

Polymères en milieu aléatoire

Quentin Berger
Directeur de Thèse : Fabio Toninelli

20 octobre 2009

1 Introduction

1.1 Motivations physiques

Ce travail a pour but de présenter l'étude mathématique de polymères en milieu aléatoire. Les polymères sont des molécules chimiques constituées d'une longues suites de constituants élémentaires (les monomères). Leur étude est très complexe car les constituants d'un polymère interagissent non seulement avec leur environnement, mais aussi avec les autres constituants de ce polymère.

Les modèles de polymères sont utilisés pour décrire de nombreux phénomènes physiques : interaction d'un polymère avec une interface entre deux solvants, dénaturation de l'ADN, accrochage d'un polymère sur une surface solide, comportement d'un polymère dans une solution hétérogène... On peut citer [6] pour donner un exemple de l'intérêt de l'étude de ces modèles pour la physique statistique.

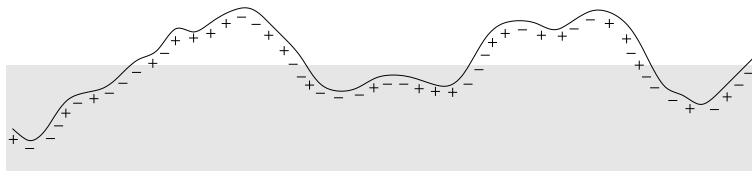


FIG. 1 – Un polymère (à monomères + ou -) à l'interface entre deux solvants.

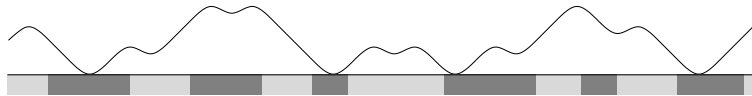


FIG. 2 – Un polymère interagissant avec une membrane de façon non homogène : les zones plus foncées représentent les zones d'attraction.

La principale question est de savoir comment l'interaction avec l'environnement influe sur la forme générale du polymère. À haute température, l'agitation thermique est forte, et le polymère possède une forme aléatoire non modifiée par l'environnement, car les interactions chimiques peuvent être négligées devant l'effet d'entropie. La trajectoire du polymère est alors dite *délocalisée*, car aucune région de l'environnement n'est plus favorable qu'une autre. À basse température, l'effet des interactions se fait beaucoup plus ressentir, et l'environnement influence très fortement la trajectoire du polymère. On parlera de trajectoire *localisée*, car le polymère aura tendance à se retrouver dans une région précise de l'environnement, qui lui est très favorable.

Il existe en fait une transition de phase entre les régimes localisés et délocalisés, c'est-à-dire une température critique qui sépare ces deux phénomènes. On souhaite alors principalement connaître cette température critique, savoir comment elle évolue en fonction des paramètres du modèle. On cherche aussi à déterminer le type de trajectoire des polymères dans le régime localisé, délocalisé, ou à la transition de phase.

L'étude de ces modèles de polymères est un sujet très actif depuis une dizaine d'années, à la fois parmi les physiciens théoriciens et parmi les mathématiciens.

1.2 Cadre mathématique

On considère en général, pour simplifier les interactions entre les différents monomères, que les polymères s'étendent systématiquement dans une direction donnée : on parlera de polymères dirigés. Ils peuvent être modélisés par des marches aléatoires dirigées, c'est à dire des marches aléatoires dont une composante est déterministe et strictement croissante.

Les interactions avec le milieu sont représentées par des variables aléatoires associées à chaque point du milieu, pour donner un environnement aléatoire. On peut aussi associer une variable aléatoire à chaque monomère, pour donner dans ce cas un polymère de constitution aléatoire. On a alors un modèle très général représentant un polymère par une marche aléatoire dirigée évoluant dans un environnement aléatoire.

- **La marche aléatoire** : $(\{X_n\}_{n \geq 0}, \mathbf{P})$ est une marche aléatoire sur le réseau d -dimensionnel \mathbb{Z}^d , partant de 0. La marche aléatoire dirigée est $\{S_n\}_{n \geq 0} = (n, X_n)_{n \geq 0}$. Le polymère évolue donc dans un milieu de dimension $1 + d$. La loi de X est notée \mathbf{P} , c'est-à-dire que $\mathbf{P}(X_1, \dots, X_N)$ est la probabilité d'observer la trajectoire X_1, \dots, X_N .
- **L'environnement aléatoire** : $\eta = \{\eta(n, x) / n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d\}$ est une séquence de variables aléatoires qui représente le potentiel en chaque point du milieu.

Il y a donc deux sources d'aléatoire : la trajectoire du polymère et l'environnement. Mais les deux aléas ne jouent pas le même rôle : l'environnement η est fixé une fois pour toutes, tandis que l'on étudie plutôt la configuration typique du polymère X sous cet environnement.

Pour étudier la configuration que va adopter le polymère plongé dans ce milieu, on définit la récompense d'un polymère X de taille N (i.e. d'une réalisation $\{X_n\}_{n \leq N}$) comme la somme des potentiels $\eta(n, X_n)$ des points du réseau par lesquels est passée X . On la note

$$H_N(X) = H_N^\eta(X) = \sum_{n=1}^N \eta(n, X_n).$$

Chaque trajectoire de X possède donc une récompense $H_N(X)$, qui dépend de l'environnement η (qui est fixé on le rappelle).

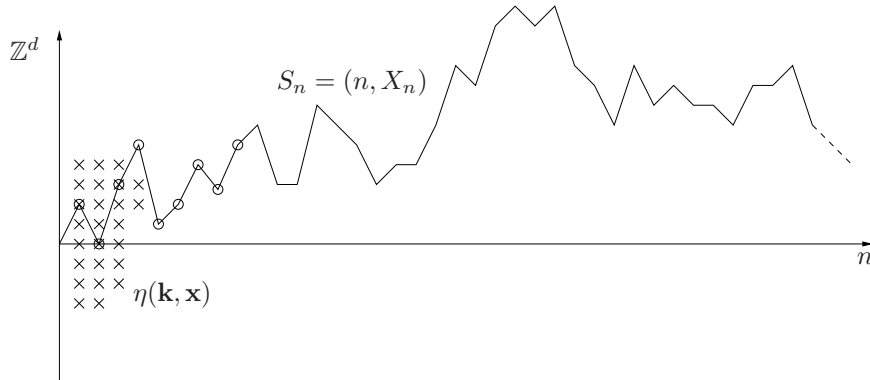


FIG. 3 – Exemple d'un polymère dans un milieu aléatoire : marche aléatoire quelconque en dimension d . La marche collecte toutes les variables d'environnement qu'elle rencontre le long de son parcours.

L'idée est que cette récompense $H_N(X)$ donnée à une trajectoire va influencer la probabilité d'observer cette trajectoire : plus la récompense est forte, plus le polymère aura tendance à adopter la configuration qui donne cette forte récompense. On peut aussi s'imaginer $e^{-H_N(X)}$ comme étant l'énergie associée au polymère, et se dire que plus l'énergie est faible, plus la trajectoire qui donne cette faible énergie est probable. Pour donner un cadre mathématique à cette intuition, on définit la mesure de polymère associée à un environnement η :

$$\mathbf{P}_N^\eta(X_1, \dots, X_N) = \frac{1}{Z_N^\eta} e^{H_N(X)} \mathbf{P}(X_1, \dots, X_N).$$

On a ainsi défini une nouvelle mesure de probabilité \mathbf{P}_N^η sur l'ensemble des trajectoires de longueur N de X , qui favorise les trajectoires ayant une forte récompense. On a finalement modifié la loi de (X_1, \dots, X_N) pour rendre compte des interactions du polymère avec son milieu, et l'on va tenter de comprendre cette loi quand N est grand.

Remarque 1.1. On a introduit la quantité Z_N^η pour normaliser \mathbf{P}_N^η afin qu'elle devienne une mesure de probabilité. Ce Z_N^η est appelé *fonction de partition* du système de taille N , et on verra dans la suite que son étude apporte de nombreuses informations sur le comportement des trajectoires de X sous la nouvelle mesure \mathbf{P}_N^η .

On remarque que cette mesure de polymère est elle même aléatoire, car liée à une réalisation η de l'environnement. On veut alors déterminer les caractéristiques de cette mesure (en particulier les trajectoires les plus favorisées) pour des réalisations typiques de l'environnement.

On peut maintenant donner plusieurs exemples de modèles de polymères en milieu aléatoire, rentrant dans le cadre décrit précédemment. Pour avoir une idée plus précise sur les différents modèles de polymères, on peut se référer à [12].

Exemple 1. Si les $\eta(n, x)$ sont tous nuls, le polymère n'a aucune interaction avec son milieu : c'est simplement une marche aléatoire dirigée, et aucune trajectoire n'est privilégiée. Si les $\eta(n, x)$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), le polymère interagit avec tout son milieu de manière uniforme. À chaque réalisation η de l'environnement, il peut y avoir une trajectoire privilégiée car le milieu n'est pas homogène et il y a des zones plus favorables. C'est le modèle de polymère dirigé en milieu aléatoire, qui modélise par exemple un polymère dans une solution hétérogène.

Exemple 2. On peut aussi faire interagir le polymère avec un autre polymère. Si on fixe Y une marche aléatoire, on définit la récompense de X comme le nombre de fois où X touche Y . C'est le modèle dit de *pinning sur une marche aléatoire*, étudié en détail dans [12].

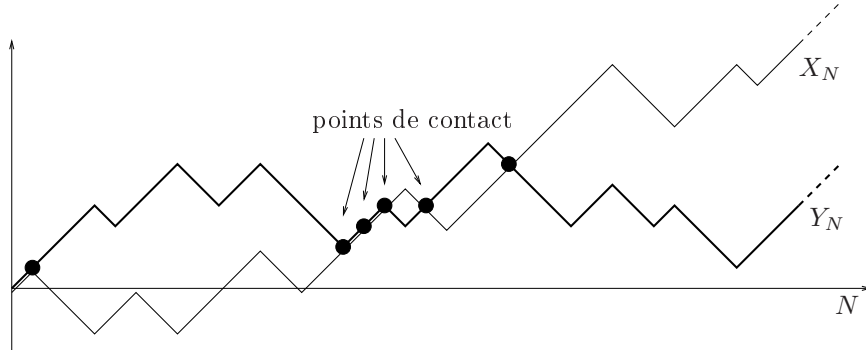


FIG. 4 – Accrochage d'un polymère sur un autre polymère : Y est le polymère avec lequel X possède une interaction. Dans ce modèle, l'interaction est déterministe. C'est le polymère Y qui est la source du désordre, sa configuration étant aléatoire. À chaque fois que la marche X touche Y , elle obtient une récompense 1. On étudie, une réalisation de Y étant fixée, la configuration typique de X .

Dans ce cas, on a défini $\eta(n, x) = \eta^Y(n, x) = \mathbf{1}_{\{Y_n=x\}}$, où Y est une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d qui définit l'aléa de l'environnement. On remarque qu'ici les $\eta(n, x)$ ne sont ni indépendants, ni identiquement distribués.

Exemple 3. Si les $\eta(n, x)$ sont nuls pour les x non nuls, le polymère n'interagit en fait qu'avec la ligne $(n, 0)$: c'est le modèle d'accrochage sur une ligne de défauts. Par exemple si les $\eta(n, x)$ sont positifs, la récompense d'un polymère sera plus forte s'il touche souvent cette ligne : il est attiré par celle-ci. On développera ce modèle dit de *pinning* [13] dans la section suivante.

Il reste maintenant à rendre compte de l'influence de la température. On introduit un paramètre $\beta \geq 0$ pour donner plus ou moins d'importance aux interactions avec l'environnement. On modifie donc légèrement le modèle en donnant une récompense $\beta \times H_N(X)$ au lieu de $H_N(X)$.

Quand β est petit, le polymère sent beaucoup moins l'influence de l'environnement ; alors que plus β est grand, plus le désordre lié à l'environnement prend d'importance : β joue en fait le rôle

de l'inverse de la température. On utilise alors ce paramètre β pour introduire la transition de phase entre le régime localisé à basse température et le régime délocalisé à haute température. La mesure de polymère devient donc

$$\mathbf{P}_{N,\beta}^\eta(X-1, \dots, X_N) = \frac{1}{Z_{N,\beta}^\eta} e^{\beta H_N(X)} \mathbf{P}(X_1, \dots, X_N), \quad (1.1)$$

et dépend maintenant du paramètre β .

Le but est maintenant de comprendre comment le paramètre β et l'environnement η modifient la loi de X , et de connaître la valeur critique β_c de ce paramètre, qui marque la transition entre le régime délocalisé et localisé.

2 Modèle d'accrochage

On va étudier le modèle d'accrochage sur une ligne de défauts de l'Exemple 3, qui est le cas où le polymère interagit seulement avec une droite.

2.1 Modèle d'accrochage de la marche aléatoire simple

Présentation du modèle

On prend ici $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple en dimension 1 : $X_0 = 0$ et les incréments $\{X_n - X_{n-1}\}_{n \geq 1}$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.), symétriques, ne prenant que les valeurs $+1$ ou -1 . La récompense liée au n^e point de la ligne de défauts est $\beta\omega_n + h$, où $\omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$ est une séquence de variables aléatoires réelles que l'on choisit indépendantes et identiquement distribuées (on note \mathbb{P} la loi de ω), et $\beta \geq 0$ et h sont deux paramètres réels.

Pour simplifier les hypothèses, on utilisera $\omega = \{\omega_n\}_{n \geq 1}$ une séquence i.i.d. de variables gaussiennes centrées de variance 1.

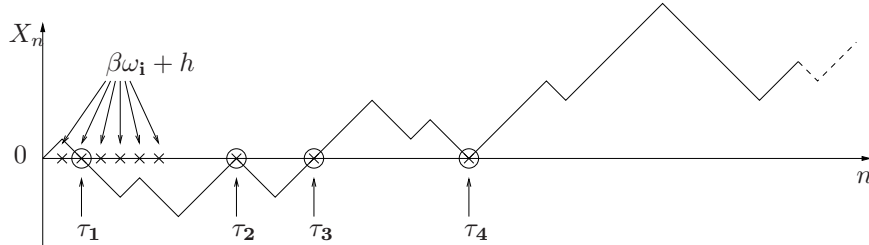


FIG. 5 – Accrochage d'un polymère : on regarde la trajectoire $\{(n, X_n)\}_{n \geq 0}$. Comme la marche aléatoire est simple, la chaîne ne peut toucher 0 qu'aux instants pairs : seuls les $\omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots$ jouent donc un rôle. Le polymère récupère les récompenses $\beta\omega_n + h$ à chaque fois qu'il touche la ligne de défauts.

Rappelons la définition de la mesure de polymère

$$\mathbf{P}_{N,\omega}(x_0, x_1, \dots, x_N) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h) \mathbf{1}_{\{x_n=0\}}\right) \mathbf{P}(x_0, x_1, \dots, x_N), \quad (2.1)$$

où $Z_{N,\omega}$ est la constante de renormalisation (la *fonction de partition*), c'est-à-dire :

$$Z_{N,\omega} = \mathbf{E} \left[\exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h) \mathbf{1}_{\{X_n=0\}}\right) \right]$$

On note que seuls les instants de retour τ_k de la marche X en 0 sont importants. Notons $\tau_0 := 0$, τ_1 le temps de premier retour en 0, et pour $j \geq 1$, $\tau_j := \inf\{n > \tau_{j-1} / X_n = 0\}$ les instants successifs de retour en 0. On notera aussi $n \in \tau$ pour dire qu'il existe un j tel que $\tau_j = n$.

La récompense d'une trajectoire de X dépend donc uniquement de la séquence $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \dots\}$:
$$\sum (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{\{X_n=0\}} = \sum (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{n \in \tau}.$$

Remarque 2.1. On possède de nombreux résultats sur la marche aléatoire simple en dimension 1, et on connaît notamment bien la loi de la séquence $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \dots\}$. En particulier, on sait que la séquence $\{\tau_i - \tau_{i-1}\}$ est i.i.d., et aussi que ([9], Ch. III)

$$\mathbf{P}(\tau_1 = 2n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{4\pi n^{3/2}}} \quad (2.2)$$

Il est aussi par exemple connu que le nombre moyen de passages de X en 0 avant le temps N est de l'ordre de \sqrt{N} .

La formule (2.1) s'exprime donc aussi uniquement en fonction de la séquence $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \dots\}$:

$$\frac{d\mathbf{P}_{N,\omega}}{d\mathbf{P}}(x) := \frac{1}{Z_{N,\omega}} \exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{n \in \tau}\right) \quad (2.3)$$

où

$$Z_{N,\omega} := \mathbf{E}\left[\exp\left(\sum_{n=1}^N (\beta\omega_n + h)\mathbf{1}_{n \in \tau}\right)\right] \quad (2.4)$$

On voit ainsi que le modèle de (2.1) est juste un cas particulier du modèle 2.3 avec τ un *processus de renouvellement discret*.

Donnons au passage la définition d'un processus de renouvellement discret :

Définition 2.2. Un processus $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots\}$ est appelé *processus de renouvellement discret* si $\tau_0 = 0$, et si les $(\tau_{j+1} - \tau_j)_{j \geq 0}$ sont i.i.d. (donc de même loi que τ_1), à valeurs dans \mathbb{N} . On appellera l'instant τ_n un *renouvellement*, ou un *point de renouvellement*, les $(\tau_{j+1} - \tau_j)$ les *temps inter-arrivées*, et les $\{\tau_j + 1, \dots, \tau_j\}$ des *excursions* (en référence à la marche aléatoire).

Remarque 2.3. On va donc désormais oublier que l'on a affaire à une marche aléatoire simple, et on va simplement penser à un polymère qui s'accroche en 0, dont on ne connaît que la loi inter-arrivée $\mathbf{P}(\tau_1 = n)$. On notera d'ailleurs $K(n) = \mathbf{P}(\tau_1 = n)$. On va de plus faire quelques hypothèses sur cette loi $K(\cdot)$: on suppose que

- $K(\cdot)$ est une probabilité : $\sum_n K(n) = 1$.
- on connaît le comportement asymptotique de la loi inter-arrivée :

$$K(n) \stackrel{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{c_K}{n^{1+\alpha}}, \quad (2.5)$$

où c_K est une constante, et $\alpha > 0$ un paramètre. On note qu'il est connu (par exemple dans [18]) que dans le cas de la marche aléatoire simple en dimension 1 (resp. en dimension d), $\alpha = 1/2$ (resp. $d/2$).

Suivant les paramètres β et h , les types de trajectoires observées sont opposés. Principalement, en dehors des points critiques, il existe deux comportements tout à fait différents sous $\mathbf{P}_{N,\omega}$, quand N est grand (voir la Figure 6) :

- *Trajectoire délocalisée* : le nombre moyen de passages en 0 de X est beaucoup plus petit que \sqrt{N} , ce qui signifie que la trajectoire est plutôt loin de la ligne de défauts.
- *Trajectoire localisée* : le nombre moyen de passages en 0 de X est de l'ordre de N : il y a une densité positive de retours en 0, et la trajectoire est proche de la ligne de défauts.

Ces deux comportements sont donc différents de celui de la marche aléatoire simple, qui passe en moyenne \sqrt{N} fois en 0.

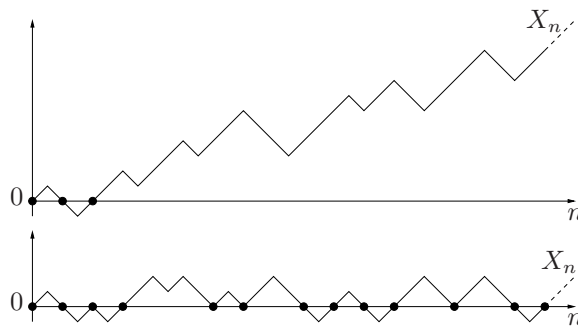


FIG. 6 – Exemple de trajectoires délocalisées et localisées. Dans le premier cas, la trajectoire est délocalisée : le polymère ne passe pas beaucoup de temps près de la ligne de défauts. C'est le cas par exemple si beaucoup de $\beta\omega_n + h$ sont négatifs, ce qui a pour effet de repousser le polymère. Dans le deuxième cas, la trajectoire est localisée près de la ligne de défauts, ce qui arrive si la ligne est plutôt attractive. On peut remarquer que le désordre pousse à la localisation. Par exemple si $h < 0$, la ligne est en moyenne répulsive (la moyenne des $\beta\omega_n + h$ est strictement négative), et on pourrait penser que la trajectoire sera délocalisée. Mais si $\beta > 0$ est très grand, il y a quand même beaucoup de sites pour lesquels $\beta\omega_n + h$ est positif, et qui sont donc attractifs. Le polymère est alors localisé, en "ciblant" la ligne de défauts à ces points attractifs.

Énergie libre

Définition 2.4. On définit l'énergie libre $F(\beta, h, \omega)$ du système :

$$F(\beta, h, \omega) = F(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_{N, \omega}.$$

Remarque 2.5. Cette définition fait à la fois office de théorème, car l'existence de cette limite n'est pas immédiate. On montre en fait ([12] Ch 1.7) que $F(\beta, h)$ existe \mathbb{P} -*p.s.* et est non aléatoire. Cela signifie que quelle que soit la réalisation ω de l'environnement choisie (ou plus précisément, choisie dans un ensemble de probabilité 1), l'énergie libre existe, et ne dépend pas de cette réalisation ω . On a donc aussi

$$F(\beta, h, \omega) = F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N, \omega}.$$

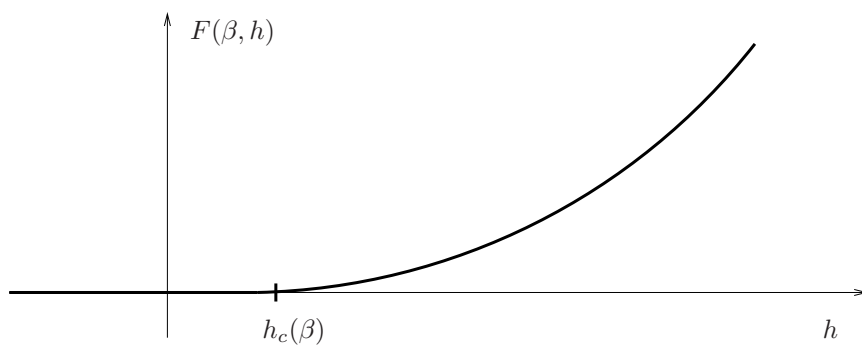


FIG. 7 – Forme de l'énergie libre, à $\beta \geq 0$ fixé.

On connaît quelques propriétés de l'énergie libre F , comme le fait que F soit convexe, et croissante en h et en β . On sait aussi que pour h très négatif, $F(\beta, h) = 0$. On a ainsi une idée du comportement de l'énergie libre.

On a ainsi, grâce à la forme de l'énergie libre (voir la Figure 7), l'existence d'un point critique $h_c = h_c(\beta)$, tel que pour $h < h_c$ on ait $F(\beta, h) = 0$, et pour $h > h_c$ on ait $F(\beta, h) > 0$.

Remarque 2.6. Fraction de contact :

L'étude de l'énergie libre peut paraître sans grand intérêt par rapport à l'étude du phénomène de localisation/délocalisation, mais un petit calcul montre que F est dérivable par rapport à h , sauf peut-être au point critique, et que l'on a

$$\partial_h F(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{E}_{N, \omega} \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{n \in \tau} \right]. \quad (2.6)$$

La dérivée par rapport à h de l'énergie libre représente donc la densité de contacts entre X et la ligne de défauts, sous la mesure modifiée $\mathbf{P}_{N, \omega}$. On note donc que quand $h < h_c(\beta)$, $F(\beta, h) = 0$, on a $\frac{\partial}{\partial h} F(h) = 0$, et la proportion de contacts X et la ligne de défauts tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. La densité de contacts est nulle : il y a délocalisation. Par contre, si $h > h_c(\beta)$, alors $F(\beta, h) > 0$, et la dérivée est aussi strictement positive. La densité de contacts est donc strictement positive : il y a localisation. L'étude de l'énergie libre permet donc bien de comprendre la transition de phase entre le régime localisé et délocalisé.

2.2 Considérations sur le modèle : rôle du désordre

Modèle homogène

Le modèle homogène est le modèle où il n'y a pas de désordre : $\beta = 0$, et les récompenses fixées à chaque point de la ligne de défauts sont déterministes. On a

$$\mathbf{P}_{N, h}(x_0, x_1, \dots, x_N) := \frac{1}{Z_{N, h}} \exp \left(h \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{n \in \tau} \right) \mathbf{P}(x_0, x_1, \dots, x_N),$$

$$\text{où } Z_{N, h} = \mathbf{E} \left[\exp \left(h \sum_{n=1}^N h \mathbf{1}_{n \in \tau} \right) \right]$$

Dans ce cas, on connaît très bien le comportement de l'énergie libre $F(h) = F(0, h)$. On sait par exemple que le point critique est $h_c(\beta = 0) = 0$, et on connaît le comportement de F près du point critique en fonction de la valeur de α :

Théorème 2.7 ([12] (Ch.2)). *Le comportement au voisinage du point critique est donné par :*

$$F(h) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \begin{cases} c_1 h & \text{si } \alpha > 1 \\ c_2 h^{1/\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Le cas $\alpha = 1$ est aussi connu, mais un peu plus lourd à énoncer. On a ainsi l'exposant critique $\max(1, 1/\alpha)$, qui donne le comportement de l'énergie libre près du point critique.

Par exemple, dans le cas de la marche aléatoire simple en dimension 1, on a $\alpha = 1/2$, donc $F(h) \underset{h \searrow 0}{\sim} ch^2$.

Connaître l'exposant critique s'avère utile d'un point de vue physique, car on sait alors de quel ordre est la transition de phase. Par exemple, si la transition de phase est d'ordre 1 (exposant critique 1), il y aura un saut dans la dérivée de l'énergie libre, et donc un saut dans la densité de contact.

Modèles Quenched et Annealed

Le modèle *quenched* est le modèle que l'on a introduit dans la section précédente, qui est le cas où l'on a fixé la réalisation ω de l'environnement, pour étudier la fonction de partition $Z_{N, \omega}$.

Le modèle *annealed*, quant à lui, consiste à étudier $Z_N^{ann} := \mathbb{E}Z_{N,\omega}$, la moyenne sur le désordre de la fonction de partition. On a

$$Z_N^{ann} = \mathbb{E}Z_{N,\omega} = \mathbf{E} \exp \left(\left(h + \frac{\beta^2}{2} \right) \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{n \in \tau} \right), \quad (2.8)$$

où on a utilisé l'indépendance des $(\omega_n)_{n \geq 1}$, et le fait que $\mathbb{E}[e^{\beta\omega_n}] = e^{\beta^2/2}$ (en supposant que $\omega_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$). Ainsi, Z_N^{ann} est la fonction de partition d'un modèle homogène (c'est à dire sans désordre), de paramètre $h + \beta^2/2$.

On connaît donc l'existence d'un point critique *annealed* h_c^{ann} , sa valeur $h_c^{ann}(\beta) = -\beta^2/2$, et l'exposant critique de l'énergie libre *annealed*.

On a de plus une relation entre les modèles *annealed* et *quenched*, grâce à l'inégalité de Jensen :

$$F(\beta, h) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E} \log Z_{N,\omega} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{E} Z_{N,\omega} = F^{ann}(\beta, h). \quad (2.9)$$

On a donc $F(\beta, h) \leq F^{ann}(\beta, h)$, d'où $h_c(\beta) \geq h_c^{ann}(\beta)$

Il est intéressant d'étudier le modèle *annealed*, même si son intuition physique n'est pas évidente. En effet, si l'on compare les modèles *annealed* et *quenched*, on aura une idée du rôle du désordre : on peut savoir si, avec une probabilité non négligeable, deux environnements ω peuvent donner des comportements très différents pour le polymère.

Il se peut en effet que certaines réalisations de ω soient extrêmement favorables, et que cela rende Z_N^{ann} très grand, et donc que $\log Z_N^{ann}$ soit beaucoup plus grand que les valeurs typiques de $\log Z_{N,\omega}$. Dans ce cas, les modèles *quenched* et *annealed* ont des comportements différents. On aura $F^{ann}(\beta, h) > 0$, alors que $F(\beta, h) = 0$, et les points critiques *quenched* et *annealed* sont différents : $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$.

Une autre idée intéressante est de comparer les exposants critiques *quenched* et *annealed*. On peut ainsi savoir si le désordre "adoucit" la transition de phase entre le régime localisé et le régime délocalisé.

Écart entre les points critiques

On étudie donc si l'inégalité $h_c \geq h_c^{ann}$ est stricte ou non, pour un désordre faible (quand β est petit), afin de savoir à quel point le désordre possède une influence sur la mesure de polymère.

Si $h_c = h_c^{ann}$, le désordre est dit *non pertinent*, alors que si $h_c > h_c^{ann}$, le désordre est dit *pertinent*. Le critère de Harris (à l'origine pour le modèle d'Ising [17], puis appliqué pour la première fois à ce modèle dans [10]) donne un résultat heuristique, qui n'est en rien une démonstration, mais simplement une idée de ce que l'on espère :

$$\begin{cases} \text{Si } \alpha > 1/2 & \text{le désordre est } \textit{pertinent} \\ \text{Si } \alpha < 1/2 & \text{le désordre est } \textit{non pertinent} \end{cases} \quad (2.10)$$

On remarquera que le critère de Harris ne traite pas du cas $\alpha = 1/2$, qui est le cas de la marche aléatoire simple en dimension 1 !

2.3 Résultats

On cite ici les résultats complets pour le modèle de pinning, dans le cas où le désordre ω est gaussien :

Théorème 2.8 ([1, 8, 14]). *Écart entre les points critiques :*

Si $\alpha \geq 1/2$, alors $h_c(\beta) > h_c^{ann}(\beta)$, et le désordre est *pertinent*. On a de plus une estimation de l'écart entre les points critiques :

1. Si $\alpha = 1/2$, il existe deux constantes c_1 et c'_1 telles que, pour $\beta \leq 1$

$$e^{-c_1/\beta^2} \geq h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \geq e^{-c'_1/\beta^4}$$

2. Si $\alpha > 1/2$ et $\alpha \neq 1$, il existe deux constantes c_2 et c'_2 telles que, pour $\beta \leq 1$

$$c_2 \beta^{\max\{2\alpha/(2\alpha-1), 2\}} \geq h_c(\beta) - h_c^{ann}(\beta) \geq c'_2 \beta^{\max\{2\alpha/(2\alpha-1), 2\}}$$

On a laissé de côté le cas $\alpha = 1$, qui est plus lourd à énoncer.

Si $0 < \alpha < 1/2$, alors il existe $\beta_0 > 0$ tel que $h_c(\beta) = h_c^{ann}(\beta)$ pour $\beta \leq \beta_0$, et le désordre est non pertinent. On sait aussi que les exposants critiques sont les mêmes.

Tous ces résultats sont en fait démontrés ([15]) avec des hypothèses un peu plus faible sur le désordre ω , mais en gardant l'indépendance des $(\omega_n)_{n \geq 1}$.

On a aussi un résultat concernant l'exposant critique ([16]), qui confirme que pour $\alpha > 1/2$, le désordre "lisse" la transition de phase. On ne cite ici que le cas où $\alpha \geq 1$, qui montre que la transition de phase pour le modèle *quenched* est au moins du second ordre, alors qu'elle était du premier ordre pour le modèle *annealed* :

Théorème 2.9. Pour tout $0 < \beta < \infty$, il existe $0 < c(\beta) < \infty$, telle que pour tout $1 \leq \alpha < \infty$,

$$F(\beta, h) \leq \alpha c(\beta) (h - h_c(\beta))^2,$$

pour $h > h_c(\beta)$.

On possède des résultats analogues ([4] et [3]) dans le cas du modèle de pinning sur une marche aléatoire dans \mathbb{Z}^d (Exemple 2), en remplaçant α par $d/2$ (comparer avec la Remarque 2.3).

2.4 Modification possible du modèle

Ces résultats sont très récents, et ce domaine de recherche évolue très rapidement, mais il y a encore de nombreux problèmes ouverts. On peut notamment reprendre le modèle de pinning étudié ci-dessus, et se demander ce qu'il se passe quand le désordre $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1}$ n'est plus une séquence i.i.d., mais s'il existe une corrélation entre les différents ω_n . D'un point de vue physique, ceci correspond au cas où les molécules chimiques qui interagissent avec le polymère interagissent aussi entre elles.

On se demande par exemple, suivant la nature de la corrélation, comment est modifiée la transition de phase. On peut se poser plusieurs questions :

1. Les points critiques sont-ils modifiés? Est-ce que la corrélation rend le phénomène de localisation plus facile?
2. Qu'en est-il de l'exposant critique? Observe-t-on le même type de transition que dans le cas où le désordre est non corrélé?
3. La dernière question est de savoir si le critère de Harris (2.10) est changé, et comment. On s'attend à ce qu'il soit effectivement modifié si les corrélations sont à longue portée, et que la valeur marginale $\alpha = 1/2$ soit remplacée par une autre valeur qui dépend explicitement de la forme des corrélations.

On espère donc résoudre ce modèle, et de dire comment le modèle avec un désordre non corrélé est modifié, en fonction de la forme des corrélations (notamment la vitesse à laquelle elles décroissent). J'étudierai le cas de corrélations qui décroissent en puissance (avec un certain exposant ξ), le but final étant de donner un critère du même type que le critère de Harris et d'identifier une valeur seuil $\alpha_c(\xi)$ telle que les propriétés critiques du modèle sans désordre ($\beta = 0$) et avec désordre ($\beta > 0$) sont les mêmes si et seulement si $\alpha < \alpha_c(\xi)$.

Références

- [1] K.S. ALEXANDER : *The effect of disorder on polymer depinning transitions*, Commun. Math. Phys. **279** (2008) 117-146.
- [2] K.S. ALEXANDER ET N. ZYGOURAS, *Quenched and annealed critical points in polymer pinning models*, ArXiv : 0805.1708 [math.PR]
- [3] Q. BERGER ET F.L. TONINELLI, *On the critical point of the Random Walk Pinning Model in dimension $d = 3$* , en préparation.
- [4] M. BIRKNER ET R. SUN, *Annealed vs Quenched critical points for a random walk pinning model* (2008), arXiv : 0807.2752v1 [math.PR]
- [5] F. COMETS, T. SHIGA, AND N. YOSHIDA, *Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment : a Review*, Adv. Stud. Pure Math. **39** (2004), 115–142 .
- [6] P. G. DE GENNES, *Scaling concepts in polymer physics*, Cornell University Press, Ithaca, NY (1979).
- [7] F. DEN HOLLANDER, *Random polymers*, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XXXVII, Lect. Notes Math. **1974**, Springer Verlag, 2009.
- [8] B. DERRIDA, G. GIACOMIN, H. LACOIN ET F.L. TONINELLI : *Fractionnal moment bounds and disorder relevance for pinning model* (2007), arXiv : 0712.2515v1 [math.PR]
- [9] W. FELLER, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I, Wiley.
- [10] G. FORGACS, J.M. LUCK, TH.M. NIEUWENHUIZEN ET H. ORLAND : *Wetting of a disordered substrate : exact critical behavior in two dimension*, Pys. Rev. Lett. **57** (1986) 2184-2187.
- [11] , J. GÄRTNER ET R. SUN, *A quenched limit theorem for the local time of random walks in \mathbb{Z}^2* (2007), arXiv : 0711.4488v1 [math.PR]
- [12] G. GIACOMIN, *Random Polymer Models*, Imperial College Press (2007).
- [13] G. GIACOMIN, *Renewal sequences, disordered potentials and pinning phenomena* (2008), arXiv : 0807.4285v1 [math-ph]
- [14] G. GIACOMIN, H. LACOIN ET F.L. TONINELLI, *Marginal relevance of disorder for pinning models* (2008), arXiv : 0811.0723v1 [math-ph]
- [15] G. Giacomini, H. Lacoïn and F.L. Toninelli, *Disorder relevance at marginality and critical point shift* (2009), arXiv :0906.1942v1 [math-ph]
- [16] G. GIACOMIN ET F. L. TONINELLI, *Smoothing effect of quenched disorder on polymer depinning transitions*, Commun. Math. Phys. **266** (2006), 1-16 ; *Smoothing of Depinning Transitions for Directed Polymers with Quenched Disorder*, Phys. Rev. Lett **96** (2006), 070602.
- [17] A.B. HARRIS, *Effect of random defects on the critical behaviour of Ising models* J. Phys. C **7** (1974), 1672-1692.
- [18] G.F. LAWLER, *Intersections of random walks*, (1991).