Limite de champ moyen pour un modèle de comportement collectif

Jaime Roquero Gimenez
Encadrant : Amic Frouvelle

19 Juin 2013

Résumé

Le modèle stochastique de Vicsek a pour but d'étudier le mouvement de particules auto-propulsées, et s'applique dans le domaine de la biologie au mouvement de certains groupes d'animaux, comme les bancs de poissons ou les nuées d'oiseaux, où chaque individu du groupe d'animaux représente une particule. Ce travail consiste à étudier l'article de F. Bolley, J.A. Cañizo, J.A. Carrillo [1]. Dans cet article, on passe d'une description individuelle du phénomène à un modèle correspondant à une échelle supérieure. C'est à dire, on passe d'un système d'équations régissant le mouvement de chaque individu à des équations aux dérivées partielles portant sur des fonctions de la distribution de l'ensemble des particules. Nous allons donc reprendre cette démarche, en reformulant d'abord le modèle, puis en introduisant les outils de calcul stochastique nécessaires à l'étude de ce problème, pour déduire des équations simples régissant notre modèle simplifié et finalement revenir à celui présenté dans l'article.

Table des matières

1 Présentation du problème

Notre étude a pour but de simuler un phénomène issu des domaines de la physique ou de la biologie. Nous partons donc de certaines contraintes que nous allons respecter tout au long de l'étude.

Nous voulons que notre modèle contienne les éléments suivants :

- D'abord, nous faisons l'hypothèse que toutes les particules se déplacent à une même vitesse constante.
- Nous voulons que l'orientation du déplacement de chaque particule soit conditionnée par celle de ses voisines. L'idée est de faire en sorte que chaque particule s'aligne avec ses voisines, en réalisant une moyenne en quelque sorte.
- Finalement, nous voulons que cette réorientation se fasse avec un certain bruit pour simuler les conditions réelles biologiques ou physiques.

On fixe $d \geq 1$ la dimension de notre $\mathbb{R}$-espace euclidien dans lequel nous travaillerons. Les particules sont supposées se déplacer à vitesse constante, et l'orientation de chaque particule est conditionnée par celle de ses voisins. Ainsi on a pour une particule donnée un processus stochastique à temps continu $(X_t, V_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$ qui correspond à la position et à la vitesse de la particule. Quitte à renormaliser, on peut supposer que la norme du vecteur vitesse (qui est supposée constante à tout moment et pour toute particule) vaut 1, et c'est pour cela que le processus $(V_t)_{t\geq 0}$ est à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$. Ainsi les vecteurs vitesse pourront désormais être associés à l'orientation de l'individu. Si on s'intéresse au comportement de N individus, la famille $(X^i, V^i)_{1\leq i\leq N}$ vérifie alors un système d'équations différentielles couplées. En effet les variations des vecteurs vitesses sont liées entre elles. On suppose que l'orientation d'une particule tend à se rapprocher vers une orientation moyenne obtenue en pondérant d'une certaine façon celle de ses voisins . Pour cela on définit un vecteur J, fonction de la distance et de l'orientation des diverses particules, qui représente la direction vers laquelle tendent les vitesses de nos particules.

Pour comprendre l'intérêt du vecteur J, nous allons considérer d'abord un modèle déterministe. On suppose que nous avons un vecteur (fonction de t) $\Omega(t) \in \mathbb{R}^d$ vers lequel on veut faire tendre nos vecteurs vitesses V^i. Si on se place sur $\mathbb{R}^d$, notre équation peut s'écrire simplement, pour un certain paramètre $\lambda > 0$:

$$\frac{dV^i}{dt} = -\lambda(V^i - \Omega(t))$$

Cependant on veut que nos vecteurs représentent juste l'orientation des vitesses de nos particules. Ainsi on cherche à garder nos vecteurs V_i sur la sphère S^{d-1}. Nous considérons alors $\Omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ orientation vers laquelle on veut faire converger nos orientations V^i. Nous devons prendre alors la composante tangentielle de la façon suivante : on définit $V^{i,\perp}$ l'espace orthogonal à notre vecteur V^i, et $P_{V^{i,\perp}}$ la projection orthogonale sur cet espace.

$$\frac{dV^i}{dt} = -\lambda P_{V^{i,\perp}}(V^i - \Omega(t)) = \lambda P_{V^{i,\perp}}(\Omega(t))$$

Il nous faut maintenant choisir un vecteur Ω approprié. Nous voudrions prendre directement $\Omega(t) = J(t)$ avec $J(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_t^i$, pour retrouver en quelque sorte l'orientation moyenne. Mais ce vecteur n'est pas de norme 1. Il faudrait donc diviser par la norme de J. On reprend alors l'équation précédente où le paramètre λ devient variable : $\lambda(t) = \lambda_0\|J(t)\|$ ($\lambda_0 > 0$ constante). Ainsi on peut poser $\Omega(t) = \frac{J(t)}{\|J(t)\|}$ et ainsi on a :

$$\frac{dV^i}{dt} = \lambda(t)P_{V^{i,\perp}}(\Omega(t)) = \lambda_0 P_{V^{i,\perp}}(J(t))$$

L'avantage de choisir cette expression, par rapport à une expression où on divise par la norme de J, est qu'on retrouve un coefficient lipschitzien par rapport à t alors que si on divisait par la norme ce ne serait plus le cas. Et nous aurons besoin de cette propriété par la suite.

Une fois obtenues des équations régissant la réorientation des vecteurs vitesse à valeurs dans la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$, on s'intéresse à la présence du bruit. Celui-ci est représenté par un terme associé à mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dans l'équation régissant l'orientation du vecteur vitesse.

On obtient ainsi les ingrédients d'un possible modèle pour notre système : nous n'avons que esquissé ce qui pourraient être des façons d'interpréter les équations qui suivent, et qui nous permettent en même temps de comprendre comment simplifier le modèle de l'article suivant notre intuition. Nous avançons aussi un résultat qui découle de cette intuition : quand le nombre de particules N tend vers $+\infty$, on devrait observer que les vitesses des particules sont décorrélées, c'est à dire que les lois de chaque processus de la vitesse de chaque particule sont indépendantes.

1.1 Interprétation du système différentiel stochastique

On peut alors présenter le premier système d'équations établi dans l'article. Pour $1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} dX_t^i = V_t^i dt \\ dV_t^i = P_{V_t^{i,\perp}}\Big[J\Big((X_t^j)_j, (V_t^j)_j\Big)\Big]dt + P_{V_t^{i,\perp}} \circ dB_t^i \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que les mouvements Browniens $(B_t^i)_{1\leq i\leq N}$ sont indépendants entre eux. Nous allons en premier lieu bien analyser le sens de chacun des termes de ce système différentiel stochastique. Nous verrons ensuite quelles hypothèses simplificatrices nous pouvons réaliser tout en gardant l'essence du problème.

Pour ce qui est des conditions initiales $(X_0^i, V_0^i)_{1\leq i\leq N}$, on considère que ces variables aléatoires ont la même loi (non uniforme) sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{S}^{d-1}$, et sont indépendantes entre elles.

Il faut tout d'abord signaler que le caractère stochastique de ce système provient du bruit représenté par un mouvement brownien. Les équations différentielles font intervenir non pas des fonctions de la variable réelle, mais des processus stochastiques à temps continu. La première difficulté consiste à déterminer le sens du terme $P_{V_t^\perp} \circ dB_t$. Ceci correspond à l'écriture différentielle de l'intégrale stochastique de type Stratonovich.

Notre but est de représenter un bruit lors de la réorientation du vecteur V, et pour cela étant donné qu'il est à valeurs dans la sphère, il nous faut l'équivalent du mouvement Brownien sur la sphère. La projection du mouvement Brownien de $\mathbb{R}^d$ sur la sphère d'après l'intégrale de Stratonovich est un moyen de le faire, cela résulte de l'étude du mouvement Brownien sur des variétés différentielles que nous ne traiterons pas ici. Pour vérifier que ce résultat est cohérent, il faudra vérifier que les solutions de ce système différentiel vérifient bien pour tout $1 \leq i \leq N$, $\|V^i\| = 1$. Plus précisément, il faut que les normes des vecteurs soient égales à un lorsque les conditions initiales vérifient $1 \leq i \leq N$, $\|V_0^i\| = 1$. En effet les processus stochastiques $(X_t^i, V_t^i)_{1\leq i\leq N,\ t\geq 0}$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à priori.

Ainsi nous étudierons les solutions de ce système différentiel stochastique, nous regarderons le comportement de chaque particule lorsque $N \to +\infty$, nous établirons des équations portant sur la loi des vitesses des particules.

1.2 Simplifications

Dans la suite du problème nous laisserons de côté la dépendance spatiale de J, de sorte que l'étude se centre sur l'orientation des particules. On peut donc se représenter le problème par N processus stochastiques à valeurs dans la sphère unité dont le mouvement est régi par l'équation différentielle de V_t^i dans (1). De plus, on reprend l'idée d'un vecteur J moyenne des N vecteurs V^i de notre système. Finalement on travaille avec le système différentiel :

$$\begin{cases} dV_t^i = P_{V_t^{i,\perp}} J((V_t^i)_i)\ dt + P_{V_t^{i,\perp}} \circ dB_t^i \\ J_t = J((V_t^i)_i) = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} V_t^k \end{cases} \tag{2}$$

Pour obtenir nos premiers résultats, on peut encore simplifier le problème en se restreignant à des vecteurs dans le plan, c'est à dire $d = 2$. On reprend d'abord le cas déterministe.

Chaque vecteur V_t^i est déterminé par un angle Θ_t^i de sorte que $V_t^i = e^{\Theta_t^i}$. Ainsi on obtient l'équation différentielle $d\Theta^i = \Big((-\sin\Theta^i)J_x + (\cos\Theta^i)J_y\Big)\ dt$ qui est non bruitée. On rajoute alors un mouvement Brownien pour représenter le « bruit » :

$$d\Theta = \Big((-\sin\Theta)J_x + (\cos\Theta)J_y\Big)\ dt + \sigma dB_t$$

avec σ constante représentant l'intensité du bruit.

On peut alors réécrire les équations :

$$\begin{cases} d\Theta_t^i = (-J_{t,x}.\sin\Theta_t^i + J_{t,y}.\cos\Theta_t^i)\ dt + \sigma dB_t^i \quad \text{avec } \sigma > 0 \text{ l'intensité du mouvement Brownien} \\ J_t = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} e^{i\Theta_t^k} = J_{t,x} + iJ_{t,y} \end{cases} \tag{3}$$

avec $(B_t^1, \cdots, B_t^N)$ N mouvements Browniens indépendants.

Ainsi le passage de l'équation non bruitée à l'équation bruitée sur $\mathbb{R}$ se fait simplement en sommant un mouvement Brownien réel. Par contre, pour les dimensions supérieures, il faudra définir un mouvement Brownien sur la sphère (et non pas que sur $\mathbb{R}^d$) afin de simuler le bruit dans la réorientation.

2 Calcul différentiel stochastique

Dans cette section nous allons développer les outils de calcul stochastique qui vont nous permettre de travailler avec des équations différentielles *bruitées*. L'*intégrale stochastique d'Itô* est l'élément principal du calcul stochastique, et grâce à l'outil puissant qu'est la *formule d'Itô* nous déduirons la plupart de nos résultats.

Cependant, l'approche physique et biologique du problème fait que la mise en équation du système soit plus naturelle avec l'*intégrale stochastique de Stratonovich*. C'est celle qui apparaît dans le système (1). La définition de ce type d'équation différentielle stochastique et son lien étroit avec l'intégrale d'Itô seront étudiés en quatrième partie. Finalement, nous pourrons ainsi définir les équations différentielles stochastiques (EDS) et étudier les propriétés d'existence et d'unicité des solutions.

Le but de cette section étant d'introduire les notions principales de calcul différentiel stochastique, les preuves des différentes propositions ne seront pas rédigées dans le texte. Pour cela, on fait référence à [2], [3], [4].

2.1 Intégrale d'Itô

Nous allons donner sans démonstration les énoncés qui permettent de définir correctement l'intégrale d'Itô d'un processus stochastique, ainsi que certaines de ses propriétés.

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ et de sa filtration canonique associée $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On définit l'ensemble V des processus réels $(X_t)_{t\geq 0}$ tels que :

- $(X_t)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mesurable (Il est alors dit *adapté*)
- $(t,\omega) \to X(t,\omega)$ est $\mathcal{B}\otimes\mathcal{F}$ mesurable où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ (Il est alors dit *mesurable*)
- $\int_0^\infty \mathbb{E}[X^2]dt < \infty$

De plus, un tel processus $X \in V$ est dit *simple* s'il existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite croissante de réels positifs telle que $X(t,\omega) = \sum_{k\geq 0} \eta_k(\omega)\mathbf{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(t)$ avec $(\eta_k)_{k\geq 0}$ variables aléatoires réelles.

Définition 2.1. *Pour $X \in V$ simple, on pose :*

$$\int_0^\infty X(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq n} \eta_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

où la limite est prise dans $L^2(\mathbb{P})$.

On généralise la notion d'intégrale d'Itô au processus dans V en approchant tout processus de V par des processus simples dans un certain sens.

Proposition 2.1. *Pour tout $X \in V, \exists (X_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ simples tels que $\int_0^{+\infty} \mathbb{E}[(X-X_n)^2]\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*

Définition 2.2 (Intégrale d'Itô)**.** *Pour $X \in V$, soit $(X_n)_n \in V^{\mathbb{N}}$ simples vérifiant la limite précédente, alors l'intégrale d'Itô de X est définie par*

$$\int_0^\infty X(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty X_n(t)dB_t$$

où la limite est encore prise dans $L^2(\mathbb{P})$.

On définit aussi l'intégrale dans le segment $[a, b]$ en multipliant l'intégrande par $\mathbf{1}_{[a,b]}$.

Proposition 2.2. *Soit $X \in V$, on a*

1. $\mathbb{E}[(\int_0^{+\infty} X(t)dB_t)^2] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[X^2]\ dt$ (Isométrie d'Itô)
2. *L'intégrale d'Itô vérifie la propriété de Chasles pour les intégrales et elle est linéaire.*
3. $(\int_0^t X(s)dB_s)_{t\geq 0}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *martingale. En particulier, son espérance est nulle.*

On peut aussi définir l'intégrale d'Itô pour des processus à valeurs dans $M_{d,p}(\mathbb{R})$ matrices réelles de dimension $d \times p$.

Pour cela on considère un mouvement Brownien de dimension p , $(B_t)_{t\geq 0} = (B_t^1, ..., B_t^p)_{t\geq 0}$ et on définit l'ensemble $V^{d,p}$ des processus $X(t) = \big(X_{i,j}(t)\big)_{\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq p}}$ tels que $X_{i,j}(t)$ pour $\substack{1\leq i\leq d\\ 1\leq j\leq p}$ est un processus dans V.

Définition 2.3. *Soit $X \in V$, on définit l'intégrale d'Itô multi-dimensionnelle par*

$$(\int_0^{+\infty} X(t)dB_t)_i = \sum_{j=1}^{p} \int_0^{+\infty} X_{i,j}dB_t^j \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq d \tag{4}$$

Si on note maintenant, pour $Y \in V$, $X_t = \int_0^t Y_s dB_s$, on peut maintenant écrire $dX_t = Y_t dB_t$. C'est avec cette forme différentielle qui n'est définie qu'à partir de l'intégrale d'Itô sur un segment que nous travaillerons par la suite.

Une dernière définition avant d'énoncer la formule d'Itô.

Définition 2.4 (Processus d'Itô)**.** *Soit $h \in V$ et $(g(t))_{t\geq 0}$ un processus adapté tel que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\int_0^t |g(s)|\ ds < +\infty$ Alors le processus $dX_t = g(t)dt + h(t)dB_t$ est bien défini et est appelé* processus d'Itô.

On peut montrer que les processus $(tB_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2)_{t\geq 0}$ sont des processus d'Itô.

Les processus d'Itô permettent ensuite de définir les équations différentielles stochastiques en posant $dX_t = g(X(t), t)dt + h(X(t), t)dB_t$.

2.2 Formule d'Itô

On peut maintenant annoncer la formule d'Itô qui est la base du calcul stochastique.

Théorème 2.3 (Formule d'Itô)**.** *Soit $dX_t = g(t)dt + h(t)dB_t$ processus d'Itô, et*

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \qquad \text{de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$$

Soit alors $Y(t) = F(X(t), t)$. C'est un processus d'Itô et il vérifie la formule

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \Big(\frac{\partial F}{\partial t}(X(s), s) \ + \ \frac{\partial F}{\partial x}(X(s), s)g(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X(s), s)h^2(s)\Big)\ ds \\ + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(X(s), s)h(s)dB_s$$

On peut la réécrire de la façon suivante :

$$dY_t = \frac{\partial F}{\partial t}(X(t), t)dt \ + \ \frac{\partial F}{\partial x}(X(t), t)dX_t \ + \ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X(t), t)h^2(t)dt$$

Il est possible de donner une explication intuitive à la formule : elle correspond à un développement limité de F , sachant que le mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est de l'ordre de $\sqrt{t}$, on peut comprendre l'apparition du terme en $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

On énonce à la suite la formule d'Itô multi-dimensionnelle.

On considère que $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien de dimension d. On a G processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{P}$-presque sûrement $\int_0^t \|G(s)\| \, ds < +\infty$, et $H \in V^{d,d}$ (de sorte à avoir l'équivalent multi-dimensionnel du processus d'Itô).

Théorème 2.4 (Formule d'Itô multidimensionnelle)**.** *Soit $dX_t = G(t)dt + H(t)dB_t$ processus d'Itô, et*

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \qquad \text{de classe } \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$$

Soit alors $Y(t) = F(X(t), t)$. C'est un processus d'Itô et il vérifie la formule

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(X(s), s) + DF(X(s), s)G(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X(s), s) \sum_{l=1}^{d} h_{i,l}(s) h_{j,l}(s) \right) ds + \int_0^t DF(X(s), s)H(s)dB_s \quad (5)$$

Où DF est la Jacobienne de F par rapport à la première variable.

2.3 Existence et unicité des solutions aux EDS

Avant de définir les théorèmes d'existence et unicité, nous allons définir ce qu'est une solution forte à une EDS.

Définition 2.5. *Soit $dZ_t = g(Z_t, t)dt + h(Z_t, t)dB_t$ une équation différentielle stochastique avec Z_0 variable aléatoire initiale. On dit que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une* solution forte *de l'EDS s'il vérifie*

- *Le processus est adapté, continu, et est un processus d'Itô*
- $\mathbb{P}(X_0 = Z_0) = 1$
- *Avec probabilité 1,*

$$\forall t \geq 0, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t g(X_s, s) \, ds + \int_0^t h(X_s, s) dB_s$$

On peut alors établir un théorème d'existence et unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques.

Proposition 2.5 (Unicité)**.** *Soit $dZ_t = g(Z_t, t)dt + h(Z_t, t)dB_t$ une équation différentielle stochastique avec Z_0 variable aléatoire. Supposons que g et h sont continues du couple, localement lipschitziennes par rapport à la première variable. Si l'EDS admet une solution forte, alors celle-ci est unique.*

La condition de localement lipschitzienne se traduit par : Pour tout compact $K \in \mathbb{R}^d$, il existe $M_K > 0$ tel que pour tout $x, y \in K$, $t \geq 0$,

$$\|g(x, t) - g(y, t)\| + \|h(x, t) - h(y, t)\| \leq M_K \|x - y\|$$

Démonstration. Soient $X, \tilde{X}$ deux solutions fortes à l'EDS. On définit le temps d'arrêt pour $n \geq 0$:

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0, \|X_t\| \geq n\}$$

et de façon analogue on définit $\tilde{\tau}_n$ pour $\tilde{X}_t$, et on pose $\tau_n^* = \tau_n \wedge \tilde{\tau}_n$. Comme $X, \tilde{X}$ sont continues bornées, on a $\mathbb{P}$-ps, $\tau_n^* \to_{n\to+\infty} +\infty$. Comme $X, \tilde{X}$ sont solutions fortes, on a $\mathbb{P}$-ps, pour tout $t \geq 0$,

$$X(t\wedge\tau_n^*) - \tilde{X}(t\wedge\tau_n^*) = \int_0^{t\wedge\tau_n^*} (g(X_s,s) - g(\tilde{X}_s,s))\ ds + \int_0^{t\wedge\tau_n^*} (h(X_s,s) - h(\tilde{X}_s,s))dB_s$$

On a ainsi, vu que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\|X(t\wedge\tau_n^*) - \tilde{X}(t\wedge\tau_n^*)\|^2\Big] \\
&\leq 2\ \mathbb{E}\Big[\|\int_0^{t\wedge\tau_n^*} (g(X_s,s) - g(\tilde{X}_s,s))\ ds\|^2 + \|\int_0^{t\wedge\tau_n^*} (h(X_s,s) - h(\tilde{X}_s,s))dB_s\|^2\Big] \\
&\leq 2\ \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n^*} \|g(X_s,s) - g(\tilde{X}_s,s)\|\ ds\Big)^2\Big] + 2\ \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau_n^*} \|(h(X_s,s) - h(\tilde{X}_s,s)\|^2 ds\Big]
\end{aligned}$$

Par l'isométrie d'Itô. Or les domaines d'intégration sont choisis de sorte que $X, \tilde{X}$ soient de norme inférieure ou égale à n. On a donc $M_n > 0$ tel que $\|g(X_s,s) - g(\tilde{X}_s,s)\| \leq M_n\|X_s - \tilde{X}_s\|$ et $\|h(X_s,s) - h(\tilde{X}_s,s)\| \leq M_n\|X_s - \tilde{X}_s\|$ pour tout $0 \leq s \leq (t\wedge\tau_n^*)$. D'où, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\|X(t\wedge\tau_n^*) - \tilde{X}(t\wedge\tau_n^*)\|^2\Big] \\
&\leq 2\ \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n^*} M_n\|X_s - \tilde{X}_s\|\ ds\Big)^2\Big] + 2\ \mathbb{E}\Big[\int_0^{t\wedge\tau_n^*} M_n^2\|X_s - \tilde{X}_s\|^2 ds\Big] \\
&\leq 2M_n^2\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n^*} \|X_s - \tilde{X}_s\|\ ds\Big)^2\Big] + 2M_n^2\int_0^{t\wedge\tau_n^*} \mathbb{E}\Big[\|X_s - \tilde{X}_s\|^2\Big] ds
\end{aligned}$$

Or par Cauchy-Schwarz, $\mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^{t\wedge\tau_n^*} \|X_s - \tilde{X}_s\|\ ds\Big)^2\Big] \leq \int_0^{t\wedge\tau_n^*} t^2\mathbb{E}\Big[\|X_s - \tilde{X}_s\|^2\Big]\ ds$
Si on considère $T > 0$ tel que t soit borné par T, alors on conclut

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\|X(t\wedge\tau_n^*) - \tilde{X}(t\wedge\tau_n^*)\|^2\Big] \\
&\leq 2M_n^2T^2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\|X_s - \tilde{X}_s\|^2\Big] ds + 2M_n^2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\|X_s - \tilde{X}_s\|^2\Big] ds \\
&\leq 2M_n^2T^2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\|X_{s\wedge\tau_n^*} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_n^*}\|^2\Big] ds + 2M_n^2\int_0^t \mathbb{E}\Big[\|X_{s\wedge\tau_n^*} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_n^*}\|^2\Big] ds \\
&\leq 2M_n^2(T^2+1)\int_0^t \mathbb{E}\Big[\|X_{s\wedge\tau_n^*} - \tilde{X}_{s\wedge\tau_n^*}\|^2\Big] ds
\end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall, on conclut que sur [0,T] on a $X(t\wedge\tau_n^*) = \tilde{X}(t\wedge\tau_n^*)$ $\mathbb{P}$-ps. Ceci étant pour tout $T > 0$, on a $\mathbb{P}$-ps l'égalité pour tout t réel. Ensuite en faisant tendre n vers l'infini on conclut que $X = \tilde{X}$ $\mathbb{P}$-ps. D'où l'unicité. □

On va maintenant donner une condition pour avoir l'existence d'une solution forte.

Proposition 2.6 (Existence)**.** *Soit $dZ_t = g(Z_t,t)dt + h(Z_t,t)dB_t$ une équation différentielle stochastique avec Z_0 variable aléatoire de carré intégrable. Supposons qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}
&\|g(x,t) - g(y,t)\| + \|h(x,t) - h(y,t)\| \leq K\|x - y\| \\
&\|g(x,t)\| + \|h(x,t)\| \leq K(1 + \|x\|)
\end{aligned}$$

Alors il existe une solution forte à l'EDS.

3 Étude du modèle

Les outils stochastiques que nous venons d'introduire vont nous permettre de travailler avec notre modèle simplifié. En premier lieu nous appliquerons le théorème d'existence et unicité à notre modèle, puis nous verrons l'équation de Fokker-Plank pour une équation différentielle stochastique générale, analogue à celle de notre modèle simplifié mais qui ne peut pas s'adapter directement au cas où nous avons N particules. Nous reprendrons donc les calculs sur le N-uplet $(\Theta^1, \cdots, \Theta^N)$ pour obtenir une équation de Fokker-Plank sur le N-uplet. Par contre le phénomène de couplage nous permettra de déduire une limite de champ moyen de nos particules : quand $N \to +\infty$, le vecteur J va tendre vers une certaine fonction de sorte que nos particules vont suivre une équation différentielle stochastique « limite » . Et dans ce cas nous pourrons déduire la loi de ce processus limite vers lequel tend chaque particule.

La référence à suivre pour cette partie est [5].

3.1 Existence et unicité de notre EDS

On va d'abord travailler sur le cas simplifié de la dimension $d = 2$, et pas sur le cas quelconque en dimension $d \geq 3$. On rappelle notre modèle pour N particules (3), où les processus sont à valeurs réelles en ayant associé à chaque point du cercle unité du plan l'angle Θ correspondant :

$$\begin{cases} d\Theta_t^1 = \Big((-sin\Theta_t^1)J_{t,x} + (cos\Theta_t^1)J_{t,y}\Big)\ dt + \sigma dB_t^1 \\ \cdots \\ d\Theta^N = \Big((-sin\Theta_t^N)J_{t,x} + (cos\Theta_t^N)J_{t,y}\Big)\ dt + \sigma dB_t^N \qquad \text{et} \quad J_t = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N e^{i\Theta_t^k} \end{cases}$$

avec $(B_t^1, \cdots, B_t^N)$ N mouvements Browniens indépendants. Tous les Θ_0^i ont la même loi (supposée non uniforme) et sont indépendants entre eux. Ils sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, au lieu d'être à valeurs vectorielles.

Nous considérons le vecteur $X = \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \vdots \\ \Theta^N \end{pmatrix}$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = A(X_t)\ dt + \sigma dB_t$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^d$ et A un vecteur fonction de X_t défini par : pour $1 \leq i \leq N$, $A_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \sin(\Theta^j - \Theta^i)$.

C'est donc un processus d'Itô multi-dimensionnel.

Maintenant nous allons appliquer à notre modèle le théorème d'existence et unicité des solutions d'une équation différentielle stochastique. Nous allons énoncer le résultat pour le processus $(X_t)_{t\geq 0}$.

Pour tout couple $X = (x_1, \cdots, x_N), Y = (y_1, \cdots, y_N)$, on a

$$\begin{aligned} \|A(X) - A(Y)\|_\infty &\leq \frac{1}{N}\sup_{1\leq i\leq N}\sum_{j=1}^N \left|\Big(\sin(x_j - x_i) - \sin(y_j - y_i)\Big)\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sup_{1\leq i\leq N}\sum_{j=1}^N |x_j - y_j| + |x_i - y_i| \leq 2\|X - Y\|_\infty \end{aligned}$$

et

$$\|A(X)\|_\infty \leq 1$$

D'où par les théorèmes d'existence et unicité des EDS, notre système possède une unique solution forte.

3.2 Équation de Fokker-Plank en dimension 1

Notre but est d'étudier la loi de chaque Θ^i. Cependant nous allons voir que pour le modèle précédent, établir une équation aux dérivées partielles pour la loi d'un Θ^i va être compliqué dû au fait que J est un processus stochastique qui relie tous les processus Θ^j entre eux, ce qui nous empêchera d'obtenir une équation linéaire exploitable. Nous allons en premier lieu considérer un processus $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ quelconque qui vérifie l'équation différentielle stochastique

$$d\Theta_t = g(\Theta_t, t)\ dt + h(\Theta_t, t)\ dB_t \tag{6}$$

où $g,\ h$ vérifient les bonnes hypothèses pour que ce processus soit un processus d'Itô. Cela revient à dire qu'on considère J comme une fonction de t et du propre Θ seulement, et aucun autre processus stochastique n'intervient.

On cherche alors une équation différentielle satisfaite par la loi de ce processus. Cela correspond à une mesure de probabilité sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, de sorte que si l'on considère les marginales par rapport à la variable t on obtient la loi de Θ_t.

D'après la formule d'Itô en dimension un pour $Y(t) = F(\Theta_t, t) = F(\Theta_t)$, continûment dérivable deux fois, on obtient :

$$Y(t) - Y(0) = \int_0^t \Big(F'(\Theta_s)g(\Theta_s, s) + \frac{1}{2}F''(\Theta_s)h^2(\Theta_s, s)\Big)\ ds + \int_0^t F'(\Theta_s)h(\Theta_s, s)\ dB_s$$

Il est important de signaler qu'on utilise indistinctement les notations Θ_t et $\Theta(t)$ pour que les équations soient le plus lisible possible.

Maintenant, on prend l'espérance de ces expressions :

$$\mathbb{E}[Y(t)] - \mathbb{E}[Y(0)] = \int_0^t \mathbb{E}\Big[F'(\Theta_s)g(\Theta_s, s) + \frac{1}{2}F''(\Theta_s)h^2(\Theta_s, s)\Big]\ ds$$

En notant $f : (t, \theta) \longrightarrow f(t, \theta) = f_t(\theta)$ où f_t est la densité de Θ_t, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} F(\theta)f(t, \theta)\ d\theta - \mathbb{E}[Y(0)] = \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big[F'(\theta)g(\theta, s) + \frac{1}{2}F''(\theta)h^2(\theta, s)\Big]f(s, \theta)\ d\theta\Big)\ ds$$

Maintenant il serait souhaitable de pouvoir intégrer par parties pour aboutir à une équation portant sur f. Cependant, comme on ne peut pas faire d'hypothèses de régularité sur f, on ne peut pas aller au-delà de cette expression. On va définir dans ce cas la notion de *solution faible* dans le sens des distributions.

Définition 3.1. *On dit que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution faible de l'équation aux dérivées partielles avec condition initiale f_0 :*

$$\partial_t f(t, \theta) = -\partial_\theta\Big(g(\theta, t)f(t, \theta)\Big) + \partial_{\theta\theta}\Big(\frac{1}{2}h^2(\theta, t)f(t, \theta)\Big) \tag{7}$$

si pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivable deux fois et à support compact on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}} F(\theta)f(t, \theta)\ d\theta = \int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big[F'(\theta)g(\theta, s) + \frac{1}{2}F''(\theta)h^2(\theta, s)\Big]f(s, \theta)\ d\theta\Big)\ ds + \int_{\mathbb{R}} F(\theta)f_0(\theta)\ d\theta$$

Cette équation est appelée équation de Fokker-Plank linéaire. On peut établir un lien entre *solution faible* et *solution forte* : une fonction est solution forte de l'équation aux dérivées partielles (ici de l'équation de Fokker-Plank) si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie l'équation. Elle est alors solution faible aussi. Une solution faible qui est de classe $\mathcal{C}^2$ est donc une solution forte (cela se voit grâce à une intégration par parties).

On remarque que cette équation aux dérivées partielles n'est plus stochastique.

Cependant on ne peut pas appliquer ces calculs à notre système, car la formule pour chaque $1 \leq i \leq N$, en posant $f_t^i : (t, \theta) \to f^i(t,\theta) = f_t^i(\theta)$ loi de Θ_t^i :

$$\partial_t f_t^i = -\partial_\theta\Big((-J_{t,x} sin(\theta) + J_{t,y} cos(\theta)) f^i\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{\theta\theta} f_t^i \tag{8}$$

n'est pas exploitable vu que J dépend des autres Θ^j, et donc le passage par l'espérance nous donne l'intégrale en fonction de la loi des autres Θ^j aussi, et pas que de notre Θ^i. On peut même remarquer que, formulée ainsi, cette équation n'est pas intrinsèquement définie car J est un processus stochastique et non une fonction déterministe de t et Θ^i.

Il faudrait donc, lors du passage par l'espérance, exprimer l'intégrale en fonction de la loi du N-uplet $(\Theta^1, \cdots, \Theta^N)$.

C'est ce qu'on va faire par la suite. Nous considérons le vecteur $X = \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \vdots \\ \Theta^N \end{pmatrix}$ qui vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = A(X_t)\ dt + \sigma dB_t$$

On note alors $f = f(t, \theta_1, \cdots, \theta_N)$ la loi du processus $(X(t))_{t\geq 0}$.

On reprend alors les calculs précédents avec la formule d'Itô multi-dimensionnelle : pour $Y(t) = F(X_t, t) = F(X_t)$, F continûment différentiable deux fois, on obtient :

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i} F(X_s) A_i(X_s)\ ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i\theta_i} F(X_s)\ ds$$

$$\mathbb{E}[F(X_t)] = \mathbb{E}[F(X_0)] + \mathbb{E}[\int_0^t \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i} F(X_s) A_i(X_s)\ ds] + \mathbb{E}[\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i\theta_i} F(X_s)\ ds]$$

En écrivant l'espérance à l'aide d'une intégrale avec f, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(\theta_1, \cdots, \theta_N) f_t(\theta_1, \cdots, \theta_N)\ d\theta_1 \cdots d\theta_N = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i} F(\theta_1, \cdots, \theta_N) A_i(\theta_1, \cdots, \theta_N) f_s(\theta_1, \cdots, \theta_N)\ d\theta_1 \cdots d\theta_N ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i\theta_i} F(\theta_1, \cdots, \theta_N) f_t(\theta_1, \cdots, \theta_N)\ d\theta_1 \cdots d\theta_N ds$$

D'où la densité f est solution faible de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t f_t = -\sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i}(f_t A_i) + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^N \partial_{\theta_i\theta_i} f_t$$

On peut pousser un peu l'étude de la fonction f. En effet, le rôle joué par les θ_i est symétrique. On pose alors :

$$f_1(t,\theta_1) = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} f(t,\theta_1,\cdots,\theta_N)d\theta_2...d\theta_N \quad \text{et} \quad f_2(t,\theta_1,\theta_2) = \int_{\mathbb{R}^{N-2}} f(t,\theta_1,\cdots,\theta_N)d\theta_3...d\theta_N$$

où le choix de θ_1, θ_2 est arbitraire, vu qu'ils jouent un rôle symétrique. Si on considère une fonction F un peu plus particulière, disons $F(X_t) = F(\Theta^1)$, toujours de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} F(\theta_1) f_t(\theta_1,\cdots,\theta_N)\ d\theta_1\cdots d\theta_N = \\
&\quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} F'(\theta_1) A_1(\theta_1,\cdots,\theta_N) f_s(\theta_1,\cdots,\theta_N)\ d\theta_1\cdots d\theta_N ds \\
&\qquad\qquad + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} F''(\theta_1) f_s(\theta_1,\cdots,\theta_N)\ d\theta_1\cdots d\theta_N ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} F(\theta_1) f_1(t,\theta_1)\ d\theta_1 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} F'(\theta_1)\sin(\theta_j-\theta_1) f_s(\theta_1,\cdots,\theta_N)\ d\theta_1\cdots d\theta_N ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} F''(\theta_1) f_1(s,\theta_1)\ d\theta_1 ds \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=2}^N \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} F'(\theta_1)\sin(\theta_j-\theta_1) f_2(s,\theta_1,\theta_j)\ d\theta_1 d\theta_j ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}} F''(\theta_1) f_1(s,\theta_1)\ d\theta_1 ds \\
&= \frac{N-1}{N}\int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} F'(\theta_1)\sin(\theta_2-\theta_1) f_2(s,\theta_1,\theta_2)\ d\theta_1 d\theta_2 ds + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \int_{\mathbb{R}} F''(\theta_1) f_1(s,\theta_1)\ d\theta_1 ds
\end{aligned}$$

Ainsi le couple de fonctions f_1, f_2 sont solution faible de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t f_1(t,\theta_1) = -\frac{N-1}{N}\partial_{\theta_1}\Big(\int_{\mathbb{R}} \sin(\theta_2-\theta_1) f_2(t,\theta_1,\theta_2)d\theta_2\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{\theta_1\theta_1} f_1(t,\theta_1) \tag{9}$$

En reprenant l'idée intuitive que la loi d'un couple de particules tend vers le produit des lois (donc leur comportement devient indépendant) quand N tend vers $+\infty$, on s'intéresse au comportement à l'infini de cette équation. On veut donc que la loi du couple f_2 soit égale au produit des lois marginales f_1. Donc supposer en un certain sens que :

$$f_2(t,\theta_1,\theta_2) \longrightarrow_{N\to+\infty} f_1(t,\theta_1) f_1(t,\theta_2)$$

Ainsi en ne considérant que la partie dépendante de N, on voudrait :

$$\partial_{\theta_1}\Big(\int_{\mathbb{R}} \sin(\theta_2-\theta_1) f_2(t,\theta_1,\theta_2)d\theta_2\Big) \longrightarrow_{N\to+\infty} \partial_{\theta_1}\Big(\int_{\mathbb{R}} \sin(\theta_2-\theta_1) f_1(t,\theta_1) f_1(t,\theta_2)d\theta_2\Big)$$

Ainsi si on considère la limite vers laquelle tendent les lois des processus $\Theta^i = \Theta^{i,N}$ (car en effet nous n'avons pas précisé mais dans toute l'étude précédente la valeur de N était fixée, donc le comportement des processus Θ^i dépend de cette valeur N), on peut supposer qu'elle vérifiera l'équation aux dérivées partielles de la forme suivante :

$$\partial_t \tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}_1) = -\partial_{\tilde{\theta}_1}\Big(\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}_1)\int_{\mathbb{R}} \sin(\tilde{\theta}_2-\tilde{\theta}_1)\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}_2)d\tilde{\theta}_2\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{\tilde{\theta}_1\tilde{\theta}_1}\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}_1) \tag{10}$$

On remarque que cette équation correspond à (8) où la fonction J ne dépend cette fois-ci que du propre f (il s'écrirait alors $J = \int_R e^{i\theta_1}\tilde{f}_1(\theta_1)\ d\theta_1$) Pour faire ce passage à la limite de façon rigoureuse, qui confirmera notre intuition, nous introduisons le processus de couplage.

3.3 Processus de couplage

Le but de cette partie est de montrer comment se comportent N particules suivant la même équation différentielle stochastique couplée lorsque N tend vers $+\infty$. On montre qu'étant donnée une équation différentielle stochastique semblable à (3), on peut définir une équation différentielle stochastique non linéaire qui possède toujours une unique solution sous les bonnes hypothèses vers laquelle vont tendre (dans un certain sens à définir) chacun des processus lorsque leur nombre N tend vers $+\infty$.

C'est la limite de champ moyen : le vecteur J correspond à l'intégrale sur un champ limite.

Tous les éléments que nous allons introduire par la suite vont être directement appliqués à notre système (3). Ainsi toutes les équations seront à valeurs dans $\mathbb{R}$, même si elles s'appliquent immédiatement pour des dimensions supérieures.

3.3.1 Le processus non linéaire

Pour cela on reprend les notations utilisées pour présenter l'intégrale d'Itô : On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une famille de mouvements Browniens $\Big((B_t^i)_{t\geq 0}\Big)_{1\leq i\leq N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de sa filtration canonique associée $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

On considère une fonction $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne du couple bornée.

$$\begin{cases} d\Theta_t^{i,N} = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j=1}^{N} b(\Theta_t^{i,N}, \Theta_t^{j,N})\ dt + \sigma dB_t^i \\ \Theta_0^i = u_i \end{cases} \tag{11}$$

Avec $(u_i)_{1\leq i\leq N}$ variables aléatoires et $(B_t^1, \cdots, B_t^N)$ mouvements Browniens indépendants.

Dans notre système, on a $b(x,y) = sin(y-x)$, qui est bien lipschitzienne du couple et bornée. En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(\Theta_t^{i,N}, \Theta_t^{j,N}) &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} sin(\Theta_t^{j,N} - \Theta_t^{i,N}) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \sin\Theta_t^{j,N}\cos\Theta_t^{i,N} - \sin\Theta_t^{i,N}\cos\Theta_t^{j,N} \\ &= \frac{1}{N}\Big(-\sin\Theta_t^{i,N}\sum_{j=1}^{N}\cos\Theta_t^{j,N} + \cos\Theta_t^{i,N}\sum_{j=1}^{N}\sin\Theta_t^{j,N}\Big) = \frac{1}{N}\Big(-\sin\Theta_t^{i,N} J_{t,x} + \cos\Theta_t^{i,N} J_{t,y}\Big) \end{aligned}$$

Alors quand $N\to+\infty$ pour chaque $i\geq 0$ le processus $(\Theta_t^i)_{t\geq 0}$ tend vers un processus non linéaire que l'on définit par la suite. En effet on remarque que le terme d'alignement correspond à une somme qui moyenne l'effet entre Θ^i et Θ^j pour $1\leq j\leq N$. Pour N grand on voudrait remplacer $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} b(\Theta_t^{i,N}, \Theta_t^{j,N})$ par $\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_t^i, \theta)\phi_t(\theta)\ d\theta$ où ϕ_t serait une unique loi commune à tous les Θ_t^j pour $1\leq j < +\infty$.

On pose alors l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} d\Theta_t = \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_t, \theta)\phi_t(\theta) d\theta\Big) dt + \sigma dB_t \quad \text{où } \phi_t \text{ est la loi de } \Theta_t \\ \Theta_0 = Z_0 \quad \text{variable aléatoire } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \end{cases} \tag{12}$$

Proposition 3.1. *Le système différentiel stochastique* (12) *admet une unique solution forte.*

Pour montrer la proposition, on définit une distance sur l'espace des mesures de probabilité sur l'espace de fonctions continues $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Définition 3.2 (Distance de Wasserstein). *Soit $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ l'ensemble des mesures de probabilité sur l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ On définit, pour $t \geq 0$,*

$$d_t(m_1, m_2) = \inf_{\mu \in A} \int_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}} \Big((\sup_{0 \leq s \leq t} |w_1(s) - w_2(s)|) \wedge 1 \Big) d\mu(w_1, w_2)$$

où A est l'ensemble des mesures de probabilité sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dont les marginales sont (m_1, m_2).

On remarque que la famille $(d_t)_{t\geq 0}$ est croissante : si $0 \leq t \leq t'$, alors pour tout couple $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on a $d_t(m_1, m_2) \leq d_{t'}(m_1, m_2)$.

On peut généraliser cette définition à des espaces métriques (X, δ) complets séparables (ici $\mathcal{C}([0,t], \mathbb{R})$ muni de la distance $\delta(f,g) = (\sup_{0\leq s \leq t} |f(s) - g(s)|) \wedge 1$ est complet séparable) par

$$d_t(m_1, m_2) = \inf_{m \in A} \int_{X \times X} \delta(w_1, w_2) dm(w_1, w_2)$$

où A est défini comme précédemment.

Quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le $t > 0$ quand on considère une distance d_t, on notera δ la distance associée à l'espace métrique séparable comme dans la notation précédente.

Dans la suite, nous nous restreindrons à la dimension $d = 1$ pour continuer à présenter ce processus de couplage appliqué directement à notre modèle.

Proposition 3.2. *Pour tout $t > 0$, d_t est une distance sur $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, qui est de plus complète.*

On se limite à montrer que la propriété de séparation. En effet, pour montrer l'inégalité triangulaire et la complétude de la distance de Wasserstein, il faut utiliser des propriétés de transport optimal de mesures. Ces notions ne sont pas étudiées ici. Pour montrer la séparation, soit $m \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on définit $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ par $\mu(w_1, w_2) = \delta_{w_1 w_2} m(w_1)$. Ainsi $\mu \in A$ et

$$d_t(m, m) \leq \int_{\mathcal{C}} \Big((\sup_{0 \leq s \leq t} |w_1(s) - w_1(s)|) \wedge 1 \Big) dm(w_1) = 0$$

D'où $d_t(m, m) = 0$.

Maintenant on définit $\mathcal{C}_T = \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ et une application $\Phi : \mathcal{M}(\mathcal{C}_T) \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}_T)$ qui à $m \in \mathcal{M}(\mathcal{C}_T)$ associe la loi de $(\Theta_t)_{0 \leq t \leq T} \in \mathcal{C}_T$ variable aléatoire vérifiant

$$\Theta_t = \Theta_0 + \sigma B_t + \int_0^t \int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta_s, w(s)) dm(w) \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T$$

On remarque qu'ici on ne considère pas la loi de la variable aléatoire Θ_t à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour un $t \geq 0$ fixé, mais la loi de la variable aléatoire $(\Theta_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$. La loi de $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ est entièrement déterminée par m (et évidemment par b). Le mouvement Brownien était déjà défini et son choix ne change pas la loi de $(\Theta_t)_{t \geq 0}$, et donc Φ est définie indépendamment de l'espace de probabilité muni de son mouvement Brownien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (B_t)_{t\geq 0})$.

On a ainsi la propriété suivante : si m est un point fixe de Φ, alors m est la loi d'un processus $(\Theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ qui vérifie sur $[0, T]$,

$$d\Theta_t = \Big(\int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta_t, w(t)) dm(w) \Big) dt + \sigma dB_t = \Big(\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_t, u) d\phi_t(u) \Big) dt + \sigma dB_t$$

puisque ϕ_t est la mesure-image de m par l'application coordonnée sur t (qui est donc la loi de Θ_t). Ainsi $(\Theta_t)_{t \geq 0}$ est solution de (12).

Réciproquement, si le processus $(\Theta_t)_{t \geq 0}$ est solution de (12), alors la loi de la variable aléatoire $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ est un point fixe de Φ.

Ainsi, l'unique solution à (12) est déterminée par la fonction b et le mouvement Brownien $(B_t)_{t \geq 0}$. En plus, on verra que la loi de cette équation ne dépend plus du mouvement Brownien, de même qu'auparavant l'équation de Fokker-Plank (7) ne faisait pas intervenir le mouvement Brownien.

On introduit un lemme :

Lemme 3.3. *Il existe une constante $C_T > 0$ telle que pour tout $t \leq T$, $m, n \in \mathcal{M}(\mathcal{C}_T)$, on a*

$$d_t(\Phi(m), \Phi(n)) \leq C_T \int_0^t d_u(m,n)\ du$$

Démonstration. Pour $m, n \in \mathcal{M}(\mathcal{C}_T)$, on soustrait les deux équations qui définissent les processus dont les lois sont les images de m, n par Φ : pour $0 \leq t' \leq t$ on a

$$|\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \leq \int_0^{t'} |\Big(\int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta^m_s, w_1(s)) dm(w_1) - \int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta^n_s, w_2(s)) dn(w_2)\Big)|\ ds \leq \int_0^t \Big(|\cdots|\Big)\ ds$$

Or en prenant μ un couplage quelconque de m, n on a

$$\begin{aligned}
&|\Big(\int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta^m_s, w_1(s)) dm(w_1) - \int_{\mathcal{C}_T} b(\Theta^n_s, w_2(s)) dn(w_2)\Big)| = \\
&\qquad |\Big(\int_{\mathcal{C}_T \times \mathcal{C}_T} b(\Theta^m_s, w_1(s)) d\mu(w_1, w_2) - \int_{\mathcal{C}_T \times \mathcal{C}_T} b(\Theta^n_s, w_2(s)) d\mu(w_1, w_2)\Big)| \\
&\qquad\quad \leq \int_{\mathcal{C}_T \times \mathcal{C}_T} |b(\Theta^m_s, w_1(s)) - b(\Theta^n_s, w_2(s))| d\mu(w_1, w_2) \\
&\qquad\quad\quad \leq K\Big(\Big(|\Theta^m_s - \Theta^n_s| \wedge 1\Big) + \int_{\mathcal{C}_T \times \mathcal{C}_T} \Big(|w_1(s) - w_2(s)| \wedge 1\Big) d\mu(w_1, w_2)\Big)
\end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} |\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \leq K \int_0^t \Big(|\Theta^m_s - \Theta^n_s| \wedge 1\Big)\ ds + K \int_0^t \int_{\mathcal{C}_T \times \mathcal{C}_T} \Big(\sup_{0 \leq s \leq u} \Big(|w_1(s) - w_2(s)|\Big) \wedge 1\Big) d\mu(w_1, w_2)\ du$$

d'où ceci étant pour tout couplage μ,

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \Big(|\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \wedge 1\Big) \leq K \int_0^t \Big(|\Theta^m_s - \Theta^n_s| \wedge 1\Big)\ ds + K \int_0^t d_u(m,n)\ du$$

De plus, comme $t \to K \int_0^t d_u(m,n)\ du$ est croissante, par le lemme de Gronwall on obtient

$$\sup_{0 \leq t' \leq t} \Big(|\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \wedge 1\Big) \leq K e^{KT} \int_0^t d_u(m,n)\ du$$

et en prenant l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t' \leq t} \Big(|\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \wedge 1\Big)] \leq K e^{KT} \int_0^t d_u(m,n)\ du$$

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t' \leq t} \Big(|\Theta^m_{t'} - \Theta^n_{t'}| \wedge 1\Big)] = \int_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} \sup_{0 \leq t' \leq t} \Big(|w_1(t') - w_2(t')| \wedge 1\Big)\ d(\Phi(m) \otimes \Phi(n))(w_1, w_2)$$

D'où le résultat en passant à l'infimum car le processus Θ^m a pour loi $\Phi(m)$ par définition. □

Le lemme permet de déduire l'unicité de la solution à l'équation différentielle stochastique (12), car si m, n sont des points fixes de Φ, le lemme nous montre que pour tout $t \geq 0$, $d_t(m, n) = 0$ (on rappelle que d_t est positive, et on conclut par le lemme de Gronwall). De plus, le lemme montre la continuité de l'application Φ. Pour $T > 0$ fixé, on a $d_T(\Phi(m), \Phi(n)) \leq T C_T d_T(m, n)$ d'où la continuité de Φ par rapport à d_T.

D'autre part, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a

$$d_T(\Phi^{k+1}(m), \Phi^k(m)) \leq C_T^k \frac{T^k}{k!} d_T(\Phi(m), m)$$

En effet, en supposant le résultat au rang $k-1$,

$$\begin{aligned} d_T(\Phi^{k+1}(m),\Phi^k(m)) &\leq C_T\int_0^T d_u(\Phi^k(m),\Phi^{k-1}(m))\ du \\ &\leq C_T\int_0^T C_T^{k-1}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}d_u(\Phi(m),m)du \\ &\leq C_T^k\frac{T^k}{k!}d_T(\Phi(m),m) \end{aligned}$$

D'où le résultat au rang k.

Ainsi la suite de $(\Phi^k(m))_{k\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{M}(\mathcal{C})$, complet donc cette suite converge vers un point fixe de Φ car Φ continu. Ce point fixe est donc solution de notre équation différentielle stochastique (12) pour des valeurs de t bornées par T. Ceci étant pour tout $T\geq 0$, et par unicité et comme la restriction d'une solution reste une solution à l'équation différentielle sur l'intervalle réduit, on déduit l'existence du processus solution de l'équation (12) sur tout $\mathbb{R}$.

3.3.2 Loi du processus non linéaire

Pour obtenir la loi du processus non linéaire, on s'appuie à nouveau sur la formule d'Itô.

Proposition 3.4. *Soit l'équation différentielle stochastique du processus non linéaire :*

$$\begin{cases} d\Theta_t = \Big(\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_t,s)\phi_t(s)ds\Big)dt+\sigma dB_t \quad \text{où } \phi_t \text{ est la loi de } \Theta_t \\ \Theta_0 = Z_0 \quad \text{variable aléatoire } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \end{cases} \tag{13}$$

La loi ϕ du processus $(\Theta_t)_{t\geq 0}$ vérifie alors une certaine EDP au sens faible (appelée de Fokker-Plank non linéaire) :

Si $\phi:(t,\theta)\to\phi(t,\theta)=\phi_t(\theta)$ où ϕ_t est la loi de la variable aléatoire Θ_t, on a

$$\partial_t\phi(t,\theta) = -\partial_\theta\Big(\phi(t,\theta)\int_{\mathbb{R}} b(\theta,y)\phi_t(y)dy\Big)+\frac{\sigma^2}{2}\partial_{\theta\theta}\phi(t,\theta)$$

Démonstration. On considère une fonction mesurable $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact. D'après la formule d'Itô,

$$F(\Theta_t)=F(\Theta_0)+\int_0^t F'(\Theta_s)d\Theta_s+\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t F''(\Theta_s)h^2(\Theta_s,s)\ ds$$

où $h=\sigma$ (en reprenant les notations du processus d'Itô). En prenant l'espérance, l'intégrale stochastique d'Itô s'annule. On obtient alors :

$$\mathbb{E}[F(\Theta_t)] = \mathbb{E}[F(\Theta_0)]+\mathbb{E}[\int_0^t F'(\Theta_s)\Big(\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_s,y)\phi_s(y)dy\Big)ds]+\mathbb{E}[\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t F''(\Theta_s)\ ds]$$

$$\mathbb{E}[F(\Theta_t)] = \mathbb{E}[F(\Theta_0)]+\int_0^t \mathbb{E}[F'(\Theta_s)\Big(\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_s,y)\phi_s(y)dy\Big)]\ ds+\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \mathbb{E}[F''(\Theta_s)]\ ds$$

$$\int_{\mathbb{R}} F(\theta)\phi_t(\theta)\ d\theta = \mathbb{E}[F(\Theta_0)]+\int_0^t\int_{\mathbb{R}} F'(\theta)\Big(\int_{\mathbb{R}} b(\theta,y)\phi_s(y)dy\Big)\phi_s(\theta)\ d\theta ds+\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} F''(\theta)\phi_s(\theta)\ d\theta ds$$

D'où au sens faible :

$$\partial_t\phi(t,\theta) = -\partial_\theta\Big(\phi(t,\theta)\int_{\mathbb{R}} b(\theta,y)\phi_t(y)dy\Big)+\frac{\sigma^2}{2}\partial_{\theta\theta}\phi(t,\theta) \tag{14}$$

□

Si on reprend la forme qu'on avait conjecturée pour le processus limite $\tilde{\Theta}^1$,

$$\partial_t \tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}^1) = -\partial_{\tilde{\theta}^1}\Big(\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}^1)\int_{\mathbb{R}} \sin(\tilde{\theta}^2-\tilde{\theta}^1)\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}^2)d\tilde{\theta}^2\Big) + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{\tilde{\theta}^1\tilde{\theta}^1}\tilde{f}_1(t,\tilde{\theta}^1)$$

on observe qu'on à la même équation. Ainsi le processus de couplage permet de définir un processus dont la loi vérifie la loi limite de notre processus Θ^1 quand N tend vers $+\infty$. Nous allons montrer maintenant le théorème qui confirme le fait que les processus aléatoires convergent vers le processus non linéaire.

3.3.3 Convergence vers le processus non linéaire

Nous allons maintenant récapituler les définitions des différents processus : initialement, notre modèle à N particules nous fournit l'équation différentielle stochastique suivante pour une particule i :

$$d\Theta_t^{i,N} = \Big((-\sin\Theta_t^{i,N})J_{t,x} + (\cos\Theta_t^{i,N})J_{t,y}\Big)\,dt + \sigma dB_t^{i,N}$$

avec J fonction des N autres particules. On ne peut pas obtenir une équation de Fokker-Plank linéaire pour cette équation différentielle stochastique.

Cependant on peut obtenir l'équation de Fokker-Plank en dimension N en considérant le vecteur X des Θ^j pour la loi de ce vecteur. Si on s'intéresse aux marginales de cette loi, vu le rôle symétrique joué par les Θ^j, on peut obtenir une équation aux dérivées partielles qui s'approche de celle de Fokker-Plank, mais faisant intervenir deux fonctions différentes (9).

En suivant l'hypothèse réalisée au début, qui consiste à dire que le comportement d'une particule devient indépendant de celui des autres lorsque N tend vers $+\infty$, on peut conjecturer une forme pour l'équation de Fokker-Plank vérifiée par la loi d'une particule lorsque leur nombre est très grand (10).

Définition 3.3 (Processus non linéaire)**.** *On définit, pour une fonction $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne du couple bornée, $(B_t)_{t\geq 0}$ mouvement Brownien, le* processus linéaire *du système différentiel stochastique* (11) *comme l'unique solution forte du système* (12) *:*

$$\begin{cases} d\Theta_t = \Big(\int_{\mathbb{R}} b(\Theta_t,\theta)\phi_t(\theta)d\theta\Big)dt + \sigma dB_t \quad \text{où } \phi_t \text{ est la loi de } \Theta_t \\ \Theta_0 = Z_0 \quad \text{variable aléatoire } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \end{cases} \tag{15}$$

Le processus non linéaire est en quelque sorte une limite des processus introduits dans (11). En effet à chaque Θ^i nous pouvons associer un $\tilde{\Theta}^i$ tel que ce dernier est solution de l'EDS (12) avec B^i comme mouvement Brownien. Ainsi les processus $(\tilde{\Theta}^i)_{1\leq i\leq N}$ sont déterminés par le mouvement Brownien correspondant. On rappelle que leur loi vérifie une même équation aux dérivées partielles, et de là provient l'intérêt de ces processus (14).

Il nous reste donc à montrer la convergence des Θ^i vers les $\tilde{\Theta}^i$, puisque les processus non linéaires sont introduits comme solution d'une EDS qui serait la version continue quand $N\to+\infty$ de (11).

Théorème 3.5. *Pour tout $T>0$, il existe une constante $C_T>0$ telle qu'on a, pour tout $i\geq 1$:*

$$\mathbb{E}[\sup_{t\leq T}|\tilde{\Theta}_t^i - \Theta_t^{i,N}|] \leq \frac{C_T}{\sqrt{N}}$$

Nous nous référons à [Sni] pour la preuve de ce résultat.

Nous pouvons remarquer que la vitesse de convergence des $\Theta^{i,N}$ est indépendante du i.

4 Retour sur l'article

Le système présenté dans l'article considère des équations dans $\mathbb{R}^d$, et de même pour représenter le bruit sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ il utilise une autre définition de l'intégrale stochastique introduite par Stratonovich.

4.1 Intégrale de Stratonovich

L'intégrale stochastique de Stratonovich est une autre façon d'intégrer par rapport à un mouvement Brownien. La notation pour indiquer ce type d'intégrale consiste à écrire $\circ\, dB_t$ au lieu de dB_t. Les preuves des résultats non démontrés se trouvent dans les références mentionnées en début de la deuxième partie.

Définition 4.1. (Intégrale de Stratonovich) *On définit l'intégrale pour $X \in V$ par*

$$\int_0^t X(s) \circ dB_s = \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2} \Big(X(t_i) + X(t_{i+1}) \Big) (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

où la limite est prise dans $L^2(\mathbb{P})$, et Π est le pas de la subdivision $(t_i)_{i \geq 0}$.

On peut alors écrire l'équivalent du processus d'Itô sous la forme de Stratonovich.

$$dX_t = g(t)dt + h(t) \circ dB_t$$

Le lien avec l'intégrale d'Itô peut être établi en définissant la covariance quadratique de deux processus. Pour la suite, nous présentons directement les formules qui permettent de passer d'une équation différentielle stochastique de Stratonovich à une d'Itô.

Proposition 4.1 (Équivalence Itô-Stratonovich)**.** *On a les formules suivantes, pour des processus réels et des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:*

- *Pour un processus réel $dX_t = g(X(t), t)dt + h(X(t), t) \circ dB_t$ en Stratonovich, on obtient $dX_t = \Big(g(X(t), t) - \frac{1}{2} h \partial_x h \Big) dt + h(X(t), t) dB_t$ en Itô.*
- *Pour un processus vectoriel $dX_t = C(X(t), t)dt + D(X(t), t) \circ dB_t$ on obtient l'équivalent en Itô en posant $dX_t = \tilde{C}(X(t), t)dt + \tilde{D}(X(t), t)dB_t$ où*

$$\begin{cases} \tilde{C}_i = C_i - \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j,k} D_{k,j} \partial_k D_{i,j} \\ \tilde{D}_{i,j} = D_{i,j} \end{cases} \tag{16}$$

4.2 Passage du type Stratonovich au type Itô

L'article pose le système différentiel couplé en (1) du type Stratonovich. Pour faire les calculs stochastiques, il est plus pratique d'utiliser la forme d'Itô : l'article nous présente directement la forme d'Itô que nous allons retrouver.

La matrice de projection s'écrit $P_{V_t^\perp} = D_t = (D_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq d}$ avec $(D_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq d} = \delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{\|V\|^2}$ pour $1 \leq i, j \leq d$.

Pour passer de la forme de Stratonovich à celle d'Itô on applique les formules (16). On obtient

$$P_{V_t^\perp} \circ dB_t = P_{V_t^\perp} dB_t - \frac{d-1}{2} \frac{V_t}{\|V_t\|^2}\, dt$$

Les calculs seront effectués dans l'annexe A.

Ainsi on retrouve l'équation différentielle stochastique d'Itô suivante :

$$dV_t = \Big(P_{V_t^\perp}(J(t)) - \frac{d-1}{2}\frac{V_t}{\|V_t\|^2}\Big)dt + P_{V_t^\perp}dB_t$$

Cette équation est vérifiée par chacun des N vecteurs considérés en 2. On remarque que la valeur de J n'a aucune influence lors du passage Stratonovich - Itô.

4.3 Le solution à l'équation différentielle stochastique est un processus sur la sphère

Une fois obtenue l'équation différentielle stochastique sous forme d'Itô, on peut vérifier que le vecteur vitesse reste à valeurs dans la sphère unité.

Démonstration. On utilise la formule d'Itô appliquée à la fonction $F : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ V \to \|V\|^2 = \sum_{i=1}^d V_i^2 \end{cases}$

Ainsi, en reprenant les notations de (4),

$$DF = \Big(\partial_{v_1}F, ..., \partial_{v_d}F\Big) = 2V, \qquad \partial_{v_iv_j}F = 2\delta_{ij}, \qquad \partial_t F = 0$$

La formule d'Itô donne alors

$$\|V\|_t^2 = \|V\|_0^2 + \int_0^t \Big(2V_s \cdot \Big(P_{V_s^\perp}(J(s)) - \frac{d-1}{2}\frac{V_s}{\|V_s\|^2}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d 2\delta_{ij}\Big(\sum_{l=1}^d h_{il}(s)h_{jl}(s)\Big)\Big)ds + \int_0^t 2V_t \cdot P_{V_t^\perp}dB_t$$

Or, par orthogonalité,

$$V_t \cdot P_{V_t^\perp} = 0$$

D'où

$$\|V\|_t^2 = \|V\|_0^2 + \int_0^t \Big(- 2V_s \cdot \Big(\frac{d-1}{2}\frac{V_s}{\|V_s\|^2}\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d 2\delta_{ij}\Big(\sum_{l=1}^d h_{il}(s)h_{jl}(s)\Big)\Big)ds$$

$$\|V\|_t^2 = \|V\|_0^2 + \int_0^t \Big(- (d-1) + \sum_{i,l=1}^d h_{il}(s)^2\Big)ds$$

On calcule alors

$$\sum_{i,l=1}^d h_{il}(s)^2 = \sum_{i,j}(\delta_{ij} - \frac{V_iV_j}{\|V\|^2})^2 = \sum_i(1 - 2\frac{V_i^2}{\|V\|^2}) + \sum_{i,j}\frac{V_i^2V_j^2}{\|V\|^4} = d - 2 + 1 = d - 1$$

On en déduit

$$\|V\|_t^2 = \|V\|_0^2 \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0$$

□

4.4 Conclusion et liens avec la biologie

L'étude d'équations différentielles stochastiques dans des modèles issus de la biologie permet de représenter le bruit dans les phénomènes naturels. Nous avons donc présenté l'intégrale stochastique d'Itô, base du calcul stochastique, et l'intégrale de Stratonovich qui apparaît naturellement quand on veut transposer en équation différentielle stochastique un processus de diffusion (c'est-à-dire, le bruit).

L'étude des bandes de poissons ou des nuées d'oiseaux commence donc par l'écriture d'équations différentielles stochastiques couplées. L'intérêt de cette approche est de trouver un processus limite vers lequel tendent nos solutions quand le nombre d'équations couplées tend vers l'infini.

A Calcul de l'équivalence Itô - Stratonovich

On veut maintenant montrer comment on obtient l'équation

$$P_{V_t^\perp} \circ dB_t = P_{V_t^\perp} dB_t - \frac{d-1}{2} \frac{V_t}{\|V_t\|^2}\ dt$$

pour transformer l'équation différentielle de type Stratonovich en une autre de type Itô. En reprenant les notations de (16), il nous faut calculer les nouvelles coordonnées du vecteur $\tilde{C}$.

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k} D_{jk} \partial_k D_{ij} &= \sum_{k,j} \Big(\delta_{kj} - \frac{V_k V_j}{\|V\|^2}\Big) \partial_k \Big(\delta_{ij} - \frac{V_i V_j}{\|V\|^2}\Big) \\
&= \sum_k \partial_k \Big(\delta_{ik} - \frac{V_i V_k}{\|V\|^2}\Big) - \sum_{k,j} \frac{V_k V_j}{\|V\|^2} \partial_k \Big(- \frac{V_i V_j}{\|V\|^2}\Big) \\
&= - \sum_k \partial_k \Big(\frac{V_i V_k}{\|V\|^2}\Big) + \sum_{k,j} \frac{V_k V_j}{\|V\|^2} \partial_k \Big(\frac{V_i V_j}{\|V\|^2}\Big)
\end{aligned}$$

On utilise les formules suivantes pour alléger les calculs :

$$\partial_a \Big(\frac{1}{\|V\|^2}\Big) = \frac{-2V_a}{\|V\|^4}\ ; \qquad \partial_a \Big(\frac{V_a}{\|V\|^2}\Big) = \frac{-2V_a^2}{\|V\|^4} + \frac{1}{\|V\|^2}\ ; \qquad \partial_a \Big(\frac{V_a^2}{\|V\|^2}\Big) = \frac{-2V_a^3}{\|V\|^4} + \frac{2V_a}{\|V\|^2}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\sum_k \partial_k \Big(\frac{V_i V_k}{\|V\|^2}\Big) &= \sum_{k \neq i} V_i \partial_k \frac{V_k}{\|V\|^2} \ + \partial_i \frac{V_i^2}{\|V\|^2} \\
&= \sum_{k \neq i} V_i \Big(\frac{-2V_k^2}{\|V\|^4} + \frac{1}{\|V\|^2}\Big) + \frac{-2V_i^3}{\|V\|^4} + \frac{2V_i}{\|V\|^2} \\
&= -2V_i \sum_k \frac{V_k^2}{\|V\|^4} + (d-1) \frac{V_i}{\|V\|^2} + \frac{2V_i}{\|V\|^2} = (d-1) \frac{V_i}{\|V\|^2}
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\sum_{k,j} \frac{V_k V_j}{\|V\|^2} \partial_k \Big(\frac{V_i V_j}{\|V\|^2}\Big) &= \sum_{k,j} \frac{V_k V_j}{\|V\|^2} \Big(- 2 \frac{V_i V_j V_k}{\|V\|^4}\Big) + \Big(V_i \sum_{k \neq i, j = k} \frac{V_k^2}{\|V\|^4}\Big) + \Big(\sum_{k = i, j \neq k} \frac{V_i V_j^2}{\|V\|^4}\Big) + 2 \frac{V_i^3}{\|V\|^4} \\
&= -2 \frac{V_i}{\|V\|^2} \sum_{k,j} \Big(\frac{V_k V_j}{\|V\|^2}\Big)^2 + 2 \frac{V_i}{\|V\|^2} \sum_k \Big(\frac{V_k^2}{\|V\|^2}\Big) = 0
\end{aligned}$$

D'où,

$$\tilde{C}_i = C_i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} D_{k,j} \partial_k D_{i,j} = C_i - \frac{d-1}{2} \frac{V_i}{\|V\|^2}$$

On conclut

$$P_{V_t^\perp}(J(t)) \circ dB_t = P_{V_t^\perp}(J(t)) dB_t - \frac{d-1}{2} \frac{V_t}{\|V_t\|^2}\ dt$$

$$P_{V_t^\perp} J(t)\ dt + P_{V_t^\perp} \circ dB_t = \Big(P_{V_t^\perp}(J(t)) - \frac{d-1}{2} \frac{V_t}{\|V_t\|^2}\ \Big) dt + P_{V_t^\perp} dB_t$$

Références

[1] François Bolley ; J.A Cañizo ; J.A. Carrillo, *Mean-field limit for the stochastic Vicsek model* (2011).

[2] C.W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer (2009), 80–101.

[3] Markus Reis, *Stochastic differential methods* (2007), 6–25.

[4] Jean-François Le Gall, *Mouvement Brownien et calcul stochastique*, Notes de cours de Master 2 (2008).

[5] A.S. Sznitmann, *Topics in propagation of chaos*, Lecture notes in mathematics, École d'Été de Saint-Flour (1989).