[l'_n\log_2\left(1 + \frac{l''_n}{l'_n}\right)\right],
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat (la deuxième ligne est obtenue par symétrie des rôles de l'_n et l''_n).

(h) (**1 point**) Pour tout a, la fonction $x \to a\log_2(1 + x/a)$ est concave, donc d'après l'inégalité de Jensen $\mathbb{E}[a\log_2(1 + l''_n/a)] \ge a\log_2(1 + \mathbb{E}[l''_n/a]) = a\log_2(1 + 1/a)$. On en déduit $\mathbb{E}[l'_n\log_2(1 + l''_n/l'_n)|l'_n] \ge l'_n\log_2(1 + 1/l'_n)$, puis le résultat en prenant l'espérance.
De plus, on sait que $b_n \ge -1/2$ pour tout n, donc il existe une infinité de n tels que $b_{n+1} - b_n \ge \frac{a-1}{2}$ (sinon on aurait $b_n \to -\infty$, car $\frac{a-1}{2} < 0$). En utilisant la formule qu'on vient de montrer, on a alors $\mathbb{E}\left[l_n\log_2(1 + 1/l_n)\right] \ge \frac{1-a}{2}$.

(i) (**1 point**) La fonction $f : x \to x\log_2(1 + x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, tend vers 0 en 0 et vers 1 à l'infini, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante C. On en déduit, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1-a}{2} \le \mathbb{E}\left[f(l_n)\right] \le C\mathbb{P}\left(f(l_n) \ge \varepsilon\right) + \varepsilon,$$

donc $\mathbb{P}\left(f(l_n) \ge \varepsilon\right) \ge \frac{(1-a)/2-\varepsilon}{C}$ pour une infinité de n. En choisissant par exemple $\varepsilon = \frac{1-a}{4}$, on troue $\varepsilon, \delta > 0$ tels que $\mathbb{P}\left(f(l_n) \ge \varepsilon\right) \ge \delta$ pour une infinité de n. Or, f ne tend vers 0 qu'en 0, donc il existe η tel que si $f(l_n) \le \varepsilon$, alors $l_n \le \eta$. On a donc $\mathbb{P}\left(l_n \ge \eta\right) \ge \delta$ pour une infinité de n, donc on ne peut pas avoir $l_n \to 0$ p.s..