

ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

**13 juin 2017**  
**Mémoire de première année**

## **Réseaux de transports optimaux**

Wojciech Reise et Robin Khanfir  
Mémoire encadré par Bertrand Maury

# 1 Introduction

La recherche d'un réseau de transport "optimal" est complexe car au delà des problèmes mathématiques d'optimisation , qui peuvent être difficiles en soi, la détermination de la grandeur ou des caractéristiques à optimiser n'est pas claire. Néanmoins, une grande partie des structures dont on dispose actuellement se sont établies au fur et à mesure, de proche en proche à la fois dans le temps et dans l'espace, et donc probablement sans recherche d'une quelconque optimalité globale, à grande échelle. En particulier, de nombreux réseaux humains ont été pensés pour être les plus efficaces possible à l'échelle locale tout en ayant un coût moindre, sans tenir compte de leur robustesse aux erreurs. Pour autant, ces structures remplissent assez bien leurs missions.

La notion de robustesse est à la fois difficile à formaliser (combien de chemins alternatifs faut-il avoir pour être suffisamment robuste ? à quel endroit faut-il les mettre ?) et à comparer aux autres propriétés demandées au réseau (comment quantifier l'utilité d'une voie bis dont l'intérêt est presque nul lorsque la voie principale fonctionne mais sans laquelle toute la circulation serait bloquée en cas d'un simple accident sur cette dernière ?). Des chercheurs japonais ont proposé en 2010 dans l'article **Rules for Biologically Inspired Adaptive Network Design**, publié dans la revue **SCIENCE**, Vol.327 ([1]), de s'inspirer de réseaux organiques qui ont été soumis à la sélection naturelle, et qui sont donc susceptibles de présenter de bonnes caractéristiques.

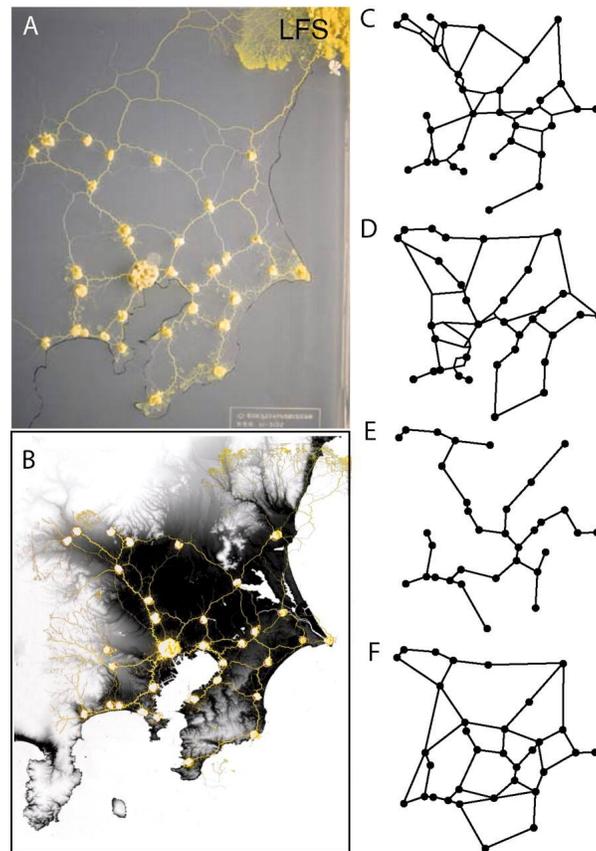


FIGURE 1 – Comparaison entre le réseau ferroviaire japonais, un réseau créé par une moisissure, et des graphes générés numériquement, figure [1]

Dans cet article, les chercheurs remarquent un lien fort entre le réseau ferroviaire japonais et les réseaux de canaux spontanément créés par une certaine espèce de moisissures (*Physarum polycephalum*) pour découvrir et exploiter des sources de nourriture. Ils ont par exemple réussi à retrouver un réseau proche du réseau ferroviaire japonais en disposant des sources de nourriture de façon analogue à la position des villes et en laissant s'adapter la moisissure (voir ci-dessus). Ils expliquent ce lien par une certaine optimalité des réseaux observés : ils sont à la fois efficaces, peu coûteux, et robustes (on dit plus précisément qu'ils ont une bonne *résilience*). S'inspirant alors de l'observation de la moisissure et des équations de la mécanique des fluides, ils ont proposé un modèle d'évolution de ce réseau biologique basé sur quelques équations . Ce modèle se veut alors pertinent pour étudier d'autres réseaux apparus "spontanément" et pour proposer de bonnes solutions à des problèmes de recherche de réseaux de transport optimaux, en observant le résultat de simulations numériques.

Dans ce mémoire, on se propose d'étudier mathématiquement ce modèle pour en dégager quelques propriétés. Grâce à l'étude formalisée de certains exemples, on en proposera des pistes de compréhension, en particulier de sa dépendance en fonction de ses paramètres et de son comportement asymptotique. Enfin, on l'implémentera pour l'appliquer à des réseaux initiaux plus complexes, pour commenter les formes obtenues, notamment pour une situation plus concrète, celle du réseau ferroviaire français.

## 2 Présentation du modèle

**Définition.** — Un réseau est un ensemble fini de points  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $n \geq 2$ , muni d'un ensemble fini de canaux. Un canal a pour extrémités deux uniques points distincts  $i$  et  $j$  du réseau : on dit que ce canal relie  $i$  et  $j$  entre eux.

- Un sous réseau est un sous-ensemble non vide d'un réseau, muni des canaux de ce dernier dont les extrémités restent dans le sous-ensemble.
- Un réseau est dit simple si pour tous points  $i$  et  $j$ , il y a au plus un canal les reliant entre eux. On identifie alors un canal à ses extrémités.
- Dans un réseau, on munit chaque canal de deux réels, le diamètre  $D > 0$  et la longueur  $L > 0$ . On lui associe un autre réel appelé conductance  $c = D/L$ . Pour un réseau simple, on note  $D_{i,j} = D_{j,i}$ ,  $L_{i,j} = L_{j,i}$ , et  $c_{i,j} = c_{j,i}$ .

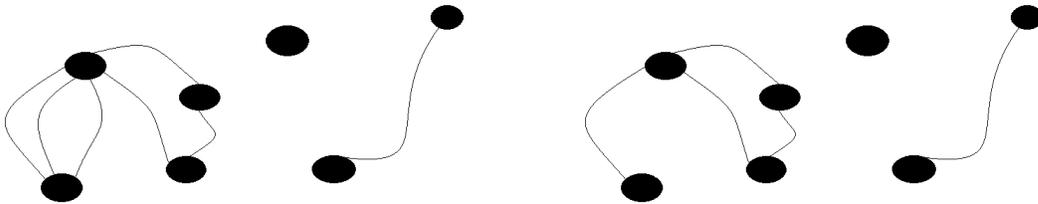


FIGURE 2 – À gauche, un réseau et à droite, un réseau simple

En particulier, un canal ne relie pas un point à lui-même. Dans le langage de la théorie des graphes, si on ne tient pas compte des diamètres et des longueurs, un réseau est un multigraphe

non orienté et sans boucle, un réseau simple est un graphe simple, et un canal est une arête. On utilisera donc ce vocabulaire dans l'étude des réseaux.

**Définition.** — *Deux points d'un réseau sont voisins s'il existe un canal les reliant.*

- *Un chemin reliant deux points  $i$  et  $j$  est une suite injective finie de canaux, dont le premier admet  $i$  comme extrémité, le dernier admet  $j$  comme extrémité, et les autres ont une première extrémité commune avec leur prédécesseur et la seconde commune avec leur successeur.*
- *Un réseau est connexe si tous points distincts  $i$  et  $j$  sont reliés par un chemin.*
- *Une composante connexe d'un réseau est un sous-réseau connexe maximal.*
- *Un cycle est un chemin reliant  $i$  à  $i$ , pour un certain point  $i$ .*
- *Un arbre est un réseau connexe sans cycle (en particulier simple).*
- *Une forêt est un réseau dont les composantes connexes sont des arbres.*

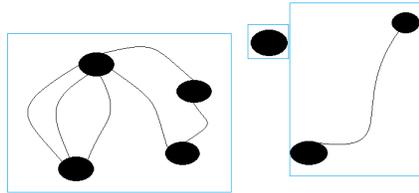


FIGURE 3 – Réseau dont les composantes connexes sont encadrées

Pour un certain  $\gamma \geq 1$ , on pose également

$$\begin{aligned}
 f &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto \frac{|x|^\gamma}{1 + |x|^\gamma}
 \end{aligned}$$

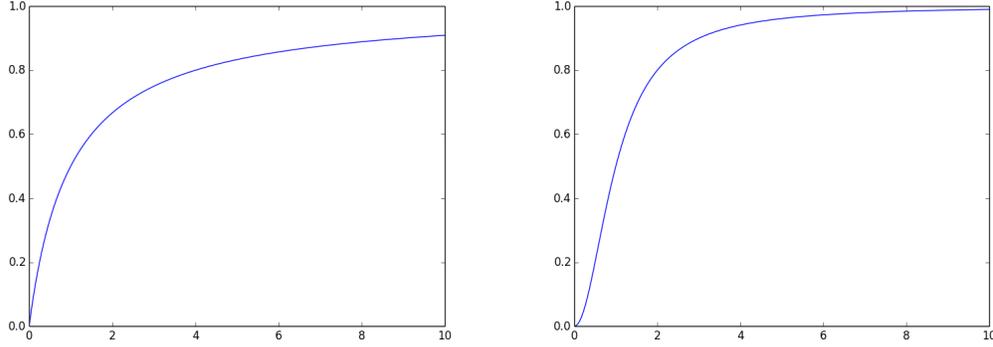


FIGURE 4 – Graphes de  $f$  pour  $\gamma = 1$ , à droite, et  $\gamma = 2$ , à gauche

**Lemme** (Quelques propriétés de  $f$ ). —  $0 \leq f < 1$ ,  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 1$
- $f$  est paire et croissante sur  $\mathbb{R}_+$
- $f$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$
- $f$  est 1-lipschitzienne en 0 et est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  dès que  $\gamma > 1$
- Si  $f$  est dérivable en  $x \geq 0$ ,  $f'(x) = \frac{\gamma x^{\gamma-1}}{(1+x^\gamma)^2}$

A chaque point  $i$  du réseau, on associe un réel appelé pression noté  $p_i$ . On définit le flot algébrique passant dans un canal d'extrémité  $i$  et  $j$  et allant de  $i$  à  $j$  comme  $Q = \frac{D}{L}(p_i - p_j) = c(p_i - p_j)$ . Dans un réseau simple, on note  $Q_{i,j} = -Q_{j,i}$ .

Un vecteur de flots d'entrée est un vecteur de  $n$  réels  $\tilde{Q}_i$  tel que sur chaque composante connexe du réseau, la somme des  $\tilde{Q}_i$  est nulle. On dit qu'un point  $i$  est une source si  $\tilde{Q}_i > 0$ , un puits si  $\tilde{Q}_i < 0$  et un point de transfert si  $\tilde{Q}_i = 0$ .

Les pressions ne sont pas connues à l'avance et doivent être choisies de façon à vérifier le système d'équations de conservation constitué des  $n$  équations (écrites ici pour un réseau simple)

$$(*) \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n Q_{i,j} = \tilde{Q}_i$$

Les équations d'évolution du réseau sont

Pour tout canal,  $D' = -D + f(Q)$  et  $L$  est constant

Les paramètres du système sont la structure du réseau, les longueurs des canaux, les flots d'entrées (que l'on supposera constants par morceaux : on change de puits et de source régulièrement) et  $\gamma$ . On va montrer que le problème de déterminer l'évolution des diamètres à partir des équations du modèles et de leur valeurs initiales est bien posé.

On choisit une variable aléatoire  $\tilde{Q}^0$  à valeurs dans un ensemble fini de vecteurs de flots d'entrée et  $T > 0$ , qui correspond au temps d'écoulement du fluide dans le réseau entre les changements de puits et de sources. On se donne une suite  $(\tilde{Q}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de copies indépendantes de  $\tilde{Q}^0$ , et on choisit comme flots d'entrée du système  $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor}$ .

### 3 Le problème est bien posé

Tout d'abord, on étudie le cas d'un réseau simple connexe. Si  $i$  et  $j$  ne sont pas voisins (en particulier si  $i = j$ ), on pose  $D_{i,j} = 0$  et  $L_{i,j} = 1$ ,  $c_{i,j} = D_{i,j}/L_{i,j} = 0$ , et  $Q_{i,j} = 0$ . Pour tout  $i$  on écrit  $\Delta p_i = p_i - p_n$ .

On rappelle les équations du problème :

$$\begin{aligned} D'_{i,j} &= -D_{i,j} + f(Q_{i,j}) \\ Q_{i,j} &= \frac{D_{i,j}}{L_{i,j}} (\Delta p_i - \Delta p_j) \\ \tilde{Q}_i &= \sum_j Q_{i,j} \end{aligned}$$

On note  $D = (D_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , une matrice de dimension  $n$ . On pose  $H$  le sous-espace vectoriel des matrices réelles symétriques de taille  $n$  et dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.  $D \in H$  et est à coefficients positifs. Une matrice  $M$  de  $H$  à coefficients positifs représente un graphe de la manière suivante : on met une arête entre  $i$  et  $j$  si et seulement si  $M_{i,j} > 0$ . On peut remarquer que le graphe représenté par  $D$  à la même structure que le réseau de canaux. On note  $\mathcal{C}$  le sous-ensemble des matrices de  $H$  à coefficients positifs qui représentent un graphe connexe.

Le système (\*) est vérifié si et seulement si ces  $n - 1$  premières équations sont vérifiées. En effet,

$$\sum_{j=1}^{n-1} Q_{n,j} = \sum_{i=1}^{n-1} -Q_{i,n} = \sum_{k=1}^{n-1} \left( \sum_{j=1}^{n-1} Q_{i,j} - \tilde{Q}_i \right) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} (Q_{i,j} + Q_{j,i}) - \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_n$$

$$\text{On pose } M(D) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n c_{1,k} & -c_{1,2} & \cdots & \cdots & -c_{1,n-1} \\ -c_{2,1} & \sum_{k=1}^n c_{2,k} & -c_{2,3} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -c_{n-2,n-1} \\ -c_{n-1,1} & \cdots & \cdots & -c_{n-1,n-2} & \sum_{k=1}^n c_{n-1,k} \end{pmatrix}$$

On remarque que si  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  on a :

$$\sum_{j=1}^n Q_{i,j} = \sum_{j=1}^n c_{i,j}(p_i - p_j) = \sum_{j=1}^n c_{i,j}(p_i - p_n + p_n - p_j) = \left( \sum_{k=1}^n c_{i,k} \right) \Delta p_i - \sum_{j=1}^{n-1} c_{i,j} \Delta p_j$$

Le système (\*) est donc équivalent à l'équation  $M(D)\Delta P = \tilde{Q}$ , où  $\tilde{Q}$  est le vecteur des  $n-1$  premiers  $\tilde{Q}_i$ . On va montrer le lemme suivant :

**Lemme.** *Si  $D \in \mathcal{C}$ , c'est-à-dire si le graphe représenté par la matrice  $D$  est connexe, alors  $M(D)$  définie ci-dessus est inversible.*

*Démonstration.* Soit  $X \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$  tel que  $M(D)X = 0$ .

$$\text{On note } x_M = \max_{1 \leq j \leq n-1} |x_j| > 0 \text{ et } I_M = \{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, |x_j| = x_M\}$$

Soient  $i \in I_M$  et  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus I_M$ ,  $\left( \sum_{k=1}^n c_{i,k} \right) x_i = \sum_{k=1}^{n-1} c_{i,k} x_k$  et comme les  $c_{i,k}$  sont positifs

$$\left( \sum_{k=1}^n c_{i,k} \right) x_M = \left| \sum_{k=1}^{n-1} c_{i,k} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} c_{i,k} |x_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n c_{i,k} \right) x_M$$

Donc les inégalités sont des égalités et en particulier  $c_{i,j}|x_j| = c_{i,j}x_M$  et  $c_{i,n}x_M = 0$ . Or  $j \notin I_M$  donc  $x_M > |x_j|$  et  $x_M > 0$ , donc  $c_{i,j} = c_{i,n} = 0$  : le point  $i$  n'est ni relié à  $j$  ni à  $n$ . De plus,  $\llbracket 1, n \rrbracket = I_M \cup (\llbracket 1, n-1 \rrbracket \setminus I_M \cup \{n\})$  donc le graphe n'est pas connexe.  $\square$

Donc si  $D \in \mathcal{C}$ ,  $\Delta P = M(D)^{-1}\tilde{Q}$  donc la détermination des différences de pressions  $p_i - p_j = \Delta p_i - \Delta p_j$  en fonction de  $D$  et de  $\tilde{Q}$  est un problème bien posé car l'application  $D \mapsto M(D)$  est

polynomiale, et la multiplication et l'inversion matricielle sont  $C^\infty$  sur leurs domaines de définition. De même, pour la détermination des flots  $Q_{i,j} = c_{i,j}(p_i - p_j)$ . Comme  $\text{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$  est un ouvert, il existe un voisinage  $V$  de  $\mathcal{C}$  dans  $H$  sur lequel les  $Q_{i,j}$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $D$ .

**Théorème.** *Pour  $D \in V$ , on définit  $F : V \rightarrow H$  comme  $F = (F_{i,j})_{i,j}$ , où  $F_{i,j}(D) = -D_{i,j} + f(Q_{i,j}(D))$ , avec  $Q_{i,j}(D)$  les flots associés à  $\Delta P = M(D)^{-1}\tilde{Q}$ . Si  $D^0 \in V$ , il existe une unique solution maximale  $D$  du problème de Cauchy  $x' = F(x)$  avec la condition  $x(0) = D^0$ . De plus, si  $D^0 \in \mathcal{C}$ ,  $D$  vérifie les propriétés suivantes :*

- $D$  est bornée,  $C^1$ , et définie sur tout  $\mathbb{R}$
- $\forall t \in \mathbb{R}, D(t) \in \mathcal{C}$
- $\forall t \in \mathbb{R}, D(t)$  représente le même graphe que  $D^0$  :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, D_{i,j}(t) = 0 \iff D_{i,j}^0 = 0$$

*Démonstration.* Premièrement,  $F$  est bien définie,  $Q_{i,i} = 0$ ,  $Q_{i,j} = -Q_{j,i}$ , et  $f$  paire. Comme  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et lipschitzienne en 0,  $F$  est localement lipschitzienne Ceci, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, donne le début de ce résultat. De plus,  $D$  est  $C^1$  sur son intervalle de définition. Supposons par l'absurde que pour des certains  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $D_{i,j}$  ne soit pas borné : il existe  $T > 0$  tel que  $D_{i,j}(T) \geq D_{i,j}^0 + 2$ .  $D_{i,j}$  est continu sur  $[0, T]$ , donc elle y atteint son max en  $t_1 > 0$  et il existe  $t_0 \in ]0, t_1[$  tel que  $D_{i,j}$  soit croissant sur  $[t_0, t_1]$  et  $D_{i,j}(t_0) \geq 1.5$ . En particulier, on dispose de  $t_2 \in ]t_0, t_1[$  tel que  $D'_{i,j}(t_2) \geq 0$ . Or,  $D'_{i,j}(t_2) = -D_{i,j}(t_2) + f(Q_{i,j}(D(t_2))) \leq -1.5 + 1 \leq -0.5$ . Contradiction :  $D$  est borné.

Supposons maintenant  $D^0 \in \mathcal{C}$ . Si  $D_{i,j}^0 = 0$ , alors la fonction nulle et  $D_{i,j}$  sont solutions du problème de Cauchy  $x' = -x + f(x(\Delta p_i(D) - \Delta p_j(D))/L_{i,j})$  avec la condition  $x(0) = 0$ . Par unicité,  $D_{i,j} = 0$ . Réciproquement, si  $D_{i,j}(t) = 0$  alors  $D_{i,j}(0) = D_{i,j}^0 = 0$ . De ce fait, si  $D_{i,j}^0 > 0$ ,  $D_{i,j}$  ne s'annule pas, et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il reste strictement positif. Donc  $D$  est à valeurs dans  $\mathcal{C}$ .

Si  $D_{i,j}^0 > 0$  alors  $D_{i,j}^{-1}$  est  $C^1$  et positif sur l'intervalle de définition de  $D_{i,j}$ .

$$\left( \frac{1}{D_{i,j}} \right)' = \frac{1}{D_{i,j}} - \frac{f(Q_{i,j})}{D_{i,j}^2} \leq \frac{1}{D_{i,j}}$$

D'après le lemme de Grönwall, si  $t > 0$  dans l'intervalle de définition,  $D_{i,j}(t) \geq D_{i,j}^0 e^{-t}$ . On a une

minoration similaire pour  $t < 0$ . De plus, les composantes de  $D$  sont majorées donc  $D$  reste dans un certain compact de  $V$  en temps fini. Ainsi,  $D$  est définie sur tout  $\mathbb{R}$ . De plus, par construction  $D$  vérifie les équations différentielles du modèle ainsi que le système (\*) en tout temps  $t$ .  $\square$

**Corollaire.** *Le problème de détermination des diamètres des canaux à chaque instant grâce aux conditions initiales et aux équations du modèle est bien posé. Cela reste vrai si  $\tilde{Q}$  est constant par morceaux.*

**Remarque.** *On peut toujours se ramener au cas d'un réseau simple. Pour chaque canal de diamètre  $D$  et d'extrémité  $i$  et  $j$ , il suffit de rajouter un point  $k$  et de remplacer le canal par deux canaux d'extrémités respectives  $i$  et  $k$ , et  $k$  et  $j$ , de même diamètre initial et de longueur divisée de moitié, en imposant de plus  $\tilde{Q}_k = 0$ . Comme  $Q_{i,k} = Q_{k,j}$ , par unicité,  $D_{i,k} = D_{k,j} = D$ .*

**Remarque.** *Si le réseau initial n'est pas connexe mais que la somme algébrique des flots d'entrées est nulle dans chaque composante connexe, alors le problème est toujours bien posé, il suffit de regarder l'évolution sur chacune des composantes connexes séparément.*

**Remarque.** *Si  $\tilde{Q}$  est un vecteur aléatoire dépendant du temps, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $D(t)$  est un vecteur aléatoire.*

## 4 Cas d'un arbre et aspects probabilistes

Le cas d'un graphe en forme d'arbre peut être traité facilement car entre chaque couple de points, il y a unicité du chemin les reliant. Cette propriété permet de calculer facilement les flots et de vérifier que ceux-ci ne dépendent pas des canaux : le fluide n'a pas le choix du chemin à emprunter.

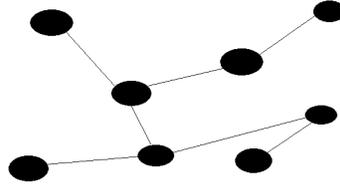


FIGURE 5 – Exemple d'arbre

En effet si  $j$  est le père de  $i$ ,  $Q_{i,j} = \tilde{Q}_i + \sum_{k \text{ fils de } i} Q_{k,i}$ .

En particulier, si  $i$  est une feuille de l'arbre  $Q_{i,j} = \tilde{Q}_i$ . Par récurrence, on obtient finalement que  $Q_{i,j} = \sum_{k \text{ descendant de } i} \tilde{Q}_k$  est bien indépendant de  $D$ .

**Théorème.** *Si on note  $D_{i,j}(t)$  la variable aléatoire associée au diamètre du canal entre  $i, j$  à l'instant  $t$ ,  $Q_{i,j}(u)$  le flot entre  $i, j$  au temps  $u$ , alors dans le cas d'un arbre*

$$D_{i,j}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \int_0^{+\infty} e^{-u} f(Q_{i,j}(u)) du = D_{i,j}^\infty$$

*Démonstration.* On écrit une expression intégrale de  $D_{i,j}$  obtenue par la méthode de variation de la constante.

$$\forall t \in \mathbb{R}, D_{i,j}(t) = D_{i,j}^0 e^{-t} + \int_0^t e^{u-t} f(Q_{i,j}(u)) du = D_{i,j}^0 e^{-t} + \int_0^t e^{-u} f(Q_{i,j}(t-u)) du$$

Comme les vecteurs aléatoires  $\tilde{Q}^n$  sont i.i.d de même loi que celle de  $\tilde{Q}^0$ , que  $\tilde{Q}(t) = \tilde{Q}^{\lfloor \frac{t}{T} \rfloor}$ , et que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $Q_{i,j}(t)$  dépend uniquement de  $\tilde{Q}(t)$ ,  $D_{i,j}(t)$  suit la même loi que

$$D_{i,j}^0 e^{-t} + \int_0^t e^{-u} f(Q_{i,j}(u)) du$$

De ce fait, d'après le théorème de convergence dominée,  $D_{i,j}$  converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi dépend uniquement de celle de  $\tilde{Q}^0$ .  $\square$

D'après le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}(D_{i,j}^\infty) = \mathbb{E}\left(f\left(\sum_{k \text{ descendant de } i} \tilde{Q}_k^0\right)\right)$$

$$V(D_{i,j}^\infty) = V(f(Q_{i,j})) \sum_{n \in \mathbb{N}} (e^{-nT} - e^{-(n+1)T})^2 = V(f(Q_{i,j})) (1 - e^{-T})^2 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-2nT}$$

$$V(D_{i,j}^\infty) = \frac{1 - e^{-T}}{1 + e^{-T}} V(f(Q_{i,j})) \xrightarrow{T \rightarrow 0^+} 0$$

Il est nécessaire de remarquer que dans le cas général, on n'a pas de convergence plus forte. Cela illustre la très grande sensibilité du système et interdit d'espérer obtenir des résultats forts de convergence si on ne se libère pas du changement probabiliste des flots d'entrée. On travaillera donc à partir de maintenant avec  $\tilde{Q}$  fixé. Bien sûr, on ne pourra pas retrouver certains des réseaux

que les auteurs du papier ont obtenus, mais cela permettra d'avoir une bonne idée de l'action du système.

On sait directement que dans ce cadre, quelles que soient les conditions initiales qui conservent la structure de l'arbre, le réseau converge vers une unique forêt limite, dans le sens où  $D$  converge. La limite de  $D_{i,j}$  est alors  $f(Q_{i,j})$ .

## 5 Convergence dans le cas d'un cercle

On considère le cas d'un cercle muni de deux points, une source et un puits. On peut également voir ce réseau comme une source et un puits reliés par deux canaux distincts. Cette situation est donc sensiblement différente du cas précédent car il n'y a plus unicité du chemin entre deux points.

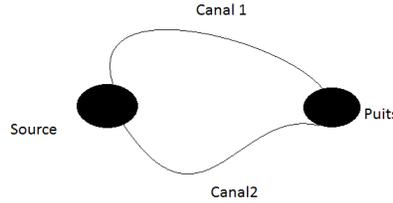


FIGURE 6 – Réseau cyclique considéré

On note naturellement le diamètre du premier canal  $D_1$  et  $D_2$  celui du deuxième ( $D_1^0, D_2^0 > 0$ ),  $L_1$  et  $L_2$  leurs longueurs respectives, ainsi que  $Q_1$  et  $Q_2$  les flots partant de la source associée. On pose également  $I_0 > 0$  le flot d'entrée à la source et  $\Delta p$  la différence de pression entre la source et le puits. Les flots se calculent facilement en utilisant  $\Delta p$  :

$$\Delta p = \frac{Q_1 L_1}{D_1} = \frac{Q_2 L_2}{D_2}$$

$$I_0 = Q_1 + Q_2 = Q_1 \left( 1 + \frac{D_2 L_1}{D_1 L_2} \right) = Q_1 \frac{D_1 L_2 + D_2 L_1}{D_1 L_2}$$

Avec les notations  $\xi(x) = f(I_0x)$  et  $R = \frac{D_1L_2}{D_1L_2 + D_2L_1}$  le système différentiel s'écrit

$$\begin{cases} D_1' &= -D_1 + \xi(R) \\ D_2' &= -D_2 + \xi(1 - R) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} R' &= \frac{-D_1L_2 + L_2\xi(R)}{D_1L_2 + D_2L_1} - \frac{R}{D_1L_2 + D_2L_1}(-(D_1L_2 + D_2L_1) + L_2\xi(R) + L_1\xi(1 - R)) \\ &= -R + R + \frac{1}{D_1L_2 + D_2L_1}(L_2\xi(R) - RL_2\xi(R) - RL_1\xi(1 - R)) \\ &= \frac{1}{D_1L_2 + D_2L_1} \underbrace{((1 - R)L_2\xi(R) - RL_1\xi(1 - R))}_{s(R)} \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $R'(t) = 0$ . Quitte à translater, on peut supposer que  $t = 0$ . On sait que  $R(0) = r \in ]0, 1[$  et  $(1 - r)L_2\xi(r) = rL_1\xi(1 - r)$ .

Soit  $x$  la solution de l'équation différentielle  $x' = -x + \xi(r)$  avec la condition initiale  $x(0) = D_1(0)$ , et  $y = \frac{(1 - r)L_2}{rL_1}x$

$$\begin{aligned} y' &= -y + \frac{(1 - r)L_2\xi(r)}{rL_1} = -y + \xi(1 - r) \\ y(0) &= \frac{1 - r}{r} \frac{L_2D_1(0)}{L_1} = \frac{L_1D_2(0)}{L_2D_1(0)} \frac{L_2D_1(0)}{L_1} = D_2(0) \\ \frac{xL_2}{xL_2 + yL_1} &= \frac{L_2}{L_2 + \frac{1-r}{r}L_2} = \frac{r}{r + 1 - r} = r \end{aligned}$$

Par unicité de Cauchy-Lipschitz,  $(x, y) = (D_1, D_2)$  et  $R = r$  est constant.

$R$  est  $C^1$  donc  $R'$  est continu et par le théorème des valeurs intermédiaires, si il ne s'annule pas, il garde le même signe. Dans les deux cas,  $R$  est monotone et comme  $R$  est borné par 1,  $R$  converge vers  $r \in [0, 1]$ . De plus,

$$r = \inf\{x \in [R(0), 1], s(x) = 0\} \text{ si } s(R(0)) \geq 0$$

$$r = \sup\{x \in [0, R(0)], s(x) = 0\} \text{ si } s(R(0)) \leq 0$$

Il reste à écrire  $D_1(t) = D_1(0)e^{-t} + \int_0^t e^{-u}\xi(R(t - u))du$  et appliquer le théorème de convergence dominée. On fait de même avec  $D_2$  pour déduire le

**Théorème.** *Pour toute condition initiale, le réseau cyclique converge. Cependant, la limite dépend des conditions initiales et on peut observer plusieurs seuils qui délimitent les différents comportements asymptotiques.*

**Remarque.** *On sait encore que le réseau converge s'il possède une structure d'arbre à boucles : il suffit d'utiliser que le flot traversant une boucle est alors constant et de se ramener au cas précédent.*

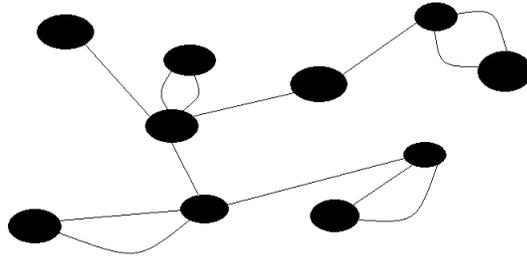


FIGURE 7 – Exemple d'arbre à boucles

Pour illustrer plus en détail ce comportement en fonction de  $\gamma$  et  $I_0$ , on propose différents graphes : des exemples de courbes de  $s$  et des portraits de phase associés. On note  $A = I_0^\gamma$  et on fixe  $L_1 = L_2 = 1$ . Sur chacune de ces figures, les pastilles de couleurs représentent un point d'équilibre. Sur les graphiques de la courbe de  $s$ , chaque point des abscisses est colorié de la même couleur que le point fixe vers lequel le système convergera en le prenant comme condition initiale. Sur les portraits de phase, sont représentés en lignes fines des exemples de trajectoires-type et en lignes grasses les deux isoclines. Elles sont ici d'équations respectives

$$0 = -x + \xi\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

$$0 = -y + \xi\left(\frac{y}{x+y}\right)$$

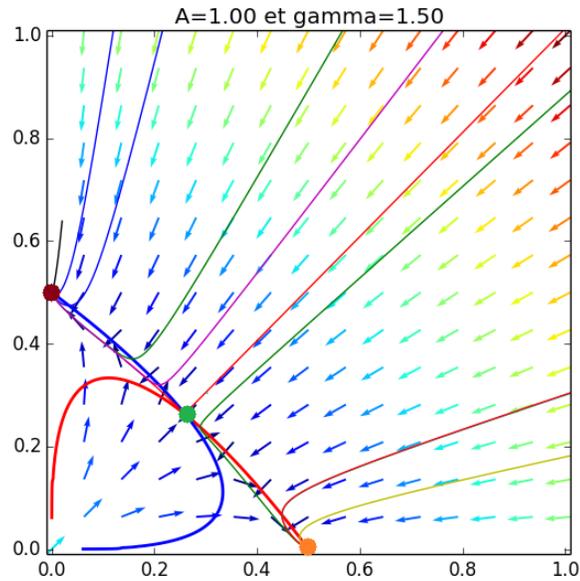
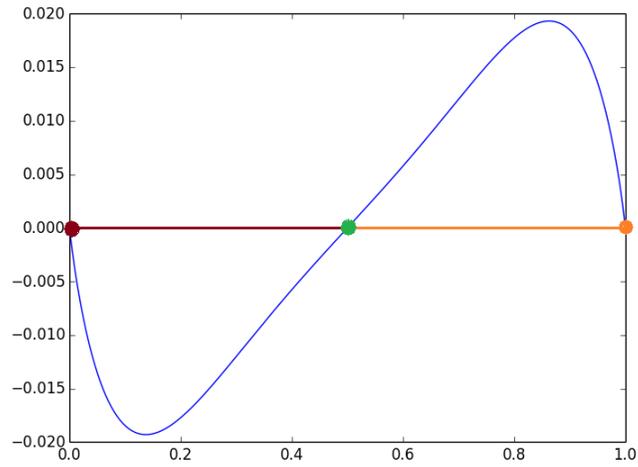


FIGURE 8 – Graphe de  $s$  et portrait de phase pour  $A = 1$  et  $\gamma = 1.5$

Pour  $\gamma > 1$  et à "petit" flot, le système est complètement compétitif. Il favorisera uniquement le canal le plus large et fera mourir l'autre. Le seul cas où les deux canaux coexistent est celui où ils sont exactement de même diamètre.

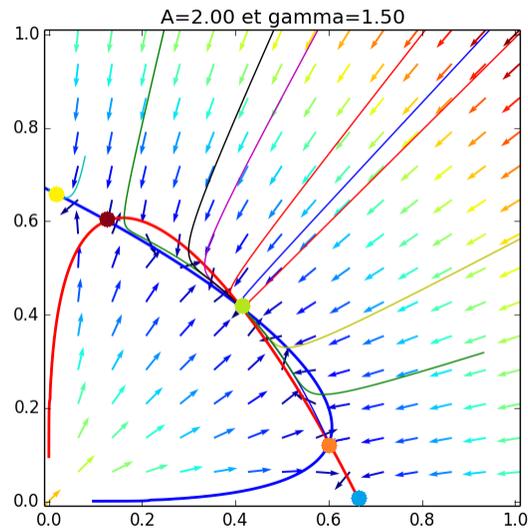
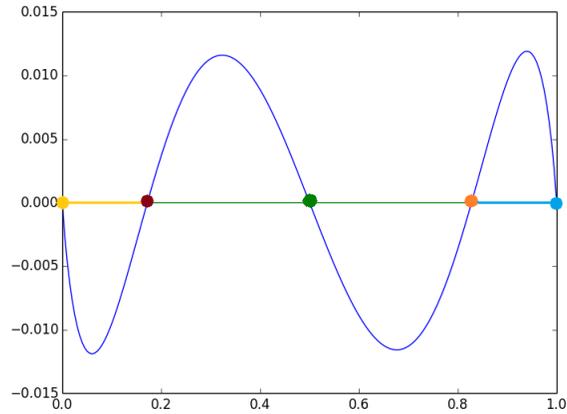


FIGURE 9 – Graphe de  $s$  et portrait de phase pour  $A = 2$  et  $\gamma = 1.5$

Pour  $\gamma > 1$  et à flot "moyen", le système est plus "démocratique". Lorsque les canaux ont un diamètre proche, ils sont tous les deux favorisés, de façon à ce que le canal plus fin rattrape son retard sur le plus gros. Cependant, si un canal est trop fin par rapport à l'autre, il n'est plus rentable pour le système de lui donner sa chance et celui-ci finit par mourir. On observe également l'apparition de points fixes instables, qui délimitent ces deux modes de convergence, où les diamètres des canaux conservent le même rapport.

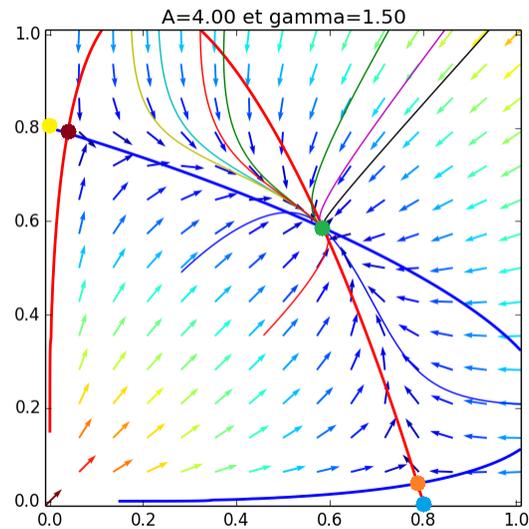
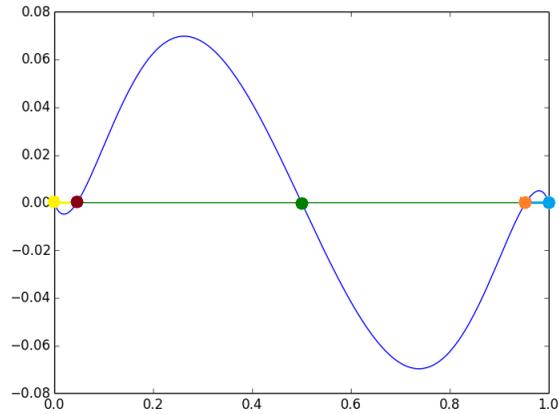


FIGURE 10 – Graphe de  $s$  et portrait de phase pour  $A = 4$  et  $\gamma = 1.5$

Pour  $\gamma > 1$  et à "grand" flot, la situation est similaire à celle à moyen flot, mais le système est plus tolérant. Le régime de convergence vers l'égalité des canaux est très facile à atteindre, à tel point que lors de nos premiers tests numériques, nous avons du mal à retrouver le régime du "tout ou rien". Il est la plupart du temps plus rentable de faire passer le flot dans deux canaux lorsque celui est très important.

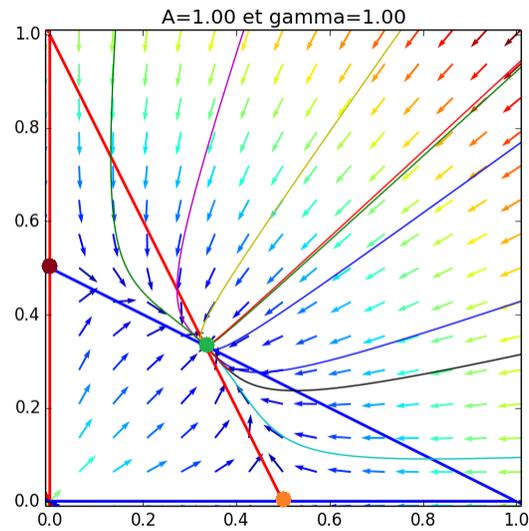
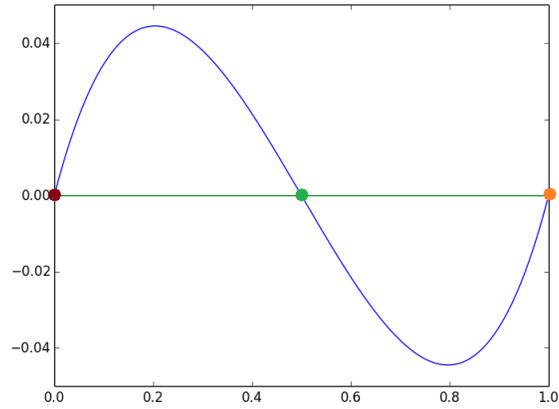


FIGURE 11 – Graphe de  $s$  et portrait de phase pour  $A = 2$  et  $\gamma = 1$

Pour  $\gamma = 1$ , la situation est totalement différente. Pour n'importe quel flux, on observe des graphiques similaires. Le système est ici complètement "égalitaire" : tant qu'un canal existe il sera favorisé, même avec des flots minuscules. Ceci peut s'expliquer car avec  $\gamma = 1$  la courbe est concave au voisinage de 0, contrairement avec  $\gamma > 1$ , où elle est convexe.

## 6 Etude des points fixes

Nous nous plaçons à présent dans le cas d'un réseau constitué d'un point source  $S$  et un puits  $P$ , reliés par  $n$  canaux parallèles qu'on notera  $D_i$ ,  $i \in J = \{1, \dots, n\}$ , de longueurs  $L_i = 1$ .

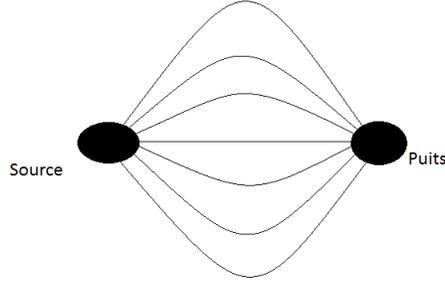


FIGURE 12 – Réseau de canaux en parallèles considérés

**Lemme.** *De façon analogue au cas de deux chemins,*

$$Q_i = \frac{D_i}{S} \cdot I_0$$

, où

$$S = \sum_{j \in J} D_j$$

Par conséquent,  $D'_i = -D_i + f(Q_i) = -D_i + f\left(\frac{D_i}{S}\right)$ . On va noter  $x_i = \frac{D_i}{S}$ . Le réseau vérifie  $\sum_{i \in J} Q_i = I_0$ . Posons  $\xi(x) = \frac{A \cdot x^\gamma}{1 + A \cdot x^\gamma}$ , où  $A = I_0^\gamma$  et qui satisfait alors  $\xi(x_i) = f(Q_i)$ .

**Définition.** *Un point fixe  $(D_i)_{i \in J}$  sera dit trivial, si tous les  $D_i$  non nuls sont égaux entre eux.*

Après ces considérations préliminaires, les notations étant fixées, supposons que  $(D_i)_{i \in J}$  est un point fixe (i.e  $\forall i \in J$ ,  $D_i = f(Q_i)$ ). Grâce au lemme, en supposant que tous les canaux sont non nuls, cette condition est équivalente à  $S = g(x_i), \forall i \in J$ , où  $g$  est une fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) := \frac{\xi(x)}{x}$ .

**Théorème.** *Soient  $\gamma, I_0$  fixés. Si  $\gamma > A + 1$  ou  $\gamma = 1$ , alors le système admet un unique point fixe où tous les canaux sont non nuls :  $(x_i)_{i \in J} = (1/n)_{i \in J}$*

*Démonstration.* Étudions l'injectivité de  $g$ . Comme  $x_i > 0, \forall i$  et  $g \in C^\infty(]0, 1[)$ , regardons quand  $0 \neq g'(x) = \frac{Ax^{\gamma-2}}{(1+Ax^\gamma)^2} \cdot (\gamma - 1 - Ax^\gamma)$ . Donc,  $g'(x) = 0 \iff \gamma - 1 - Ax^\gamma = 0$ , vu que nous avons supposé tous les canaux non-nuls. Or,  $x^\gamma \leq 1$ , car  $x \leq 1, 0 < \gamma$ .  $\square$

Étudions maintenant le cas où  $1 < \gamma < A + 1$ .

**Lemme.** *Le cardinal de la pré-image par  $g$  d'un point est au plus 2.*

*Démonstration.* Supposons, par l'absurde, que  $\exists x_1, x_2, x_3 \in [0, 1]$  distincts tels que  $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$ . On peut les supposer ordonnés. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis sur les paires  $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$  pour obtenir deux points distincts où  $g'$  s'annule. Ceci contredit l'expression de  $g'$  dans la preuve du théorème précédent, qui montre que  $g'$  ne s'annule qu'une seule fois sur  $]0, 1[$ .  $\square$

Soit  $S \in \mathbb{R}_+^*$ . On note  $x, x' \in g^{-1}(S)$ . Comme nous avons supposé tous les  $x_i$  non-nuls, quitte à renuméroter les canaux, il existe  $k \in J$  tel que  $x_i = x, \forall i \leq k$  et  $x_i = x', \forall i \geq k + 1$ . De plus,  $x$  et  $x'$  vérifient  $kx + (n - k)x' = 1$ . Donc, on doit trouver  $x$ , tel que  $g(x) = g((1 - kx)/(n - k))$ , avec  $x \in ]0, 1/k[$

Regardons donc les zéros de la fonction

$$h : \left[0, \frac{1}{k}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto g(x) - g\left(\frac{1 - kx}{n - k}\right)$$

C'est une application  $C^\infty$

**Théorème.** *Si on suppose  $1 < \gamma < A + 1$  et  $(\gamma - 1)n^\gamma < A$ , il existe un point fixe non trivial.*

*Démonstration.*  $h(0) = g(0) - g(1/n) = -\frac{A \cdot (\frac{1}{n-k})^{\gamma-1}}{1 + A \cdot (\frac{1}{n-k})^\gamma} < 0$ , car  $g(0) = 0$  et  $\gamma > 1$ .

$$h\left(\frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1 - \frac{k}{n}}{n - k}\right) = 0$$

Un calcul de la dérivée,  $h'(x) = g'(x) - g'\left(\frac{1 - kx}{n - k}\right) \cdot \left(\frac{-k}{n - k}\right)$  et une évaluation en  $\frac{1}{n}$  donnent  $h'\left(\frac{1}{n}\right) = g'\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{k}{n - k}\right)$ . Ainsi

$$h'\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \iff g'\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \iff (\gamma - 1)n^\gamma < A$$

Ainsi, si  $(\gamma - 1)n^\gamma < A$ , la fonction décroît en approchant  $\frac{1}{n}$ , un de ses zéros. De ce fait, par régularité de  $h$ ,  $\exists \tau \in ]0, \frac{1}{n}[$  tel que  $h(x) > 0$ . Par ailleurs, on a vérifié que  $h(0) < 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\exists x \in ]0, \tau[$  tel que  $h(x) = 0$ . Comme  $x \neq \frac{1}{n}$ ,  $x' \neq x$  et le point fixe correspondant n'est pas trivial.

□

**Remarque.**  $h$  joue ici un rôle similaire à la fonction  $s$  rencontrée dans le cas d'un cercle, de sorte que leurs zéros indiquent les positions des points fixes.

## 7 Etude de stabilité des points fixes

### 7.1 Stabilité du point fixe trivial sans composantes nulles

Commençons par définir la notion de stabilité à laquelle on s'intéresse ici.

**Définition.** [2] Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in U$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle ouvert, contenant  $t_0$ , et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On dit que la solution  $x(t)$  du problème de Cauchy 
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\Delta)$$
 d'intervalle maximal  $I$  est asymptotiquement stable si

-  $[t_0, \infty[ \subset I$

-  $\forall \epsilon > 0, \exists \nu > 0, \forall y_0$  condition initiale,  $(\|y_0 - x_0\| < \nu) \implies \begin{cases} \|y(t) - x(t)\| < \epsilon, \forall t \in I \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0 \end{cases}$ , où  $y(t)$  est la solution de  $(\Delta)$  avec condition initiale  $y_0$ .

Supposons  $n \geq 2$ . On reprend les notations  $A = I_0^\gamma$  et  $\xi(x) = \frac{A \cdot x^\gamma}{1 + A \cdot x^\gamma}$ . On notera de plus  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F(D) = (F_1(D), \dots, F_n(D))$ , avec  $F_i(D_1, \dots, D_n) = -D_i + \xi\left(\frac{D_i}{\sum_k D_k}\right)$ . Le système d'équations différentielles s'écrit alors

$$D' = F(D)$$

Pour étudier la stabilité, on va regarder la matrice jacobienne  $J$  de  $F$ . Ceci se motive par les lemmes ci-dessous.

**Lemme.** Soit  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  avec des valeurs propres de parties réelles strictement négatives. Considérons le problème 
$$\begin{cases} x'(t) = Mx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Alors,  $\exists C, \kappa > 0$ , telles que  $\|x(t)\| = \|e^{tM}x_0\| \leq Ce^{-\kappa t}\|x_0\|$

*Démonstration.*  $\exists P$  une matrice inversible, telle que  $M = PJP^{-1}$ ,  $J = \text{diag}(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_k})$  matrice de Jordan, diagonale par blocs.

$$\|x(t)\| = \|e^{tM}x_0\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tPJP^{-1})^n}{n!} x_0 \right\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(tJ)^n P^{-1}}{n!} x_0 \right\| = \|Pe^{tJ}P^{-1}x_0\| \leq \|P\| \|e^{tJ}x_0\| \|P^{-1}\|$$

. Or,  $e^{tJ} = \text{diag}(e^{tJ_{\lambda_1}}, \dots, e^{tJ_{\lambda_k}})$  et donc  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\exists C_i, \kappa_i > 0$ ,  $\|e^{tJ_{\lambda_i}}\| \leq C_i e^{-\kappa_i t}$ . En posant  $C = \prod_{n=1}^k C_k$ ,  $\kappa = \max_{n \in \llbracket 1, k \rrbracket} (\kappa_i)$ , on obtient l'affirmation souhaitée.  $\square$

**Lemme** (Théorème de Lyapounov). [2] *On se donne  $x_0$  un point fixe de l'équation différentielle  $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$ . Supposons, que  $f$  est continument différentiable au voisinage de  $x_0$ . Si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont de parties réelles strictement négatives, alors le point  $x_0$  est asymptotiquement stable.*

*Démonstration.* (tirée de [3]) En remplaçant  $f$  par  $x \mapsto f(x - x_0)$  et en translatant la solution par  $x_0$ , on suppose que  $x_0 = 0$ .

On va se ramener au cas linéaire du lemme précédent. Soit  $M = f'(0)$ . Le développement de Taylor assure que  $f(x(t)) = Mx(t) + r(x(t))$ , avec  $r$  qui satisfait  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|r(x)\|}{\|x\|} = 0$ .

L'équation différentielle de l'énoncé devient  $\frac{d}{dt}x(t) = Mx(t) + r(x(t))$  (\*\*). On rappelle que les valeurs propres de  $M$  sont toutes négatives, donc par le lemme sur le cas linéaire,  $\exists C, \kappa > 0$ , telles que  $\|e^{tM}x\| \leq Ce^{-\kappa t}\|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Par propriété de  $r$ ,  $\exists \delta > 0$ ,  $\|r(x)\| \leq \frac{\kappa}{2C}\|x\|$ , pour  $\|x\| < \delta$ . Considérons  $x(t)$  une solution de (\*\*) avec  $x(0) = x_1$  pour condition initiale, où  $\|x_1\| \leq \frac{\delta}{2C}$ . Alors, on a  $x(t) = e^{tM}x_1 + \int_0^t e^{(t-s)M} r(x(s)) ds$ . En effet, c'est bien une solution, et l'affirmation vient de l'unicité à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Montrons à présent que  $\|x(t)\| < \delta, \forall t \in I$ , où  $I$  le domaine de définition de la solution. Notons  $t_1 = \sup \{t \in I \mid \|x(t)\| < \delta\}$ .

Supposons  $t < t_1$ . Par l'inégalité triangulaire,

$$\|x(t)\| \leq Ce^{-\kappa t}\|x_1\| + \int_0^t Ce^{-\kappa(t-s)} \frac{\kappa}{2C}\|x(s)\| ds$$

En appliquant le lemme de Gronwall à  $e^{\kappa t}\|x(t)\| \leq C\|x_1\| + \int_0^t \frac{\kappa}{2} e^{\kappa s}\|x(s)\| ds$ , on obtient  $e^{\kappa t}\|x(t)\| \leq C\|x_1\| e^{\frac{\kappa}{2}t}$ . Finalement,  $\|x(t)\| \leq Ce^{-\frac{\kappa}{2}t} \frac{\delta}{2}$ . Si  $t = t_1 < \infty$ , cela reste vrai par continuité  $x(t)$ , donc,

en particulier,  $\|x(t_1)\| \leq \frac{\delta}{2}$ , ce qui contredit la définition de  $t_1$ . Donc,  $\|x(t)\| \leq Ce^{-\kappa \frac{t}{2} \frac{\delta}{2}}, \forall t \in I$ .

Ceci permet de vérifier les deux conditions de la définition. En effet, la solution est, d'après l'expression de  $x(t)$ , bien définie pour tout  $t > 0$ , d'après le théorème de sortie de tout compact. La deuxième condition est vérifiée pour  $\delta > 0$  suffisamment petit, plus précisément ( $\delta < \frac{\epsilon}{C}$ ), et  $x(t)$  converge bien vers 0.  $\square$

**Remarque.** Une démonstration analogue permet de montrer que si  $M$  a au moins une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors le point fixe est instable. Néanmoins, dans le cas où toutes les valeurs propres sont de partie réelle négative avec au moins une imaginaire pure, on ne peut pas statuer directement sur la stabilité.

Revenons à l'étude de la fonction  $F$ . Un calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial F_i}{\partial D_j} = -\frac{D_i}{(\sum_k D_k)^2} \cdot \xi' \left( \frac{D_i}{\sum_k D_k} \right), \text{ si } i \neq j$$

et

$$\frac{\partial F_i}{\partial D_i} = -1 + \frac{\sum_k D_k - D_i}{(\sum_k D_k)^2} \cdot \xi' \left( \frac{D_i}{\sum_k D_k} \right)$$

Le point fixe trivial  $x = (x_i)_i$  sans composantes nulles correspond, par définition, à la situation où  $x_i = \xi(1/n), \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Lemme.** Si  $x$  est le point fixe trivial sans composantes nulles, alors  $J(F)_x = a \cdot I + b \cdot J$ , où  $J(F)_x$  est la matrice jacobienne de  $F$  au point  $x$ ,  $I$  la matrice identité,  $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$ ,  $b = -\frac{\gamma}{n(1 + \frac{A}{n^\gamma})}$ ,

et  $a = -1 + \frac{\gamma}{1 + \frac{A}{n^\gamma}}$

*Démonstration.*  $\xi'(x) = \frac{\gamma \cdot Ax^{\gamma-1}}{(1 + Ax^\gamma)^2} = (\xi(x))^2 \cdot \frac{\gamma}{Ax^{\gamma+1}}$ . Ainsi,  $b$  se calcule directement

$$b = -\frac{1}{n^2 \xi \left( \frac{1}{n} \right)} \cdot \xi' \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{\gamma}{n \left( 1 + \frac{A}{n^\gamma} \right)}$$

et  $a + b = -1 + \frac{n-1}{n^2 \xi \left( \frac{1}{n} \right)} \cdot \xi' \left( \frac{1}{n} \right) = -1 - (n-1)b$ . Alors,

$$a = -1 - nb = -1 + \frac{\gamma}{1 + \frac{A}{n^\gamma}}$$

□

**Théorème.** *Le point fixe  $x$  trivial sans composantes nulles est stable, si*

$$n^\gamma(\gamma - 1) < A$$

*Démonstration.* Par le lemme, on écrit  $J(F)(x) = a \cdot I + b \cdot J$ . La matrice  $J$  est diagonalisable par une matrice  $P$ . En effet,  $PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$  et  $P$  commute avec l'identité. Donc,  $J(F)(x)$  se diagonalise par  $P$  et ses valeurs propres sont  $a$  et  $a + nb$ . Comme  $b < 0$ ,  $a + nb < a$ . Pour avoir la stabilité, en vue du lemme (théorème de Lyapounov), il suffit que  $a < 0$ . Vu l'expression de  $a$  obtenue dans le lemme, c'est le cas si  $n^\gamma(\gamma - 1) < A$ . □

**Remarque.** *Si cette inégalité est fautive et qu'il n'y a pas d'égalité, le point fixe trivial sans composantes nulles est instable.*

**Corollaire.** *Si  $\gamma = 1$ , le point fixe trivial sans composantes nulles est toujours stable.*

L'utilisation du lemme ci-dessus se généralise à tous les points fixes, bien que les matrices et les expressions soient plus compliquées. De ce fait, on n'arrive plus à écrire la Jacobienne comme une combinaison linéaire de  $I$ ,  $J$  pour obtenir un résultat général sur tous les points fixes non triviaux, comme c'était le cas dans le théorème précédent. On va donc se contenter de présenter la méthode et laisser les calculs, permettant d'arbitrer sur la stabilité, cas par cas, ce qu'on va ensuite illustrer sur un exemple.

## 7.2 Stabilité des autres points fixes

On se place dans le cas  $\gamma > 1$ . Soit  $x_0$  un point fixe. Par le lemme dans la section précédente, il est de la forme  $x_0 = (x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , i.e

$$\exists k, l \in \mathbb{N}, (x_0)_i = x_1 \forall i \leq k, (x_0)_i = x_2 \forall k + 1 \leq i \leq k + l, (x_0)_i = 0 \forall k + l + 1 \leq i$$



Avec ces notations,

$$T_{x_0} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c-a)X_1 + (aS(X_1) + bS(X_2))U_1 \\ (d-b)X_2 + (aS(X_1) + bS(X_2))U_2 \\ -X_3 + (aS(X_1) + bS(X_2))U_3 \end{pmatrix}$$

Donc,  $\lambda$  valeur propre, si et seulement si  $\begin{cases} (\lambda - (c-a))X_1 = (aS(X_1) + bS(X_2))U_1 \\ (\lambda - (d-b))X_2 = (aS(X_1) + bS(X_2))U_2 \\ (\lambda - 1)X_3 = (aS(X_1) + bS(X_2))U_3 \end{cases}$  (\*) Dans un premier temps, supposons  $\lambda = c-a \in \mathbb{R}$ . De la première équation, on tire que  $(aS(X_1) + bS(X_2)) = 0$ . Donc,  $X_3 = 0 = X_2$ . Ainsi,  $S(X_2) = 0$ , donc  $X$  vecteur propre de valeur propre  $(c-a)$  si et seulement si  $(S(X_1) = 0$  et  $X_1 \neq 0)$ . Ceci est possible dès que  $k \geq 2$ . L'espace propre  $E_{c-a}$  est de dimension  $k-1$ .

On procède de même pour  $\lambda = d-b$ , ce qui donne  $\dim(E_{d-b}) = l-1$ . Pour  $\lambda = -1$ , la dernière équation de (\*) implique que  $(aS(X_1) + bS(X_2)) = 0$ . Donc,  $X_1 = 0 = X_2$  et  $\dim(E_{-1}) = n - (k+l)$ . Pour déterminer les deux valeurs propres qui restent, on suppose  $\lambda \notin \{-1, c-a, d-b\}$ . Alors, (\*) équivaut à

$$\begin{cases} X_1 = \frac{aS(X_1) + bS(X_2)}{\lambda - (c-a)} U_1 \\ X_2 = \frac{aS(X_1) + bS(X_2)}{\lambda - (d-b)} U_2 \\ X_3 = \frac{aS(X_1) + bS(X_2)}{\lambda - 1} U_3 \end{cases}$$

En appliquant  $S$  des deux côtés du système ci-dessus, on s'aperçoit que  $\lambda$  satisfait

$$\begin{cases} S(X_1) = k \cdot \frac{aS(X_1) + bS(X_2)}{\lambda - (c-a)} \\ S(X_2) = l \cdot \frac{aS(X_1) + bS(X_2)}{\lambda - (d-b)} \end{cases}$$

Ceci peut s'écrire  $aS(X_1) + bS(X_2) = (aS(X_1) + bS(X_2)) \cdot \left( \frac{ka}{\lambda - (c-a)} + \frac{lb}{\lambda - (d-b)} \right)$ . Or, si  $aS(X_1) + bS(X_2) = 0$ , on est ramené à  $\lambda \in \{-1, c-a, d-b\}$ . Donc,

$$1 = \frac{ka}{\lambda - (c-a)} + \frac{lb}{\lambda - (d-b)},$$

ce qui se réécrit comme une équation du second degré

$$\lambda^2 + \lambda(-(c-a) - (d-b) - ka - lb) + ((c-a)(d-b) + (d-b)ka + (c-a)lb) = 0$$

qui a deux solutions réelles  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . En effet, le discriminant

$$\Delta = ((c-a) - (d-b) + ka - lb)^2 + 4 \cdot (ka)(lb)$$

est positif, car  $a, b$  sont tous les deux négatifs.

**Résultat.**  $J(F)_x$  a pour valeurs propres

- $c - a$  si  $k \geq 2$
- $d - b$  si  $l \geq 2$
- $-1$  si  $k + l < n$
- $\lambda_1$  et  $\lambda_2$

**Remarque.** Pour un point fixe trivial (i.e.  $x_2 = 0$ ),  $x_0 = (x_1, \dots, x_1, 0, \dots, 0)$ , et donc  $b = 0$ ,  $d = -1$ .

Supposons d'abord  $k \geq 2$ . Donc,  $\{-1, c - a, c + (k - 1)a\}$  est l'ensemble des valeurs propres de  $J(F)_{x_0}$ . La stabilité de  $x_0$  a lieu dès que  $c - a < 0$ , ce qui correspond à la condition trouvée dans la section précédente :  $(\gamma - 1)k^\gamma < A$ .

Si  $k = 1$ , la jacobienne de  $F$  est diagonale et ses valeurs propres sont  $-1$  et on calcule  $c = -1 + \frac{(k-1)x_1 + lx_2}{(kx_1 + lx_2)^2} \cdot \xi'(\frac{x_1}{kx_1 + lx_2}) = -1$ .

**Théorème.** Si  $\gamma > 1$ , un point fixe avec une seule composante non nulle est stable.

Pour le cas  $\gamma = 1$ , la même méthode marche encore car il n'existe pas de point fixe non trivial. Il suffit de prendre  $x_1 = \xi(1/k)$ ,  $x_2 = 0$ , et  $k + l = n$ . On a alors  $\xi'(0) = A$ ,  $\xi'(1/k) = Ak^2/(k + A)^2$ , et  $\xi(1/k) = A/(k + A)$ . Donc,

$$a = -\frac{1}{k + A}, \quad b = 0, \quad c = -1 + \frac{k - 1}{k + A}, \quad d = -1 + \frac{k + A}{k}$$

En trigonalisant par blocs, on trouve que les valeurs propres sont  $d$  (si  $l \geq 1$ ),  $c - a$  (si  $k \geq 2$ ), et  $c + (k - 1)a$ . Or  $d > 0$  et  $c - a < 0$ . Donc,

**Théorème.** Pour  $\gamma = 1$ , le seul point fixe stable est le point fixe trivial sans composantes nulles.

### 7.3 Etude numérique de la stabilité d'un exemple de point non-trivial

Pour étudier un tel point fixe, il est d'abord nécessaire de le trouver. Nous allons en chercher un avec tous les canaux non-nuls, ce qui revient à déterminer les paramètres  $I_0$ ,  $\gamma$  tels que le raisonnement de la section 6 sur les point fixes non-triviaux en garantit l'existence. On rappelle que pour cela, on regardait les zéros de la fonction  $h : [0, \frac{1}{k}] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) := g(x) - g(\frac{1-k \cdot x}{n-k})$ , où  $g(x) = \frac{\xi(x)}{x}$  et  $k$  est le nombre de canaux non-nuls égaux à  $x_0$  un zéro de  $h$ , que le point fixe possédera. Il est inutile de préciser que en général, pour des  $I_0$ ,  $\gamma$  arbitraires, l'existence d'un tel point fixe n'a pas lieu.

On fixe le nombre de canaux parallèles entre la source et le puits  $n = 10$ . Nous avons trouvé que pour  $\gamma = 1.4$ ,  $I_0 = 20^{(1/\gamma)}$ , ainsi que  $k = 4$ , c'est bien le cas, ce que illustre le graphe ci-dessous.

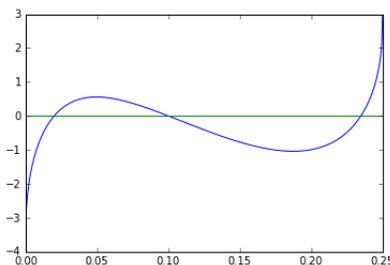


FIGURE 13 – Graphe de la fonction  $h$ , pour  $\gamma = 1.4$ ,  $I_0 = 20$ ,  $k = 4$

Les zéros de  $h$ , trouvés numériquement et qu'on notera respectivement  $p_1, p_2$ , sont  $\{0.020, 0.235\}$ . Nous allons étudier le point fixe correspondant à  $p_1$ . On rappelle alors que, avec le raisonnement de la section 6, quitte à rénuméroter les canaux, il est de la forme  $g(p_1) \cdot (p_1, \dots, p_1, \frac{1-4 \cdot p_1}{10-4}, \dots, \frac{1-4 \cdot p_1}{10-4})$ , où 4 canaux sont de diamètres égaux à  $(g(p_1) \cdot p_1)$ , et les 6 autres  $(g(p_1) \cdot \frac{1-4 \cdot p_1}{10-4})$ . Concrètement, ceci donne

$$P_1 = (0.080, 0.080, 0.080, 0.080, 0.059, 0.059, 0.059, 0.059, 0.059, 0.059).$$

Pour la stabilité, on va comparer les résultats numériques, avec ceux de la section précédente. Numériquement, en regardant l'évolution des diamètres dans le temps, on remarque deux choses. Premièrement, ce point peut effectivement être un candidat pour un point fixe non-trivial, vu le manque d'évolution au début et l'évolution ultérieure venant des imprécisions de calcul. De plus, cela montre que les erreurs induites par l'algorithme d'évolution sont suffisantes à elles seules pour s'éloigner du point fixe non trivial, donnant ainsi l'impression que le réseau converge vers un point fixe trivial.

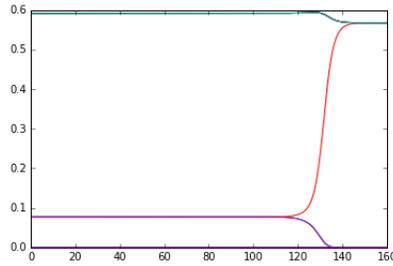


FIGURE 14 – L'évolution des diamètres des canaux dans le temps

Pour prouver son instabilité, on dispose de la remarque évoquée après le théorème de Lyapunov sur les valeurs propres, utilisé pour montrer la stabilité dans le cas des points fixes triviaux. En effet, si une des valeurs propres de  $J(F)(P_1)$  est strictement positive,  $P_1$  instable. L'ensemble des valeurs propres trouvées dans ce cas était  $\{c - a, d - b, \lambda_1, \lambda_2\}$ , où  $\lambda_i$  sont les solutions de l'équation trouvée précédemment  $\lambda^2 + \lambda(-(c - a) - (d - b) - ka - lb) + ((c - a)(d - b) + (d - b)ka + (c - a)lb) = 0$ . Il s'avère qu'ici,

$$\begin{cases} a = -4.985 \\ b = -11.267 \\ c = 3.885 \\ d = 8.539 \end{cases}$$

Donc, l'ensemble des valeurs propres est  $\{8.871, 19.806, 46.684, -35.417\}$ , et par conséquent,  $P_1$  est instable, ce qui correspond aux attentes vu les résultats de la simulation.

## 8 Etude du réseau en fonction de $I_0$

Au cours des simulations, on a remarqué qu'un grand flot  $I_0$  a pour effet d'augmenter le nombre de canaux non-nuls. Ceci paraît naturel dans la mesure où une croissance de  $I_0$  conduit à une hausse de tous les flots. Par croissance de  $f$ , tous les canaux risquent de devenir plus grands. Ainsi, des canaux peuvent être ramenés à grossir et le réseau semble tendre vers un point fixe trivial, malgré des conditions initiales où les-dits canaux sont très petits. Ceci est expliqué plus précisément dans le cas du cercle traité auparavant. La situation inverse se produit pour un flot petit : même des grands canaux vont disparaître.

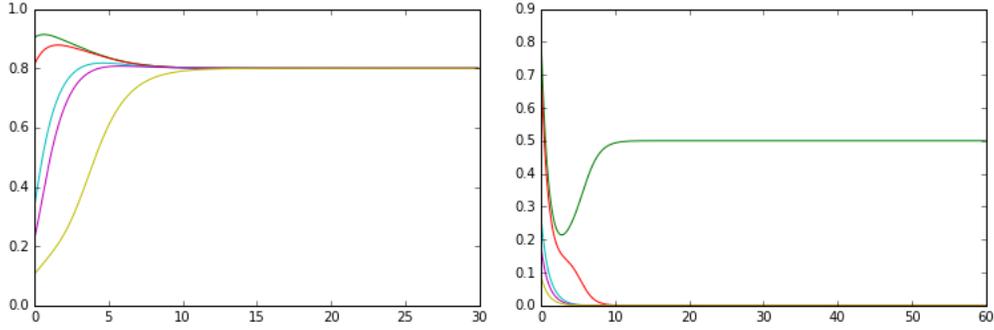


FIGURE 15 – Les évolutions des diamètres des canaux pour  $\gamma = 2$  et  $I_0 = 10$ ,  $I_0 = 1$  respectivement.

Il paraît donc naturel de regarder s’il y a une transition et en particulier, si elle pourrait donner lieu à un point fixe non-trivial. Dans ce cas particulier, on essaye de trouver le seuil de transition  $K$  pour le canal tracé en bleu. Sur les graphiques ci-dessous, on voit que  $K$  se situe entre 4.1927 et 4.1928.

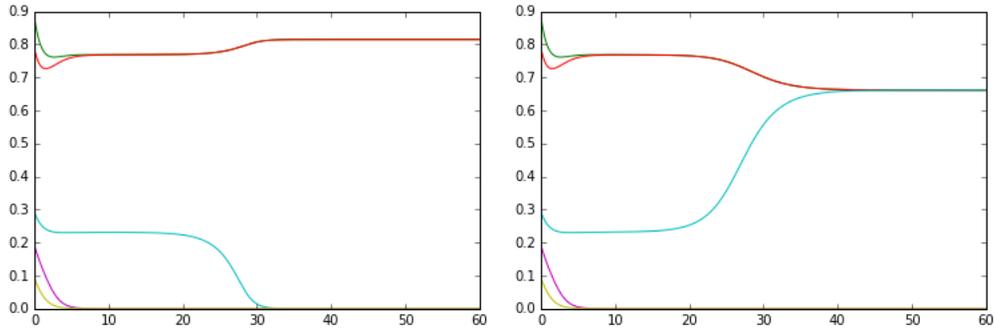


FIGURE 16 – Les évolutions des diamètres des canaux pour  $\gamma = 2$  et  $I_0 = 4.1927$ ,  $I_0 = 4.1928$  respectivement.

On affirme que la condition suffisante du théorème d’existence des points fixes non-triviaux est vérifiée. En effet, le nombre de canaux non-nuls  $n = 3$  et donc,  $3^\gamma < I_0^\gamma$ . Pour les trouver explicitement, on regarde les graphes de  $h$  pour ces deux flots. Comme  $h$  varie continûment en  $I_0$ , on obtient également des estimations pour ces points.

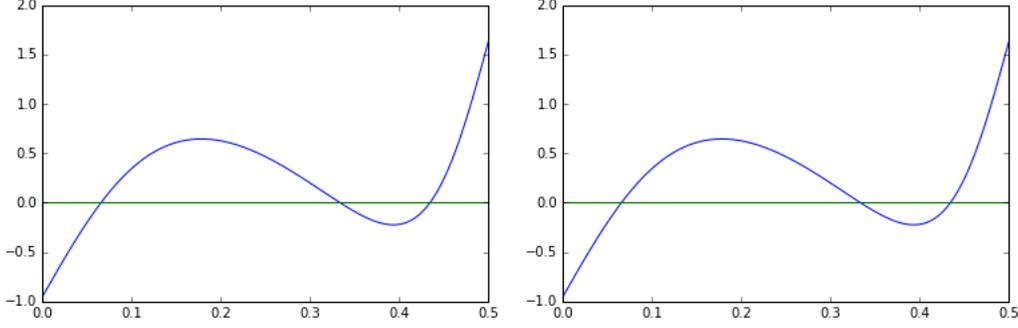


FIGURE 17 – Les graphes de  $h$  pour  $\gamma = 2$  et  $I_0 = 4.1927$ ,  $I_0 = 4.1928$  respectivement.

Le point à souligner est donc que bien que pour  $\gamma = 2$  on ait un choix abondant de  $I_0$  pour lesquels l'existence d'un point fixe non-trivial est assurée, on a réussi à établir un procédé inverse - étant donné des conditions initiales, trouver un flot pour que les canaux non-nuls ne soient pas tous de mêmes tailles.

## 9 Etude des canaux non-nuls en fonction de $\gamma$

Le paragraphe précédent traite du cas où on fait varier  $I_0$ , mais on peut faire de même avec  $\gamma$ . D'après les résultats des chercheurs japonais, une augmentation de ce paramètre donne lieu à une tendance à minimiser "le coût", i.e. le réseau va plus ressembler à un arbre connexe minimal, tandis qu'une baisse fait apparaître des points de bifurcation. Ceci se voit bien dans le cas des grilles, ou réseaux initialement plus connexes, dont va traiter la section suivante. Tout de même, ces traits apparaissent déjà dans le cas de  $n$  canaux parallèles.

En variant  $I_0$ , nous avons réussi à obtenir des bornes proches, sur lesquels le comportement du canal bleu étaient différents. Il paraît naturel d'espérer qu'il soit possible d'observer le même comportement pour le deuxième paramètre du modèle. C'est bien le cas, et après quelques simulations, on obtient les graphiques suivants.

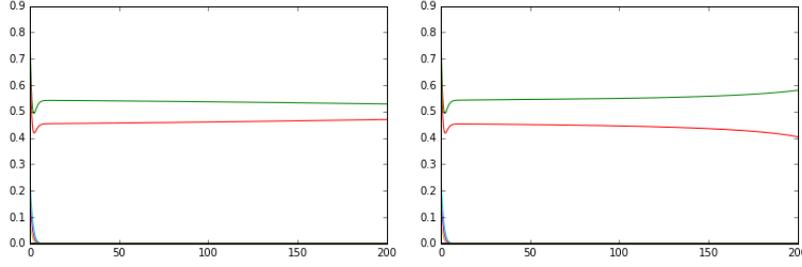


FIGURE 18 – L'évolution des canaux pour  $I_0 = 2$  et  $\gamma = 1.990$ ,  $\gamma = 1.994$  respectivement.

**Remarque.** *On remarque que contrairement au cas où nous faisons varier  $I_0$ , on n'a pas pu donner plus de précision au niveau des millièmes. Même en temps long, on ne peut arbitrer sûrement sur le comportement que va suivre la courbe.*

Comme auparavant, on vérifie qu'entre ces deux valeurs de  $\gamma$ , on peut espérer avoir un point fixe non-trivial. La condition suffisante du théorème est également vérifiée. Tout de même, on est beaucoup plus près de l'égalité :  $0 < A - 2^\gamma(\gamma - 1) \leq 0.004 \cdot 2^\gamma \leq 0.016$

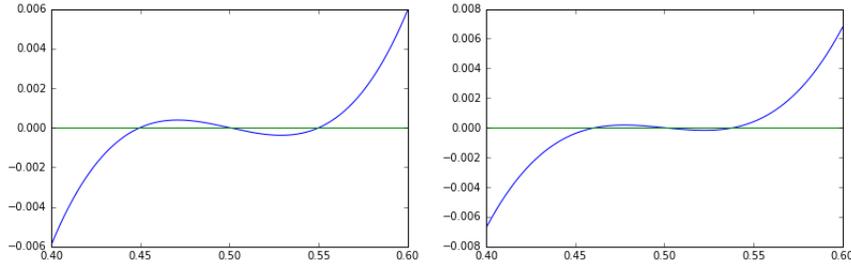


FIGURE 19 – Les graphes de  $h$  pour  $I_0 = 2$  et  $\gamma = 1.990$ ,  $\gamma = 1.994$  respectivement.

Il est important de remarquer que pour rendre visible les zéros de  $h$  dans ces cas là, une modification des axes était nécessaire. Ceci témoigne du fait qu'en approchant la borne de la condition suffisante, les zéros correspondants aux points fixes non-triviaux se rapprochent de  $\frac{1}{n}$ .

Il paraît tout aussi pertinent de préciser que ceci est en lien avec la vitesse à laquelle le réseau se dirige vers un point fixe trivial. En effet, même un temps plus long d'évolution de la simulation (200 ici, contre 60 du paragraphe précédent) ne permet pas de voir les canaux se rejoindre ou s'écarter considérablement. Ceci à son tour illustre le lien avec la condition suffisante de stabilité pour les points fixes triviaux, qui coïncide avec l'inégalité donnant un point fixe non-trivial. D'après les graphiques, plus on sera proche de cette borne, moins vite on se rapprochera de l'état final.

**Remarque.** *Ces considérations laissent penser qu'il est possible que les conditions suffisantes trouvées dans les théorèmes respectifs soient aussi nécessaires.*

## 10 Exemples d'évolution d'un réseau grille

Pour des réseaux un peu plus complexes, les courbes d'évolution des diamètres peuvent différer encore de celles rencontrées dans le cas précédent. Sans nous attarder dessus, on fournit l'exemple suivant :

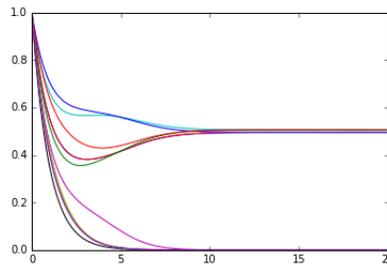


FIGURE 20 – L'évolution des diamètres des canaux dans le cas d'une grille  $3 \times 3$ , un puits et une source distancés.

Dans cette section, à l'instar des chercheurs japonais, nous allons faire varier puits et sources, en nous concentrant sur une grille  $3 \times 3$ . On rappelle que dans le modèle, nous fixons un puits et une source, laissons pendant  $T > 0$  du fluide "s'écouler", pour ensuite, choisir de façon aléatoire parmi les autres points du réseau un nouveau puits et une nouvelle source. On répétera ce procédé  $N$  fois. Ici, nous allons prendre  $T = 1$ ,  $N = 100$ .

**Remarque** (Problème de non-connexité du réseau). *La valeur  $T = 1$  n'est pas un choix tout à fait arbitraire. Nous avons observé qu'à puits et source fixés, il peut arriver que de nombreux canaux deviennent très petits. Ainsi, si on a un point qui depuis plusieurs cycles n'a pas été puits ou source, ni au moins à proximité d'un chemin y menant, les canaux qui l'entourent deviennent très fins et sont amenés à disparaître numériquement. Ceci a pour effet de rendre la matrice  $M(D)$  non-inversible.*

*Dès lors, tant que le puits et la source sont dans la même composante connexe, le problème reste bien posé. Par contre, sans un traitement plus vigilant, ceci empêche le système d'être bien résoluble numériquement.*

Nous fixons  $I_0 = 2$ , ainsi que les conditions initiales où tous les diamètres sont égaux à 1. et nous allons commenter les résultats de différentes simulations.

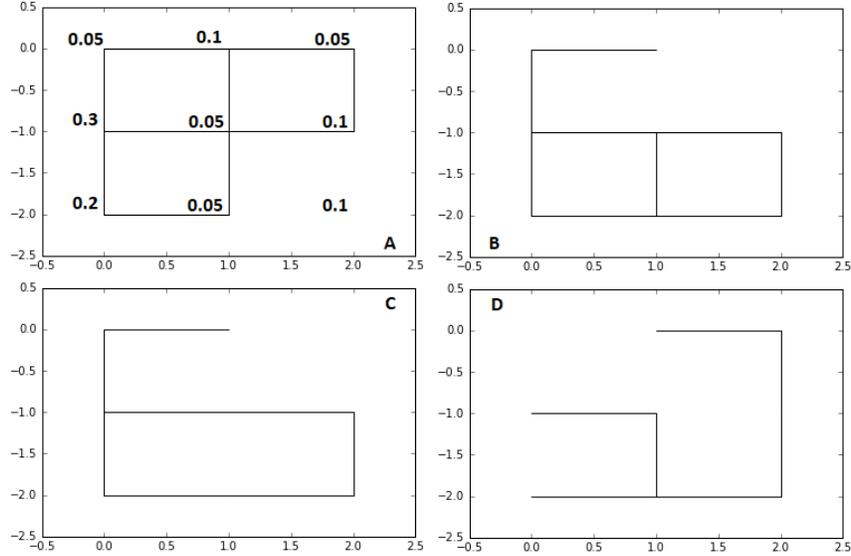


FIGURE 21 – Les canaux de diamètres non-nuls. Les valeurs dans la figure A correspondent aux probabilités de choisir le sommet donné comme puits ou source. Les simulation A, B ont eu lieu avec  $\gamma = 2$  et C, D avec  $\gamma = 3$

Premièrement, on remarque que  $\gamma = 3$  réduit la connexité, donc par conséquent la résilience. Ceci est poussé à l'extrême dans D, qui est un arbre connexe minimal de cet ensemble de points. De plus, il y a une forte dépendance du réseaux des premiers choix de puits et sources. Ainsi, il arrive que le phénomène évoqué dans la remarque se produise déjà après 5-6 cycles de changements. Il est également curieux de noter que, à part des cas extrêmes comme dans D, il arrive souvent que la moyenne des canaux des quelques dernières itérations ne varie plus sensiblement au cours du temps. Ceci peut évoquer le cas de l'arbre, dont on a démontré la convergence en loi. Le réseau garde donc sa forme et change peu en fonction du besoin.

## 11 Tentative de modélisation du réseau ferroviaire français

En se basant sur le cas de la grille, nous avons décidé d'essayer de reproduire les résultats des chercheurs japonais, dans le cas du réseau ferroviaire français. Cependant, pour les problèmes liés à la non-connexité du réseau évoqués dans la section précédente, il n'était pas possible d'obtenir des

résultats satisfaisants en changeant de puits et de source. Par la suite, nous avons donc essayé de retrouver ce réseau en abandonnant l'aspect aléatoire, mais en rajoutant plusieurs puits et sources à la fois, sans les changer.

Pour ce faire, on se donne la carte qui suit comme référence. On choisit de se limiter à quelques villes : Paris, Lille, Strasbourg, Lyon, Marseille, Perpignan, Bayonne, Bordeaux. Commençons avec un maillage carré  $20 \times 50$ , dont tous les canaux ont des diamètres égaux à 1. On garde  $T = 1$  du paragraphe précédent, et on va effectuer 10 changements de puits et de sources, en les choisissant parmi les positions des villes citées.

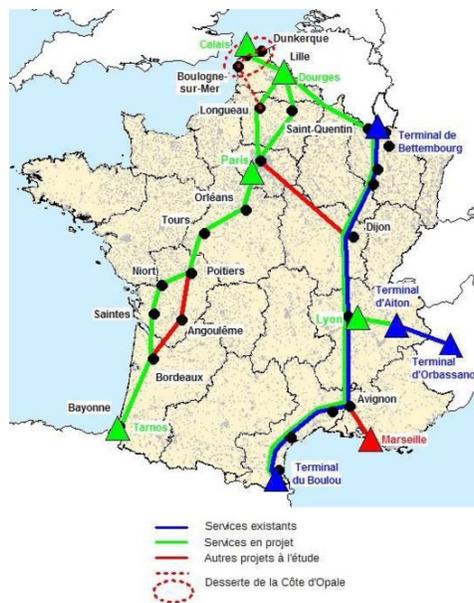


FIGURE 22 – Le réseau des principaux axes ferroviars en France (dont certains en projet) ,utilisé comme carte de référence, figure [2]

Voici quelques résultats

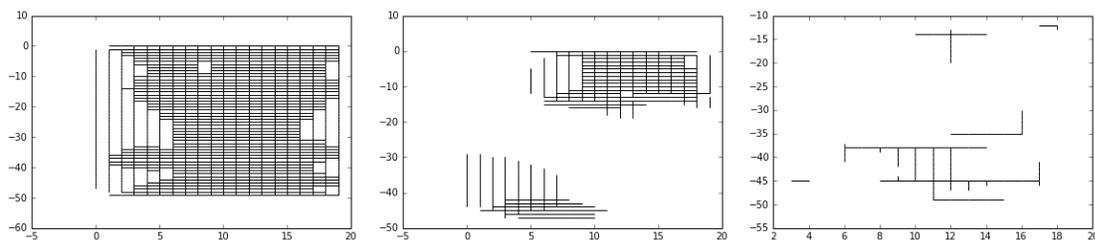


FIGURE 23 – Les canaux de diamètres non-nuls. Résultats obtenus en faisant varier puits et sources, et pour  $\gamma = 1.5$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 4$  respectivement

On remarque, comme auparavant, qu'une augmentation de  $\gamma$  rend le réseau moins connexe, voir même fait apparaître plusieurs composantes. Le fait étonnant est qu'il semble que dans le graphique correspondant à  $\gamma = 4$ , Paris est déconnecté (ou, au plus, connecté par des canaux très petits) aux autres villes, en dépit du fait que nous l'avons choisie comme la ville la plus "fréquentée" par le processus de sélection des écoulements (probabilité 1/2).

Passons maintenant aux simulations à puits et sources fixés. Etant donné que le réseau est centralisé à Paris, on se permet d'y placer un puits et chaque autre ville sera alors une source. Donc, la situation correspond à faire couler du liquide de ces villes principales vers Paris, qui reçoit ainsi un flot de  $7I_0$ .

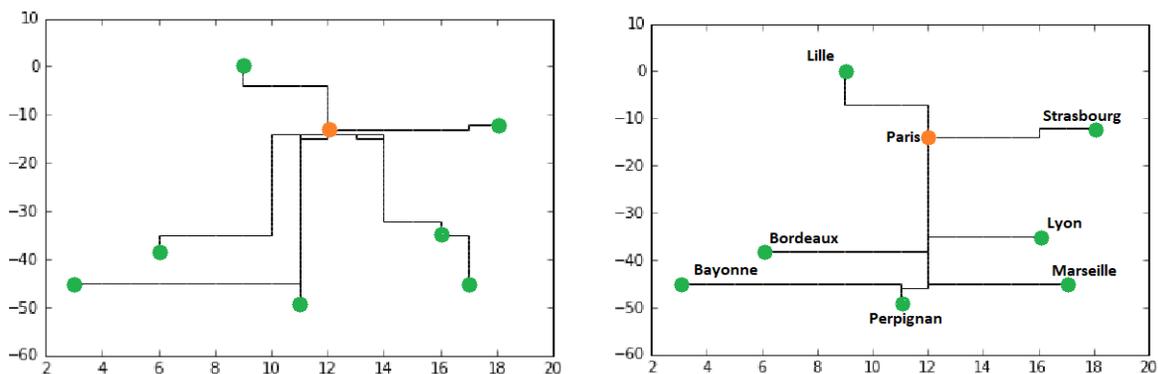


FIGURE 24 – Les canaux de diamètres non-nuls. Résultats à puits et sources fixés, et pour  $\gamma = 2$ ,  $\gamma = 4$  respectivement

Le réseau résultant pour  $\gamma = 2$  ne semble pas trop éloigné de la carte donnée en référence, si ce n'est pour le tronçon reliant Perpignan et Bayonne. Il peut paraître étonnant que dans les deux

cas, aucun lien plus direct entre Bayonne et Bordeaux ne se soit formé. On pourrait penser que Bordeaux ayant un flot d'entrée, le canal de Bayonne ne peut s'y rapprocher à cause des pressions qui y sont plus grandes. Cependant, c'est bien la situation qui se produit pour le canal allant de Paris à Marseille et qui passe par Lyon. Bien que pour ces deux villes, un changement de  $\gamma$  de 2 à 4 fait disparaître ce comportement, il n'en est guère de même pour Bayonne et Bordeaux - malgré des ajustements fins des paramètres, nous n'avons pas pu alimenter ces deux villes par des tronçons plus proches.

De plus, maintenant il ne devrait plus être étonnant de remarquer qu'un  $\gamma$  plus petit fait apparaître des points de bifurcation. Ceci a lieu ici de façon importante seulement aux alentours de Paris, avec deux chemins d'entrée possibles pour les canaux Paris-Perpignan/Bordeaux et Paris-Lyon/Marseille, ce qui correspondrait au fait que ceux-ci, sur les majeures parties de leurs longueurs, desservent deux villes (flux  $2I_0$  qui passe à travers).

Il est certainement pertinent de noter également que dans les deux cas, les réseaux finaux traversent le Massif Central, ce qui n'est pas le cas des lignes à grande vitesse françaises. Contrairement aux auteurs qui ont effectué des expériences avec la moisissure (figure [1]), nous n'avons pas modélisé les contraintes physiques. De même, on s'est restreint au cadre d'un maillage rectangulaire. Le défaut de celui-ci est que pour aller d'un sommet au sommet opposé, les deux chemins possibles sont de longueurs égales, ce qui ne favorise pas significativement l'un des deux. Reste à voir donc comment les résultats évoluent en fonction du réseau initial disponible.

## 12 Questions laissées ouvertes

Au cours de nos recherches, certaines questions ont suscité notre intérêt mais nous n'avons pas pu y apporter à ce stade des réponses satisfaisantes. Pour clore ce mémoire, nous en proposons au lecteur quelques exemples :

- A puits et sources fixés, le réseau converge-t-il toujours quelle que soit sa structure initiale ?
- A puits et sources fixés, les différences de pression sont-elles bornées ?
- A puits et sources fixés, si le réseau converge, que peut-on dire de la structure du réseau limite ?
- Avec les changements aléatoires et réguliers de puits et de source, le réseau converge-t-il toujours en loi quelle que soit sa structure initiale ? Quelles seraient alors les propriétés du

réseau aléatoire limite ?

- Si on diminue le temps entre chaque changement aléatoire de puits et de sources, peut-on obtenir des convergences probabilistes plus fortes que la convergence en loi ?
- Est-il possible de définir une "efficacité" sur l'ensemble des réseaux à  $n$  points qui serait décroissante en fonction du temps si le réseau respecte la loi d'évolution du modèle et qui convergerait toujours vers un minimum local ?
- Que se passe-t-il si on autorise l'apparition spontanée (peut-être aléatoire) de canaux ?

## 13 Références

- [ 1 ] A.Tero, S.Takagi, T. Saigusa, K.Ito, D.P.Bebber, M.D.Fricker, K.Yumiki, R. Kobayashi, T.Nakagaki,"Rules for Biologically Inspired Adaptive Network Design", Science 22 Jan 2010 : Vol. 327, Issue 5964, pp. 439-442 DOI : 10.1126/science.1177894
- [ 2 ] Bertrand Maury, Modélisation, photocopié du cours de modélisation de l'ENS, 2017
- [ 3 ] Raphl Chill, Equations différentielles et stabilité, photocopié de cours dispensé à l'Université de Metz, 2006/07

Figures :

- [ 1 ] Fig.2 A.Tero,"Rules for Biologically Inspired Adaptive Network Design", Science 22 Jan 2010 : Vol. 327, Issue 5964, pp. 439-442, tiré de <http://science.sciencemag.org/content/327/5964/439/tab-figures-data>
- [ 2 ] N. Bureau du Colombier, La France renforce son réseau d'autoroutes ferroviaires, 2013, tiré de [http://www.econostrum.info/La-France-renforce-son-reseau-d-autoroutes-ferroviaires\\_a15937.html](http://www.econostrum.info/La-France-renforce-son-reseau-d-autoroutes-ferroviaires_a15937.html)