

# Pavage de l'hexagone par losanges

Nicolas Protopopoff

Mémoire de première année  
sous la direction de Cédric Boutillier

## Résumé

Ce mémoire porte sur problème du pavage d'un hexagone par des losanges. Nous allons voir différentes approches pour calculer le nombre de tels pavages. On démontrera en particulier la formule de MacMahon, puis on s'intéressera à la « forme » typique du pavage quand la taille de l'hexagone tend vers l'infini.

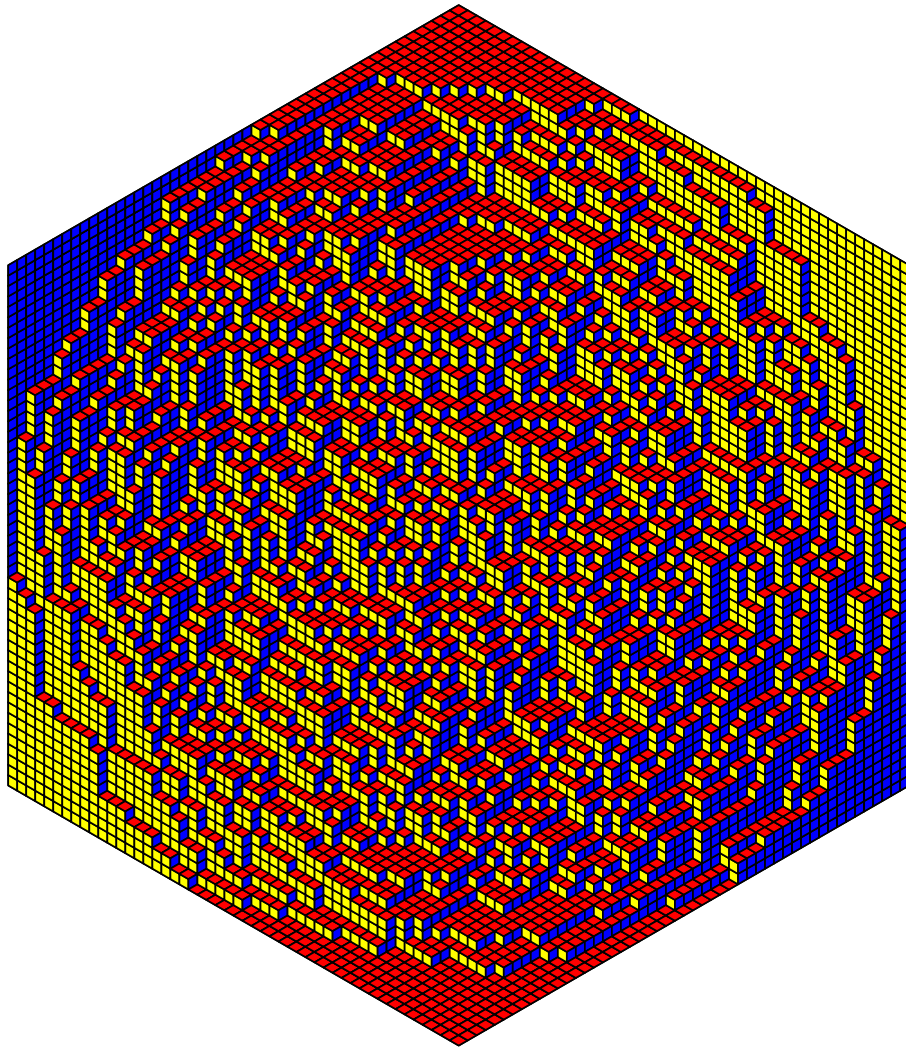


FIGURE 1 – Un pavage de l'hexagone de côté 50

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation</b>	<b>3</b>
1.1	Généralités . . . . .	3
1.2	Fonction hauteur . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Approche de Kasteleyn</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>Approche de Gessel-Viennot</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Fonction hauteur typique</b>	<b>17</b>

# Chapitre 1

## Présentation

### 1.1 Généralités

On se place dans le réseau régulier triangulaire du plan  $\mathbb{R}^2$ . On peut former des losanges de côté 1 en collant deux triangles adjacents du réseau. Un domaine du réseau triangulaire est dit pavé par des losanges si on a réuni les triangles de ce domaine deux par deux de façon à former des losanges (voir figure 1.1). Il y a deux types de triangles : ceux qui pointent à droite, qu'on colorie en noir, et ceux qui pointent à gauche, qu'on colorie en blanc (voir figure 1.2). Il y a donc trois types de losanges (voir figure 1.3).

Une condition nécessaire à l'existence d'un pavage d'une région est qu'elle contienne autant de triangles noirs que blancs. Ce n'est pas une condition suffisante :

**Exemple.** Dans la figure 1.4, le domaine considéré contient autant de triangles noirs et blancs mais il n'existe aucun pavage.

On se restreint maintenant au cas d'un hexagone d'angles  $\frac{2\pi}{3}$  et de côtés  $a, b, c, a, b, c$  ( $c$  étant la longueur du côté vertical par convention, voir

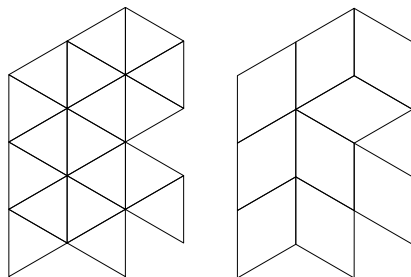


FIGURE 1.1 – Un exemple de pavage par losanges

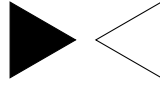


FIGURE 1.2 – Triangles noir et blanc

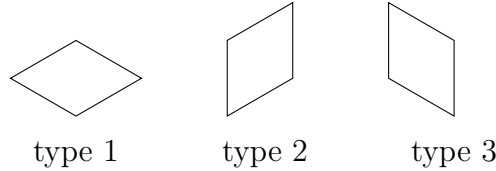


FIGURE 1.3 – Les trois types de losange

figure 1.5). Dans le cas d'un hexagone de côté 1, il y a deux pavages possibles (voir figure 1.6)

**Définition.** Un **couplage parfait** d'un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble  $F$  d'arêtes tel que de chaque sommet  $x \in V$  part une et une seule arête appartenant à  $F$  (voir figure 1.7).

On verra plus loin le lien entre pavage et couplage parfait. Il est possible de visualiser un pavage de l'hexagone comme un empilement de cubes (voir figure 1.8).

**Définition.** Une **partition plane d'un entier  $n$**  est une fonction  $\pi_{i,j} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \pi_{i,j} = n$  et  $\pi_{i,j} \geq \pi_{i+1,j}$  et  $\pi_{i,j} \geq \pi_{i,j+1} \quad \forall i, j \in \mathbb{N}$ . Le diagramme de Young d'une partition plane est l'empilement de cubes élémentaires dans  $\mathbb{N}^3$  qui représente cette partition (voir figure 1.8 diagramme de Young d'une partition plane de 20).

On peut voir un pavage de l'hexagone  $H_{a,b,c}$  (voir figure 1.5) comme le diagramme de Young de la partition d'un entier dans le plan, contenue dans dans une boîte (parallélépipède rectangle collé aux axes  $x, y$  et  $z$ ) de côtés  $a, b, c$  (voir figure 1.8 avec  $a = b = c = 3$ ). On voit qu'il y a bijection entre

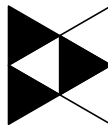


FIGURE 1.4 – Il est impossible de paver ce domaine

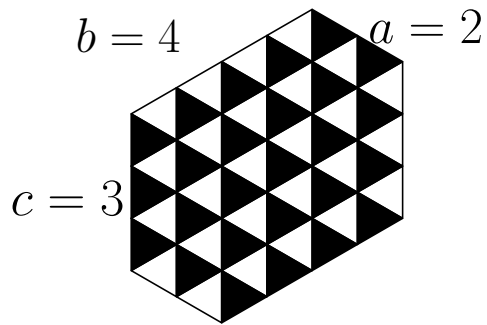


FIGURE 1.5 –  $H_{2,4,3}$

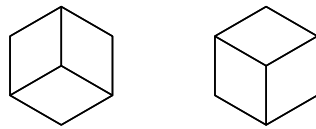


FIGURE 1.6 – Les pavages de l'hexagone de côté 1

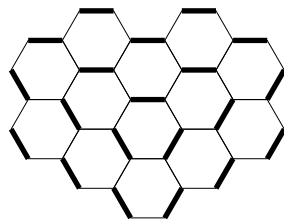


FIGURE 1.7 – Un couplage parfait d'un graphe du réseau hexagonal

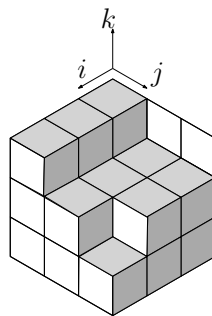


FIGURE 1.8 – Pavage-empilement de cubes

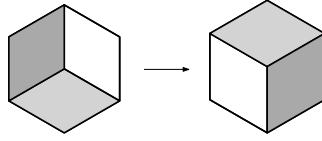


FIGURE 1.9 – Opération élémentaire d'ajout d'un cube

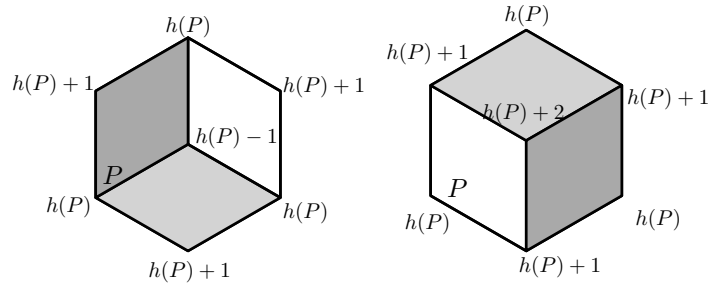


FIGURE 1.10 – Variations attendues de la fonction  $h$

les pavages de  $H_{a,b,c}$  et les empilements de cubes contenus dans la boîte. Il est possible de passer d'un pavage à un autre en effectuant plusieurs fois l'opération élémentaire correspondant à l'ajout ou le retrait d'un cube sur l'empilement (voir figure 1.9). Cela permet d'associer à chaque pavage une fonction hauteur  $h$ , qui représente la distance à laquelle on voit les sommets des cubes représentés par le pavage depuis le plan  $\{x + y + z = 0\}$ . On voudrait définir  $h$  telle que les variations sur les losanges soient celles de la figure 1.10). Nous allons en donner une construction générale.

## 1.2 Fonction hauteur

Soit  $G = (V, E)$  un graphe planaire. Il est possible de définir un graphe  $G^*$  dual de  $G$ , dont les sommets sont les faces de  $G$ . Deux sommets de  $G^*$  sont reliés par une arête si les faces de  $G$  correspondantes sont adjacentes. Le réseau dual du réseau triangulaire est le réseau hexagonal (voir figure 1.11). Le coloriage noir et blanc des triangles devient un coloriage des sommets du réseau hexagonal. Le coloriage biparti des sommets du réseau hexagonal revient à orienter le graphe. Fixons par convention : pour les sommets  $\epsilon(\bullet) = +1$  et  $\epsilon(\circ) = -1$ , pour les arêtes  $\epsilon(\circ \rightarrow \bullet) = +1$  et  $\epsilon(\bullet \rightarrow \circ) = -1$ . Soit  $C_o(G)$  (respectivement  $C_1(G)$ , respectivement  $C_2(G)$ ) l'ensemble des fonctions des sommets (respectivement des arêtes, respectivement des faces) de  $G$  dans  $\mathbb{R}$ . On peut définir une différentielle discrète  $d$  sur ces fonctions :



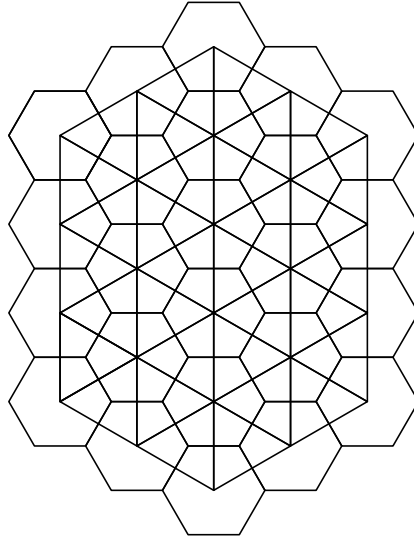


FIGURE 1.11 – Le réseau hexagonal est le dual du réseau triangulaire

soit  $f \in C_0(G)$ , on définit  $df \in C_1(G)$  par

$$df(e) = \sum_{v \in \partial e} \epsilon(v) f(v)$$

autrement dit  $df(x \rightarrow y) = f(y) - f(x)$ . Soit  $f \in C_1(G)$ ,  $z$  une face de  $G$ , on définit  $df \in C_2(G)$  par

$$df(z) = \sum_{e \in \partial z} \epsilon(e) f(e).$$

*Remarque.* Le dual  $G^*$  de  $G$  est aussi un graphe orienté (voir figure 1.12) Le passage au dual pour les graphes orientés n'est plus une involution puisque  $G^{**}$  est  $G$  avec une orientation des arêtes inversée.

Si  $f \in C_k(G)$ ,  $*f \in C_{2-k}(G^*)$  est définie de façon canonique par passage au dual. On peut aussi définir l'opérateur  $\text{div} := *d* : C_1(G) \rightarrow C_0(G)$ . C'est une sorte de divergence : Soit  $f \in C_1(G)$  et  $v$  un sommet de  $G$ ;  $\text{div} f(v) = \sum_{v \sim e} \epsilon(e) f(e)$ . Comme dans le cas continu, sur un domaine simplement connexe, les formes exactes sont les formes fermées, et une fonction de divergence nulle dérive d'un potentiel :

$$\begin{aligned} df = 0 &\iff \exists \alpha \in C_0(G), d\alpha = f \\ *d*f = 0 &\implies \exists h \in C_2(G), d*h = *f \end{aligned}$$

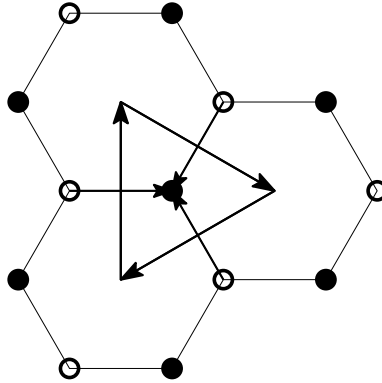


FIGURE 1.12 – L'orientation des réseaux triangulaire et hexagonal

Si on voit le pavage de l'hexagone comme une bijection entre les triangles noirs et les triangles blancs (pour former les losanges), cela correspond dans le réseau dual hexagonal à un couplage parfait des sommets (*dimer covering*, voir figure 1.7). Soit  $G$  la partie du réseau triangulaire contenue dans l'hexagone  $H_{a,b,c}$ . On cherche à définir une fonction  $h \in C_0(G)$  qui caractérise le pavage. Soit  $f \in C_1(G^*)$  définie par

$$f(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ est dans le couplage parfait} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\text{div } f(\bullet) = -1$  et  $\text{div } f(\circ) = +1$ . Or il existe une fonction constante qui a la même divergence :  $f_0(e) = \frac{1}{3}$ . Ainsi,  $\text{div}(f - f_0) = 0$  donc

$$\exists h \in C_2(G^*), \text{ d} *h = *(f - f_0)$$

Alors,  $*h \in C_0(G)$  et  $*h$  est définie à une constante près. Pour avoir les variations voulues (voir figure 1.10), il faut renormaliser par  $-\frac{1}{3}$ . On a défini une fonction hauteur qui caractérise le pavage.

# Chapitre 2

## Approche de Kasteleyn

Considérons les pavages de l'hexagone comme des couplages parfaits dans le réseau hexagonal dual. Si on note  $A$  l'ensemble des sommets noirs du réseau hexagonal et  $B$  l'ensemble des sommets blancs, chaque pavage correspond alors à une bijection  $\sigma$  entre  $A$  et  $B$ , et telle que pour tout  $i \in A$ ,  $i$  et  $\sigma(i)$  sont adjacents. Soit  $K$  la matrice d'adjacence entre  $A$  et  $B$  ( $K$  est la matrice de Kasteleyn). Les lignes de  $K$  sont indexées par  $A$  et les colonnes par  $B$ .

$$K_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Théorème** ((1960), voir [1]). *Le nombre de pavages est  $N = |\det(K)|$ .*

*Remarque.*  $\det(K)$  est défini au signe près puisque renuméroter les éléments de  $A$  (respectivement de  $B$ ) revient à échanger les lignes (respectivement les colonnes) de  $K$ . En choisissant correctement la numérotation, on peut s'arranger pour que  $\det(K) \geq 0$ .

*Démonstration.*

$$\det(K) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) K_{1,\sigma(1)} \cdots K_{n,\sigma(n)}$$

Dans cette somme, seuls les couplages parfaits contribuent puisque la condition d'adjacence pour  $\sigma$  équivaut à  $K_{1,\sigma(1)} \cdots K_{n,\sigma(n)} \neq 0$

$$\det(K) = \sum_{\sigma \text{ couplage parfait}} \text{sgn}(\sigma)$$

Il reste à voir que tous les couplages parfaits correspondent à des permutations de même signature. Soit  $\sigma$  et  $\tau$  les permutations de deux couplages

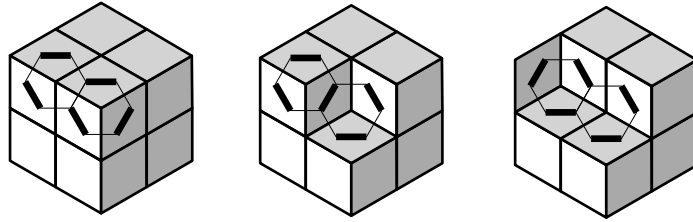


FIGURE 2.1 – Retrait d'un cube à l'empilement

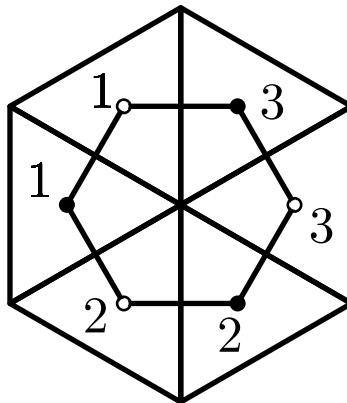


FIGURE 2.2 –  $H_{1,1,1}$  : numérotation des sommets du dual

parfaits. Montrons que  $\text{sgn}(\sigma \circ \tau^{-1}) = 1$ . On peut passer de la configuration correspondant à  $\sigma$  à celle correspondant à  $\tau$  en faisant une suite d'opérations élémentaires qui, dans l'image tridimensionnelle, reviennent à ajouter ou enlever un cube. Enlever ou ajouter un cube sur l'empilement correspondant au couplage parfait  $\sigma$  revient à composer  $\sigma$  par un 3-cycle de  $A$  (voir figure 2.1). Ainsi, on peut passer de  $\sigma$  à  $\tau$  en composant par des 3-cycles. Les 3-cycles sont paires donc on a bien montré que les permutations correspondant à deux couplages parfaits avaient même signature. Ainsi  $N = |\det(K)|$ .  $\square$

**Exemple.** Appliquons cette méthode au cas simple  $a = b = c = 1$  (voir figure 2.2).

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $\det(K) = 1 - (-1) = 2$  comme on s'y attendait.

Cette méthode s'étend à des pavages plus généraux : dans une région quelconque du réseau triangulaire, et aussi avec des pavages par dominos du

réseau carré  $\mathbb{Z}^2$  (il faut adapter). Cependant, le déterminant obtenu n'est pas très explicite en général. Voici une autre approche permettant d'aboutir à une formule exacte du nombre de pavage, due à MacMahon au début du XX<sup>e</sup> siècle.

# Chapitre 3

## Approche de Gessel-Viennot

Cette partie est inspirée de [2]. On considère un pavage d'un hexagone de côtés  $a, b, c$   $H_{a,b,c}$  ( $c$  pour le côté vertical par convention). Sur un côté vertical sont nécessairement collés des losanges avec un côté vertical (type 2 ou 3, voir figure 1.3). De même, à côté d'un tel losange, il y a forcément encore un côté vertical. Ainsi, il y a un chemin de losanges de type 2 ou 3, de cotés verticaux adjacents, qui va nécessairement d'un côté à l'autre de l'hexagone (voir figure 3.1). On se place dans un repère approprié et on repère les losanges de type 2 et 3 par la coordonnée de leur point en haut à gauche (voir figure 3.2).

**Définition.** Soit  $1 \leq i, j \leq c$ . Un **chemin**  $\pi$  d'un point  $(0, i)$  à un point  $(a + b, \frac{a-b}{2} + j)$  est un  $(a + b)$ -uplet

$$((0, i), (1, y_1), \dots, (a + b - 1, y_{a+b-1}), (a + b, \frac{a-b}{2} + j))$$

de points adjacents dans le réseau triangulaire. On note  $\pi(i)$  l'ordonnée du  $i$ -ème point de  $\pi$ . Soit  $\sigma$  une permutation de  $[[1; c]]$ .

Un  $c$ -**chemin**  $p$  de  $(0, 1), \dots, (0, c)$  à  $(a + b, \frac{a-b}{2} + \sigma(1)), \dots, (a + b, \frac{a-b}{2} + \sigma(c))$

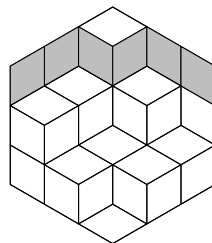


FIGURE 3.1 – Un chemin de losanges

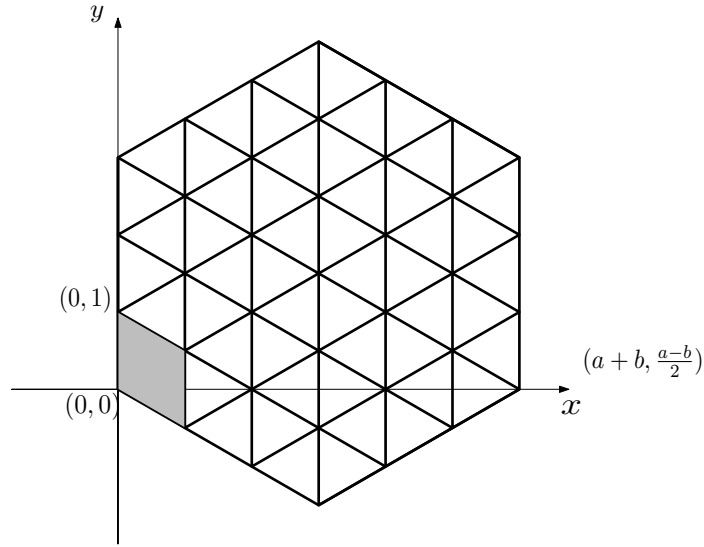


FIGURE 3.2 – Repère de l'hexagone

est un  $c$ -uplet de chemins  $(p_1, p_2, \dots, p_c)$  tel que  $\forall i \in [1; c]$ ,  $p_i$  va de  $(0, i)$  à  $(a + b, \frac{a-b}{2} + \sigma(i))$ .

Un  $c$ -**chemin sans croisement** est un  $c$ -chemin tel que pour tous  $i \neq j$ , les chemins  $p_i$  et  $p_j$  n'ont pas de points en commun.

*Remarque (1).* La définition est telle que tous les chemins sont contenus dans l'hexagone.

*Remarque (2).* Un  $c$ -chemin sans croisement est nécessairement un  $c$ -chemin de  $((0, i), 1 \leq i \leq c)$  à  $((a + b, \frac{a-b}{2} + i), 1 \leq i \leq c)$ .

À un pavage de l'hexagone correspond un unique  $c$ -chemin sans croisement. La réciproque est vraie : à partir d'un  $c$ -chemin sans croisement, on peut replacer de proche en proches tous les losanges de type 2 et 3. Les losanges qui restent sont alors les losanges de type 1 (sans côté vertical) et le pavage est reconstitué. Ainsi dénombrer le nombre  $N_{a,b,c}$  de pavages de l'hexagone  $H_{a,b,c}$  revient à compter le nombre de  $c$ -chemins sans croisement.

**Théorème** (Formule de MacMahon). *Le nombre de pavages de l'hexagone  $H_{a,b,c}$  est*

$$N_{a,b,c} = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, le nombre de chemins possibles de  $(0, i)$  à  $(a + b, \frac{a-b}{2} + j)$  est  $\binom{a+b}{a-i+j}$ . En effet, un tel chemin  $p$  est déterminé par le

choix des  $0 \leq x \leq a + b - 1$  tels que  $(x, y) \in p \Rightarrow (x + 1, y + 1/2) \in p$  (autrement dit les points où le chemin monte). Il faut en choisir  $a - i + j$  pour que le point d'arrivée soit le bon :

$$i + \frac{1}{2}(a - i + j) - \frac{1}{2}(a + b - (a - i + j)) = \frac{a - b}{2} + j.$$

Ainsi il y en a  $\binom{a+b}{a-i+j}$ . Soit  $N_\sigma$  le nombre de  $c$ -chemins de  $((0, i), 1 \leq i \leq c)$  à  $((a + b, \frac{a-b}{2} + \sigma(i)), 1 \leq i \leq c)$ .  $N_\sigma = \prod_{i=1}^c \binom{a+b}{a-i+\sigma(i)}$  puisque les chemins d'un  $c$ -chemin donné sont indépendants. Montrons que

$$N_{a,b,c} = \det_{1 \leq i, j \leq c} \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right).$$

En effet, si  $\sigma(p)$  est la permutation associée au  $c$ -chemin  $p$ ,

$$\det_{1 \leq i, j \leq c} \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) N_\sigma = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{n=1}^{N_\sigma} \text{sgn}(\sigma) = \sum_{p \text{ c-chemin}} \text{sgn}(\sigma(p)).$$

Il y a simplification d'un grand nombre de termes dans cette somme. On va associer deux par deux tous les chemins avec croisements, de telle sorte que les signatures de chaque couple soient opposées. Soit  $p = (p_1, \dots, p_c)$  un  $c$ -chemin avec croisements. Soit  $i_0 = \min\{i \in [1; c], \exists j, p_i \cap p_j \neq \emptyset\}$  l'indice le plus bas tel que  $p_{i_0}$  a un point de croisement avec un autre chemin de  $p$ , et  $(x_0, y_0)$  le point de croisement de  $p_{i_0}$  d'abscisse minimale. Soit  $p_{i_1}$  le chemin qui croise  $p_{i_0}$  en ce point. Soit  $p'$  défini par :

$$\begin{cases} p'_{i_0}(x) = \begin{cases} p_{i_0}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq x_0, \\ p_{i_1}(x) & \text{si } x_0 \leq x \leq a + b, \end{cases} \\ p'_{i_1}(x) = \begin{cases} p_{i_1}(x) & \text{si } 0 \leq x \leq x_0, \\ p_{i_0}(x) & \text{si } x_0 \leq x \leq a + b, \end{cases} \\ p'_i = p_i & \text{si } i \neq i_0 \text{ et } i \neq i_1. \end{cases}$$

$p'$  est le  $c$ -chemin où on bifurque de  $p_{i_0}$  à  $p_{i_1}$  lors de leur premier croisement. On associe  $p'$  et  $p$ . C'est légal : si  $p$  est un  $c$ -chemin avec croisements, alors les minima existent,  $p'$  est bien défini et c'est un  $c$ -chemin avec croisements. De plus, à  $p'$  est bien associé  $p$  et ils sont distincts. En fait  $\sigma(p') = \sigma(p) \circ \tau_{p_{i_0}(a+b), p_{i_1}(a+b)}$  (on a échangé deux des points d'arrivée). Les signatures sont donc opposées. Ainsi il y a simplification deux à deux des termes de la somme correspondant à des  $c$ -chemins avec croisements.

$$\det_{1 \leq i, j \leq c} \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right) = \sum_{p \text{ c-chemin sans croisement}} \text{sgn}(\sigma(p))$$



Pour un chemin sans croisement, on a vu que  $\sigma(p) = \text{Id}$  donc  $\text{sgn}(\sigma(p)) = 1$  et

$$\det_{1 \leq i, j \leq c} \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right) = N.$$

Enfin, il reste à vérifier que

$$\det_{1 \leq i, j \leq c} \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right) = \prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}.$$

On peut le montrer par récurrence, en utilisant la méthode suivante, tirée de [6]. Si  $M$  est une matrice de taille  $n$ , on note  $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$  la matrice  $M$  à laquelle on a retiré les  $i_1$ -ème, ...,  $i_k$ -ème lignes et les  $j_1$ -ème, ...,  $j_k$ -ème colonnes. Sachant que  $M \times {}^t \text{Com}(M) = \det(M) \text{Id}_n$  et en calculant de deux manières différentes

$$\det(M \times \begin{bmatrix} {}^t \text{Com}(M)_{1,1} & 0 \dots 0 & {}^t \text{Com}(M)_{1,n} \\ \vdots & \text{Id}_{n-2} & \vdots \\ {}^t \text{Com}(M)_{n,1} & 0 \dots 0 & {}^t \text{Com}(M)_{n,n} \end{bmatrix})$$

on obtient la formule de condensation de Desnanot-Jacobi (ou aussi formule de condensation de Dogson) :

$$\det(M) \det(M_{1,n}^{1,n}) = \det(M_1^1) \det(M_n^n) - \det(M_1^n) \det(M_n^1)$$

Si  $M(a, b, c) = \left( \binom{a+b}{a-i+j} \right)_{1 \leq i, j \leq c}$  alors

- $M(a, b, c)_c^c = M(a, b, c-1)$ ,
- $M(a, b, c)_1^1 = M(a, b, c-1)$ ,
- $M(a, b, c)_c^1 = M(a+1, b-1, c-1)$ ,
- $M(a, b, c)_1^c = M(a-1, b+1, c-1)$ ,
- $M(a, b, c)_{1,c}^{1,c} = M(a, b, c-2)$ .

On a donc la relation de récurrence :

$$\det M(a, b, c+1) \det M(a, b, c-1) = \det M(a, b, c)^2 - \det M(a+1, b-1, c) \det M(a-1, b-1, c).$$

Il suffit alors de vérifier la formule de MacMahon pour  $c=1$  et  $c=2$  et que la relation de récurrence est vraie pour  $\prod_{i=1}^a \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^c \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}$ .

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^b \prod_{k=1}^a \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2} &= \prod_{i=1}^c \prod_{j=1}^b \frac{i+j+a-1}{i+j-1} \\ &= \prod_{i=1}^c \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \end{aligned}$$

Montrons la relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
I &:= \prod_{i=1}^{c+1} \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \prod_{i=1}^{c-1} \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \\
&\quad - \left[ \prod_{i=1}^c \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \right]^2 \\
&\quad + \prod_{i=1}^c \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-2)!(i+b)!} \prod_{i=1}^c \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a)!(i+b-2)!} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
I &= \left[ \prod_{i=1}^{c-1} \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \right]^2 \\
&\quad \times \left[ \frac{(a+b+c)!c!(a+b+c-1)!(c-1)!}{(c+a)!(c+b)!(c+a-1)!(c+b-1)!} \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{(a+b+c-1)!(c-1)!}{(c+a-1)!(c+b-1)!} \right]^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{[(a+b+c-1)!(c-1)!]^2 b! a!}{(a-1)!(b-1)!(c+a)!(c+b)!(c+b-1)(c+a-1)!} \right],
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
I &= \left[ \prod_{i=1}^{c-1} \frac{(i+b+a-1)!(i-1)!}{(i+a-1)!(i+b-1)!} \right]^2 \times \frac{[(a+b+c-1)!(c-1)!]^2}{(c+b-1)!(c+a-1)!} \\
&\quad \times \left[ \frac{(a+b+c)c}{(c+a)!(c+b)!} - \frac{1}{(c+a-1)!(c+b-1)!} + \frac{ba}{(c+a)!(c+b)!} \right].
\end{aligned}$$

Or ce dernier crochet est

$$\frac{1}{(c+a)!(c+b)!} [(a+b+c)c - (c+b)(c+a) + ba] = 0$$

Donc  $I = 0$  et la relation de récurrence est vérifiée. □

# Chapitre 4

## Fonction hauteur typique

On tire un pavage de l'hexagone  $H_{a,b,c}$  au hasard selon une loi uniforme parmi tous ceux possibles. Alors on observe une organisation des losanges dans certaines régions de l'hexagone, lorsque  $a, b, c$  tendent vers l'infini (voir figure page 1). Plus précisément, hors de l'ellipse inscrite dans l'hexagone, la probabilité que le pavage soit "gelé" (i.e. que tous les losanges soient dans la même direction à chaque coin) tend vers 1.

On se place sur la  $k$ -ème colonne de  $H_{a,b,c}$  en partant de la gauche :  $\{(k, y) \in H_{a,b,c}\}$ . Cette colonne intersecte un certain nombre de losanges horizontaux (type 1, voir figure 1.3). La position de ces losanges détermine la forme de la fonction hauteur  $h$  sur la colonne. En effet, si part du haut et que l'on descend le long de la colonne,  $h$  diminue de 1 quand on longe un losange avec un côté vertical (type 2 ou 3) et augmente de 2 quand on traverse un losange horizontal (type 1), voir figure 4.1.

Pour trouver la fonction hauteur la plus probable, on s'intéresse donc au nombre de pavages avec sur la  $k$ -ème colonne des triangles horizontaux aux positions fixées  $b - \frac{k}{2} \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_l < b + \frac{k}{2}$  ( $l$  est le nombre de losanges horizontaux le long de la colonne,  $l = \min(k, a, c)$  si  $k \leq \frac{a+c}{2}$ ). Le calcul est fait dans [5] à l'aide de motifs de Gelfand. Soit  $M_{a,b,c,k}(a_1, \dots, a_l)$  ce nombre. On cherche un maximum.  $\ln(M)$  est interprété comme la somme de Riemann d'une double intégrale. Il est possible de modifier légèrement l'intégrale de façon à ce qu'elle ait un maximum atteint en un seul point.

$$\frac{\ln(M)}{n^2} = \nu(h) + \text{constante} + o(1) \quad \text{quand } n = a + b + c \rightarrow \infty$$

où  $h$  est la fonction hauteur renormalisée le long de la colonne et  $\nu$  une fonctionnelle continue qui atteint son maximum en un unique point  $h_0$ .

**Théorème.**  $\forall \epsilon > 0 \quad \mathbb{P}(\sup_t |h(t) - h_0(t)| < \epsilon) \rightarrow 1 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$

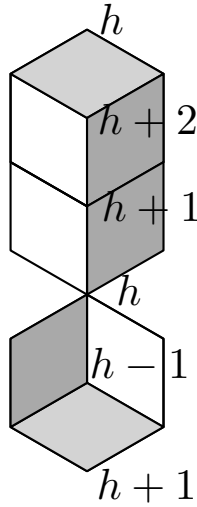


FIGURE 4.1 – Fonction hauteur le long d’une colonne

*idée de preuve* : Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|\nu(h) - \nu(h_0)| < \delta \Rightarrow \sup_t |h(t) - h_0(t)| < \epsilon.$$

Ainsi, si  $\sup_t |h(t) - h_0(t)| > \epsilon$  alors  $M(h) < M(h_0)e^{-n^2(\delta+0(1))}$ . La fonction hauteur  $h$  à une probabilité d’apparaître  $e^{-n^2}$  fois moins grande que  $h_0$ .  $\square$

Une expression de  $h_0$  est donnée dans [5]. En particulier, les régions dans les coins sont gelées comme dans la figure page 1.

# Bibliographie

- [1] Kenyon R., Les Houches, lectures on the dimer model.
- [2] Gessel I., Viennot, X., Binomial determinants, paths, and hook length formulae, *Adv. in Math* 58 (1985) no 3, 300–321
- [3] Johansson, K., Non-intersecting paths, random tilings and random matrices, *Probab. Theory Related Fields* 123 (2002), no. 2, 225–280.
- [4] Jockusch, W., Propp, J., Shor, P., Random domino tilings and the arctic circle theorem, preprint 1995, arXiv ://math.CO/9801068
- [5] Cohn H., Larsen M., Propp J., The shape of a typical boxed plane partition, *New York J. Math.* 4 (1998) 137-165.
- [6] Krattenthaler C., Advanced determinant calculus, *Sém. Lothar. Combin.* 42 (1999), Art. B42q