École normale supérieure Paris
Mémoire de maîtrise 2010

Sur la transitivité du flot géodésique sur une variété à courbure négative ou nulle

Katharina Radermacher
23 juin 2010

Sous la direction de
Viviane Baladi, Frédéric Paulin

Cet article est le travail final de mon stage d'un an en France que j'ai pu passer à l'École normale supérieure Paris grâce à la coopération entre celle-ci et la Studienstiftung des deutschen Volkes. Je souhaite remercier la première de l'accueil chaleureux et d'une année très stimulante, et la dernière du support financier et idéel que je reçois depuis quatre ans.

De plus, je souhaite remercier les deux personnes qui m'ont permis d'accomplir cette année et ce mémoire avec tant de succès. Lors de son cours, Mme Viviane Baladi m'a fait découvrir les systèmes dynamiques qui joueront un rôle important dans mes futures études. C'est son cours qui m'a donné envie de travailler sur un sujet dynamique.
M. Frédéric Paulin, mon tuteur à l'ENS, m'a accompagné pendant l'année et m'a donné beaucoup de bons conseils à propos des cours. Grâce à lui, j'ai été invitée au séminaire à Tours où j'ai eu connaissance du sujet de cet article.
En tant qu'encadrants, tous les deux m'ont soutenue le long de mes études, ont répondu à toutes mes questions, ont donné des mini-cours selon mes besoins et ont corrigé les premières versions de cet article, pour qu'il puisse atteindre l'état présent. Merci beaucoup !

Introduction

Le but de ce mémoire est de donner une introduction au flot géodésique en courbure négative ou nulle et de présenter un théorème sur la transitivité, qui a été publié par Coudène et Schapira en 2010 (voir [CS10]). L'auteur a découvert le sujet lors d'un séminaire du Réseau de Recherche Platon du CNRS à Tours au début de l'année 2010.

Le flot géodésique sur une variété à courbure négative ou nulle est un objet mathématique très étudié : D'une part en géométrie différentielle, comme il est la solution des équations différentielles naturellement rencontrées une fois qu'on a défini les bases de la géométrie riemannienne. D'autre part, le flot géodésique est un objet dynamique, un exemple naturel de dynamique hyperbolique, plus exactement un flot d'Anosov lorsque la courbure est strictement négative. On a étudié plusieurs propriétés de ce flot au cours du dernier siècle, dont la transitivité.

Dans le premier chapitre, on introduit les bases nécessaires de la géométrie riemannienne. Après avoir défini la métrique riemannienne, on introduit les concepts des géodésiques et de la fonction exponentielle afin de pouvoir définir le flot géodésique.
Le deuxième chapitre est une introduction géométrique aux variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle. On étudie le comportement des angles, des longueurs et des géodésiques en comparaison avec la situation euclidienne.
Après cette introduction générale, on s'occupe dans le chapitre suivant d'un exemple concret : le plan hyperbolique. On définit les horoboules et les Ces trois chapitres introductifs nous donnent les bases nécessaires pour aborder le sujet principal. On énonce et démontre dans le chapitre cinq un premier résultat sur la transitivité du flot géodésique dans le cas de courbure strictement nulle. De plus, on montre à l'aide de deux contre-exemples pourquoi ce résultat n'est plus vrai si la courbure s'annule.
Dans le dernier chapitre, après avoir expliqué la notion de rang 1 et la structure de produit local, on arrive finalement au théorème de Coudène-Schapira, pour lequel on donne une démonstration complète.

1 Introduction à la géométrie riemannienne

Pour pouvoir comprendre les concepts dont il sera question dans cet article, une connaissance de bases de la géométrie riemannienne est indispensable. Nous allons donner un minimum de définitions et d'explications qui seront nécessaires pour les énoncés et démonstrations qui suivront. Par contre, cette introduction ne peut que rester un survol et ne sera pas suffisamment profonde pour tout ce qui dépasse la lecture de ce mémoire. Pour une introduction plus profonde, on renvoie par exemple à [J02] et [P06].

Nous supposons par contre que le lecteur a suivi un cours de géométrie différentielle. Les définitions élémentaires d'une variété différentielle ou du fibré tangent ne seront pas rappelées, mais peuvent être relues dans chaque livre d'introduction à la géométrie differentielle. Commençons donc avec les structures métriques dont nous voulons équiper les variétés.

Définition 1.1 *Soit M une variété différentielle. Une métrique riemannienne sur M est la donnée d'un produit scalaire sur chaque espace tangent T_pM qui dépend de manière lisse du point de base $p \in M$. Une variété riemannienne est une variété différentielle équipée d'une métrique riemannienne.*

Toute variété différentielle peut être équipée d'une métrique riemannienne (voir th. 1.4.1 dans [J02]).
Soient M une variété différentielle de dimension n et $x = (x^1, \ldots, x^n)$ des coordonnées locales. Dans ces coordonnées, la métrique riemannienne est représentée par la matrice symétrique définie positive

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Soient $v, w \in T_pM$ deux vecteurs tangents, représentés en coordonnées par $(v^1, \ldots, v^n)$ et $(w^1, \ldots, w^n)$. Alors le produit des deux vecteurs est donné (avec les conventions usuelles de sommation) par

$$\langle v, w \rangle := g_{ij}(x(p))v^i w^j,$$

et la longueur d'un vecteur tangent $v \in T_pM$ est définie par

$$\|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

La longueur d'une courbe lisse $\gamma : [a, b] \to M$ se calcule par

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\gamma(t)))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}$$

avec l'abréviation $\dot{x}^i(t) = \frac{d}{dt}(x^i(\gamma(t)))$.
Supposons que M soit une variété connexe. La distance $d(p, q)$ entre deux points $p, q \in M$ est la borne inférieure des longueurs de courbes qui sont lisses par morceaux et qui joignent p et q :

$$d(p, q) := \inf\{L(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \to M \text{ lisse par morceaux avec } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Si le minimum est atteint, on a trouvé une géodésique.

Définition 1.2 *Une courbe lisse $c : [0,T] \to M$ est une géodésique si :*
- *pour tous points $p, q \in c([0,T])$, la géodésique minimise la longueur des courbes qui sont lisses par morceaux et qui joignent p et q, et*
- *elle est paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire que $\|\dot{c}(t)\| \equiv 1$.*

Au lieu de définir une géodésique à partir des deux points qu'elle joint en miminisant la distance, on peut aussi la définir par un point de base et une direction (au moins dans un petit intervalle temporel).

Proposition 1.3 *Étant donnés un point $p \in M$ et un vecteur tangent $v \in T^1_pM$, il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, une unique géodésique $c_v : [0, \varepsilon] \to M$ telle que $c_v(0) = p$ et $\dot{c}_v(0) = v$. De plus, c_v dépend de manière lisse de p et v (voir th. 1.4.2 dans [J02]).*

Dans la suite, on note M une variété riemannienne, et T^1M son fibré tangent unitaire, donc l'ensemble des vecteurs de norme 1 dans le fibré tangent TM. Avec cette connaissance, nous pouvons introduire la fonction exponentielle sur une variété riemannienne.

Définition 1.4 *Soient M une variété riemannienne, $p \in M$, et définissons l'ensemble V_p par l'ensemble des $v \in T_pM$ tels que $v = 0$ ou $c_{\frac{v}{\|v\|}}$ est définie sur $[0, \|v\|]$. La fonction*

$$\begin{aligned} \exp_p : V_p &\to M \\ v &\mapsto c_{\frac{v}{\|v\|}}(\|v\|) \end{aligned}$$

est appelée la fonction exponentielle de M en p.

En général, l'existence des géodésiques, donc des courbes lisses minimisant la longueur, est une propriété locale. Il suffit que deux points soient à distance suffisamment faible pour qu'une géodésique les joignant existe. Pourtant, dans beaucoup de cas, une telle courbe existe pour tout couple de points dans la variété.

Définition 1.5 *Une variété riemannienne M est géodésiquement complète si pour tout $p \in M$, toute géodésique c avec $c(0) = p$ est définie sur tout $[0, +\infty)$. En d'autres mots, M est géodésiquement complète si pour tout $p \in M$, l'application exponentielle $\exp_p$ est définie sur tout l'espace tangent T_pM.*

Montrons pourquoi les deux définitions sont équivalentes. Si pour $p \in M$ et pour $v \in T_pM$ non nul, la géodésique $c_{\frac{v}{\|v\|}}$ est définie sur $[0, +\infty)$, elle est définie en particulier en $\|v\|$. Alors la valeur $\exp_p(v)$ de la fonction exponentielle est définie. Dans l'autre sens, étant donnés $p \in M$ et $v \in T^1_pM$, on obtient la géodésique engendrée par v en recollant les morceaux de géodésique de longueur 1 dont l'existence est assurés par le fait que la fonction exponentielle soit définie sur T^1M.
Avec le **théorème de Hopf-Rinow**, nous pouvons déterminer si une variété est complète :

Théorème 1.6 *Soit M une variété riemannienne. Les énoncés suivants sont équivalents :*
- *M est géodésiquement complète.*
- *M est complète comme espace métrique.*
- *Il y a un $p \in M$ tel que $\exp_p$ est définie sur tout T_pM.*
- *Chaque sous-ensemble fermé borné de M est compact.*

Si un des énoncés est vérifié, deux points quelconques $p, q \in M$ peuvent être joints par une géodésique de longueur $d(p, q)$, donc de longueur minimale.

Par exemple, toute variété riemannienne compacte est complète.

Nous voulons maintenant introduire le flot géodésique. Avant cela, rappelons la définition générale d'un flot :

Définition 1.7 *Soit X un espace topologique. Un flot sur X est une action continue du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur X. Plus concrètement, un flot est une fonction continue $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$ telle que pour tout $x \in X$ et pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{gathered} \phi(x, 0) = x \quad \textit{et} \\ \phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s). \end{gathered}$$

On utilise souvent la notation $\phi_t : X \to X$ où $\phi_t(x) := \phi(x, t)$ pour désigner le flot.

Définition 1.8 *Le flot géodésique $g_t : T^1M \to T^1M$ est défini par*

$$g_t(v) = \dot{c_v}(t), \qquad \textit{avec } p \in M,\ v \in T^1_pM,\ t \in \mathbb{R}$$

où c_v est la géodésique de M telle que $c_v(0) = p$ et $\dot{c_v}(0) = v$.

Comme la géodésique c est paramétrée par la longueur d'arc, on a $\dot{c}_v(t+s) = \dot{c}_{\dot{c}_v(t)}(s)$. On trouve alors que $g_{t+s}(v) = g_s(g_t(v))$, donc le flot géodésique vérifie la définition d'un flot.

On peut aussi construire des flots à partir des équations différentielles. Soit M une variété différentielle et Y un champ de vecteurs sur M, c'est-à-dire une fonction lisse $Y : M \to TM$ telle que $Y(p) \in T_pM$ pour tout $p \in M$. Pour tout $p_0 \in M$, toute solution ϕ de

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(t) &= Y(\phi(t)) \\ \phi(0) &= p_0 \end{aligned}$$

définit un flot (voir th. 1.6.1 dans [J02]). Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une solution dans un petit intervalle autour de $0 \in \mathbb{R}$. Contrairement à la définition, ces flots ne sont pas forcément définis pour tous les temps. Pour cette raison, on parle d'un flot local.

Pour le théorème de Coudène-Schapira, dont la présentation et démonstration sont le but de ce mémoire, nous avons besoin d'introduire des flots de Jacobi parallèles le long d'une géodésique. Définissons donc ce que c'est :

Définition 1.9 *Soit $\gamma : [0, T] \to M$ une courbe lisse sur la variété riemannienne M. Un champ de vecteurs le long de γ est une fonction lisse $Y : [0, T] \to TM$ telle que $Y(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pour tout $t \in [0, T]$.*

Définition 1.10 *Soit $c : [0, T] \to M$ une géodésique dans la variété riemannienne M. Un champ de Jacobi le long de la géodésique c est un champ de vecteurs J le long de c tel qu'il existe une variation de $c(t)$ ($c : [0, T] \times (-\varepsilon, +\varepsilon) \to M$ lisse) qui vérifie :*

– $c(\cdot, s) =: c_s(\cdot)$ *sont des géodésiques,*
– $c_0(t) = c(t)$ *est la géodésique initiale,*
– $J(t) = \frac{\partial}{\partial s} c(t, s)_{|s=0}$.

D'après le lemme 4.2.3 de [J02], étant donnés une géodésique $c : [0, T] \to M$ et deux vecteurs tangents $v, w \in T_{c(0)}M$, il existe un unique champ de Jacobi J le long de c tel que

$$J(0) = v, \ \dot{J}(0) = w.$$

Pour comprendre la propriété d'être parallèle le long d'une courbe, nous avons besoin d'introduire la dérivée covariante. Soit $\Gamma(TM)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M.

Définition 1.11 *La dérivée covariante de la variété riemannienne M est l'unique application $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ telle que pour tous champs de vecteurs $X, Y, Y', Z, Z' \in \Gamma(TM)$ et toutes fonctions scalaires f, g sur M :*
– ∇ *est tensoriel en Y :*

$$\nabla_{fY+gY'} Z = f \nabla_Y Z + g \nabla_{Y'} Z$$

– ∇ *est $\mathbb{R}$-linéaire en Z :*

$$\nabla_Y (Z + Z') = \nabla_Y Z + \nabla_Y Z'$$

– ∇ *satisfait la règle de Leibniz :*

$$\nabla_Y (fZ) = Z \nabla_Y f + f \nabla_Y Z$$

– ∇ *est sans torsion :*

$$\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$$

– ∇ *est riemannienne :*

$$X(g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

où pour tout x, $\nabla_Y f\ (x)$ est la dérivée de la fonction f dans la direction du vecteur $Y(x)$, $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie et $g(\cdot, \cdot)$ la métrique riemannienne de la variété M.

Définition 1.12 *Un champ de vecteurs $t \mapsto X(t)$ le long d'une géodésique $t \mapsto c(t)$ est parallèle le long de cette géodésique si $t \mapsto \nabla_{\dot{c}(t)} X(t)$ est l'application nulle.*

Remarquons que pour pouvoir appliquer la dérivée covariante, on doit étendre le champ de vecteurs le long de c de manière lisse à un champ de vecteurs sur M. La définition ne dépend pas de la manière dont le champ de Jacobi est étendu.

Pour mieux comprendre cette définition de dérivée, donnons un exemple en dimension 2. Soit M une surface riemannienne. Soient c une géodésique dans M, et $t \mapsto X(t)$ un champ de vecteurs le long de cette géodésique. Dans ce cas-ci, le champ X est parallèle le long de c si et seulement si :
– il est de norme constante : $\|X(t)\| \equiv const.$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
– l'angle que $X(t)$ forme avec le vecteur directeur de la géodésique $\dot{c}(t)$ reste constant (modulo 2π) pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2 Courbure sectionnelle négative ou nulle

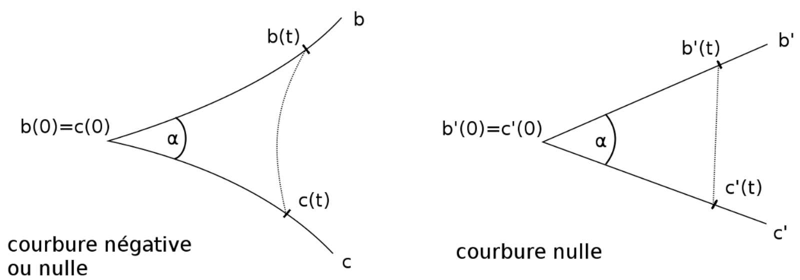
Dans ce chapitre, on veut donner une introduction aux variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle. La courbure sectionnelle fait partie d'une théorie plus grande, où la variété est équipée d'un tenseur de courbure. La courbure sectionnelle se calcule à partir de ce tenseur.
Ceci par contre dépasse largement le cadre de ce mémoire. On donnera une description plutôt intuitive en expliquant le comportement des longueurs et des géodésiques en courbure négative ou nulle. Le rapport entre le tenseur de courbure et la courbure sectionnelle est étudié dans tout livre d'introduction à la géométrie riemannienne, par exemple [J02] ou [P06]. Dans tout ce mémoire, lorsqu'on parlera de la courbure, ce sera toujours la courbure sectionnelle.

Dans la suite, soit M une variété riemannienne complète, et $T^1M \to M$ son fibré tangent unitaire. De plus, soit $\widetilde{M} \to M$ un revêtement universel de M avec fibré tangent unitaire $T^1\widetilde{M} \to \widetilde{M}$.

Nous connaissons déjà très bien la courbure nulle, dont la métrique euclidienne, dite standard, sur l'espace $\mathbb{R}^n$: la matrice dans la base canonique est la matrice identité. Toute géodésique est une droite. Les distances et les angles d'un triangle vérifient des relations trigonométriques bien connues. Comment est-ce que ceci change en courbure sectionnelle négative ou nulle ? Donnons une définition géométrique.

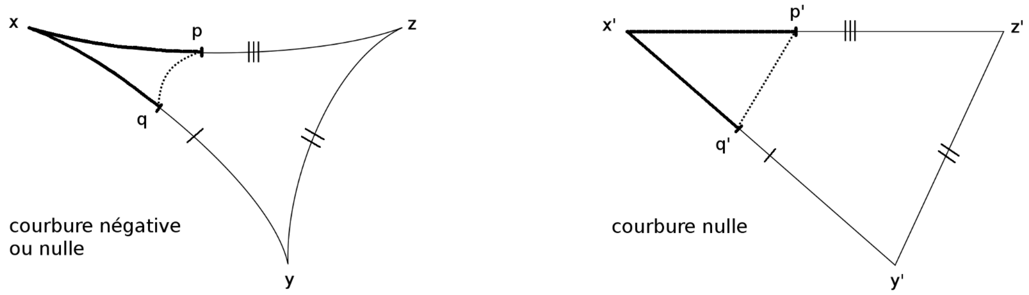
Une variété M est à courbure sectionnelle négative ou nulle, si dans $\widetilde{M}$ les géodésiques divergent plus vite que dans la situation euclidienne. Plus exactement, soient b, c deux géodésiques de $\widetilde{M}$ qui se rencontrent au temps 0, où elles forment un angle α. Soient $b(t), c(t)$ les points sur les géodésiques après un temps t. Réitérons la même situation en courbure nulle, avec le même angle et en appelant les géodésiques c' et d' (voir la figure ci-dessous). La variété M est à courbure sectionnelle négative ou nulle si pour tout choix de b et c, on a

$$d(b(t), c(t)) \geq d(b'(t), c'(t)).$$



Donnons une deuxième description équivalente. Soient $x, y, z \in \widetilde{M}$ trois points et $[x, y]$, $[y, z]$, $[z, x]$ trois géodésiques entre x et y, y et z, z et x respectivement. Soient x', y', z' des points dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, tels que les distances soient les mêmes : $d(x, y) = d(x', y')$ et de même pour les autres distances. Soient p un point sur la géodésique entre x et y, et q sur celle entre x et z. On trouve des points p', q' en courbure nulle de la même façon et tels que les distances vers x' vérifient : $d(x, p) = d(x', p')$ et $d(x, q) = d(x', q')$ (voir la figure ci-dessous). La variété M est à courbure sectionnelle négative ou nulle, si pour tout tels choix, on a

$$d(p,q) \leq d(p',q').$$



Définition 2.1 *Une variété de Hadamard est une variété riemannienne connexe, simplement connexe, complète, à courbure sectionnelle négative ou nulle.*

Si M est à courbure négative ou nulle, son revêtement universel $\widetilde{M}$ est une variété de Hadamard. Dans la suite, même si M n'est pas connue, $\widetilde{M}$ désignera toujours une variété de Hadamard.
Nous voulons démontrer que dans une variété de Hadamard, la géodésique passant par deux points distincts existe et est unique. Pour cela, on peut utiliser le théorème de **Hadamard-Cartan** :

Théorème 2.2 *Soit M une variété riemannienne complète à courbure négative ou nulle. Alors pour tout $p \in M$, l'application exponentielle $\exp_p : T_pM \to M$ est un revêtement (voir §2, théorème 2.1 dans [BGS85]).*

Dans le cas d'une variété de Hadamard, l'application exponentielle est donc un difféomorphisme $\widetilde{M} \simeq T^1_p\widetilde{M}$. L'espace vectoriel $T^1_p\widetilde{M}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ si n est la dimension de $\widetilde{M}$. Dans $\mathbb{R}^n$, une géodésique est donnée par l'unique droite passant par deux points distincts. Par le difféomorphisme, on retrouve cette géodésique unique dans $\widetilde{M}$. On vient donc de démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.3 *Soit $\widetilde{M}$ une variété de Hadamard. Pour tous points distincts $x, y \in \widetilde{M}$, il existe une unique géodésique qui passe par x et y.*

On a donc démontré l'existence et l'unicité des géodésiques dans une variété de Hadamard. Maintenant, nous nous intéressons au comportement relatif de deux géodésiques pour mieux comprendre les propriétés des variétés à courbure négative ou nulle.
Dans le cas d'un espace euclidien, deux géodésiques soit se croisent en un point, soit elles sont parallèles, soit elles sont non coplanaires, c'est-à-dire non incluses dans un même sous-espace de dimension deux.

Étudions le cas d'une variété à courbure négative ou nulle, plus précisément son revêtement universel, qui est une variété de Hadamard.

Proposition 2.4 *Soient $\widetilde{M}$ une variété de Hadamard, et $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ deux géodésiques. Alors la fonction*

$$t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$$

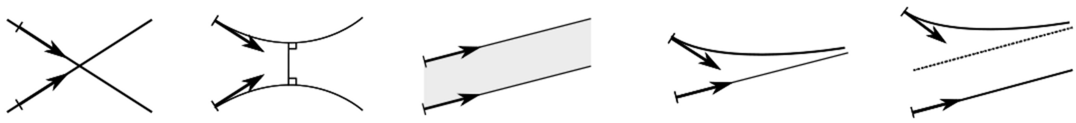
est convexe.

Pour démontrer cette proposition, il faudrait plus de connaissance sur la courbure qu'on a pu en donner dans ce mémoire. On renvoie donc à §1, théorème 1.3 dans [BGS85].

On connaît suffisamment bien le comportement des fonctions convexes à l'infini. Ceci nous permet de déduire des informations sur le comportement relatif de deux géodésiques dans une variété de Hadamard. Soient $c_1, c_2 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ deux géodésiques avec $c_1(\mathbb{R}) \neq c_2(\mathbb{R})$. On trouve les différentes possibilités suivantes pour le comportement des géodésiques : la fonction $t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$:

- *a un unique minimum :*
  Si la fonction s'annule en ce minimum, les deux géodésiques s'intersectent en un unique point. Si elles ne se rencontrent pas, il existe une géodésique de longueur minimale qui joint orthogonalement les deux géodésiques.
- *admet plusieurs minima :*
  Dans ce cas, il y a plusieurs possibilités. Supposons que cette fonction soit constante (ou, de manière équivalente, bornée sur $\mathbb{R}$). D'après le théoréme de la bande plane (voir §2, lemme 2.3 dans [BGS85]), les deux géodésiques bordent une sous-variété euclidienne à bord isométrique à $[0, a] \times \mathbb{R}$ et totalement géodésique (c'est-à-dire toute géodésique de la sous-variété reste minimisante dans la variété d'origine). La courbure sectionnelle s'annule sur cette sous-variété. En courbure strictement négative, ce cas est exclu.
- *n'atteint pas de minimum, la borne inférieure est nulle :*
  La borne inférieure peut être atteinte soit en $+\infty$, soit en $-\infty$. Dans le premier cas, la fonction $d(c_1(t), c_2(t))$ décroit vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Dans le cas contraire, la fonction décroit vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Les deux orbites se rapprochent et tendent vers le même point à l'infini (voir aussi la définition 3.1 du bord à l'infini) Si la courbure s'annule partout, cette situation ne se produit pas.
- *n'atteint pas de minimum, la borne inférieure est strictement positive :*
  Dans ce cas, il y a plusieurs possibilités. Supposons que la borne inférieure soit atteinte en $+\infty$. Alors sans perte de généralité, la première géodésique peut se rapprocher pour $t \to +\infty$ d'une géodésique, qui forme une bande plane avec la deuxième. Ou alors, les deux goedésiques se rapprochent d'une bande plane formée par deux nouvelles géodésiques. On retrouve les mêmes possibilités, si la borne inférieure est atteinte en $-\infty$.

La figure ci-dessous (de [C10]) éclaire les différentes possibilités (mais pour le second, troisième et quatrième cas, il y en a d'autres).



3 L'exemple de la courbure sectionnelle constante -1

Dans la suite, soit M une variété riemannienne complète, et $\widetilde{M}$ son revêtement universel. Le flot géodésique est défini sur le fibré tangent unitaire T^1M, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs dans le fibré tangent qui sont de norme 1. De même, on note $T^1\widetilde{M}$ le fibré tangent unitaire d'un revêtement universel $\widetilde{M}$ de M.

Dans le chapitre précédent, nous avons donné une description géométrique et intuitive de la courbure sectionnelle négative ou nulle. On veut maintenant étudier plus en détail le cas d'une surface à courbure sectionnelle constante -1. On introduira quelques notions nécessaires pour les chapitres suivants, qui s'étendent naturellement aux cas de dimension supérieure ou de courbure variable négative ou nulle. Comme on n'a pas introduit les formules pour calculer la valeur de la courbure négative, on ne peut pas démontrer que notre exemple est en effet une variété à courbure sectionnelle constante -1. On renvoie à [P06], chapitre 3, «3. Hyperbolic Space», où c'est fait en plus de détails.

On introduit deux modèles du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire de l'unique à isométrie près surface riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle -1 : le modèle du demi-plan supérieur, et le modèle du disque, parfois appelé disque de Poincaré. Le premier est utile pour comprendre la métrique, mais pour les éléments dynamiques, on utilisera plutôt le dernier.
Soit

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

l'ensemble des points complexes de partie imaginaire strictement positive. On équipe ce demi-plan de la métrique

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

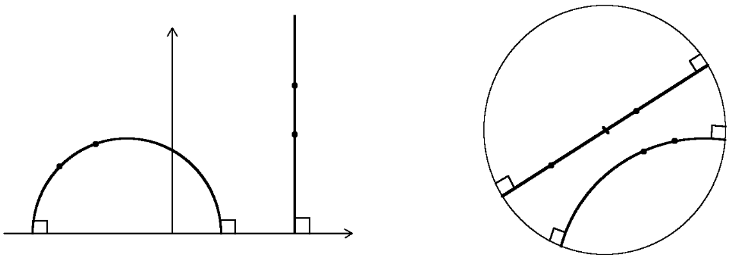
où $z = x + iy$ et dx, dy sont comme dans le plan euclidien. On calcule facilement qu'il y a deux types de géodésiques. Les droites verticales minimisent la distance entre deux points de parties réelles égales. Pour deux points de parties réelles différentes, la géodésique est le demi-cercle unique qui passe par les deux points et qui est orthogonal à l'axe réel. Remarquons que les cercles pour la distance hyperbolique sont des cercles euclidiens, mais pas avec le même centre.
Le plan hyperbolique est envoyé sur le disque

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

par l'homéomorphisme $z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$. L'homéomorphisme inverse est donné par $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. La métrique dans le disque hyperbolique se calcule donc par

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - |z|^2)^2}$$

où $z = x + iy$ et dx, dy comme avant. Les géodésiques du demi-plan hyperbolique sont projetées sur des segments de cercles généralisés (soit des cercles, soit des droites) dans le disque qui sont perpendiculaires au bord du disque S^1. Les géodésiques qui passent par l'origine sont des segments de diamètre. Les cercles pour la distance hyperbolique sont toujours des cercles euclidiens, car l'homéomorphisme ci-dessus est une transformation de Möbius. Par contre, le centre d'un cercle hyperbolique n'est pas le même que celui du



cercle euclidien correspondant. La figure ci-dessous visualise les deux modèles du plan hyperbolique avec les différents types de géodésiques.

Soit maintenant $\phi_t : X \to X$ un flot défini sur un espace métrique X. Pour un élément $x \in X$, on définit les *variétés fortement stables* :

$$W^{ss}(x) := \{y \in X \mid \lim_{t\to+\infty} d(\phi_t(x), \phi_t(y)) = 0\}$$
$$W^{ss}_\varepsilon(x) := \{y \in W^{ss}(x) \mid d(\phi_t(x), \phi_t(y)) \leq \varepsilon \text{ pour tour } t \geq 0\}$$

On définit de même les variétés fortement instables W^{su} et W^{su}_ε, ce sont les variétés fortement stables de ϕ_{-t}.
Deux orbites du flot ϕ_t sont positivement asymptotes si on trouve deux éléments x, x' appartenant à ces orbites tels que $x' \in W^{ss}(x)$. Elles sont négativement asymptotes si on trouve x, x' avec $x' \in W^{su}(x)$. On dit que deux vecteurs unitaires sont asymptotes, si leurs orbites sous l'action du flot géodésique ϕ_t sont asymptotes. Deux géodésiques sont asymptotes si on trouve sur chacune un vecteur unitaire qui l'engendre et tels que les deux vecteurs sont asymptotes. Il est immédiat que la propriété *être asymptote* est une relation d'équivalence.

Revenons au cas du plan hyperbolique. Soit $g_t : T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R} \to T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ le flot géodésique sur le fibré tangent unitaire du plan hyperbolique. Avec la relation d'équivalence *être asymptote*, on peut définir le bord à l'infini du plan hyperbolique.

Définition 3.1 *Soit $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ le plan hyperbolique. Le bord à l'infini est défini par*

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2_\mathbb{R} := \{\textit{géodésiques dans } \mathbb{H}^2_\mathbb{R}\}/\sim \text{“\textit{être asymptote}”}.$$

On voit tout de suite que

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2_\mathbb{R} = \begin{cases} \mathbb{R} \cup \{\infty\} & \text{dans le modèle du demi-plan supérieur} \\ S^1 & \text{dans le modèle du disque} \end{cases}.$$

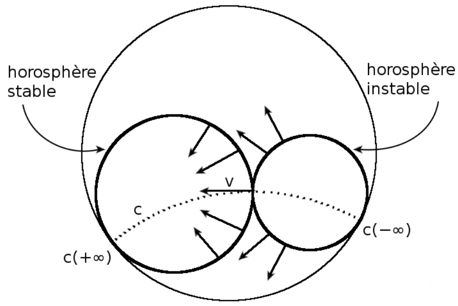
Cette définition nous donne immédiatement une topologie sur le bord à l'infini. Soient b, c deux géodésiques, c'est-à-dire deux orbites par le flot géodésique, dans le plan hyperbolique. On note $b(-\infty), b(+\infty)$, respectivement $c(-\infty), c(+\infty)$ leurs intersections avec $\partial_\infty \mathbb{H}^2_\mathbb{R}$. Alors $b(\pm\infty)$ est proche de $c(\pm\infty)$ dans le bord à l'infini si et seulement si les deux géodésiques sont proches l'une de l'autre dans la topologie de $T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$.

A part les variétés fortement stables et instables, on veut aussi introduire le concept des horosphères. Comme on verra plus tard, ces deux notions se correspondent dans le plan

hyperbolique, mais pas en général. Commençons par la définition de l'horoboule.
Soit $v \in T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ un vecteur dans le fibré tangent unitaire, et notons $pr : T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R} \to \mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ la projection du fibré tangent unitaire sur la variété originale. L'horoboule basée en v est le sous-ensemble de $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ union de toutes les boules ouvertes de rayon t centrées en $pr(g_t(v))$:

$$HB(v) := \bigcup_{t \geq 0} B(pr(g_t(v)), t).$$

Par le paramétrage des géodésiques, le point de base $pr(v)$ est contenu dans le bord de chaque boule, donc dans le bord de l'horoboule.
Dans le plan hyperbolique, l'horoboule est la boule tangente au bord $\partial_\infty \mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ telle que le vecteur v est orthogonal au bord de l'horoboule et pointe vers l'intérieur. En général, le bord de l'horoboule est une sous-variété lisse de la variété riemannienne complète M.
On relève l'horoboule au fibré tangent unitaire $T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$: l'horosphère stable $Hor^+(v)$ du vecteur unitaire v est l'ensemble des vecteurs de $T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ basés sur le bord de l'horoboule $HB(v)$, orthogonaux à ce bord et orientés vers l'intérieur. L'horosphère instable $Hor^-(v)$ d'un vecteur $v \in T^1\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$ est composée des vecteurs orthogonaux au bord de l'horoboule $HB(-v)$, dirigés vers l'extérieur de cette horoboule. La figure ci-dessous montre l'horosphère stable et instable d'un vecteur v, ainsi que la géodésique c qu'il engendre.



Examinons de plus près les horosphères. Soit v un vecteur du fibré tangent unitaire, c la géodésique qu'il engendre et $Hor^+(v)$ l'horosphère stable. La géodésique engendrée par chaque vecteur de $Hor^+(v)$ (dont v fait partie) croise l'horosphère perpendiculairement et doit alors tendre vers $c(+\infty)$ pour les temps positifs. Ceci découle immédiatement du fait que les géodésiques dans le disque de Poincaré sont des diamètres ou des cercles orthogonaux au bord à l'infini. Dans le plan hyperbolique, l'horosphère stable $Hor^+(v)$ est donc égale à la variété fortement stable $W^{ss}(v)$. Par les mêmes arguments, on montre que l'horosphère instable $Hor^-(v)$ est égale à la variété fortement instable $W^{su}(v)$ (voir aussi §3 dans [BGS85]).
En courbure négative ou nulle, l'horosphère stable et la variété fortement stable ne coïncident pas en général. Dans le cas du plan euclidien (à courbure constante nulle), l'horosphère $Hor^+(v)$ est l'ensemble des vecteurs obtenus par translation de v le long de la droite orthogonale à v. Par contre, le seul vecteur engendrant une géodésique asymptote à celle de v est le vecteur v lui-même ; les vecteurs tangents de deux trajectoires parallèles restent à distance constante strictement positive. De manière générale on trouve que $W^{ss}(v) \subset Hor^+(v)$, ce qui est immédiat avec les définitions des deux ensembles.

Jusqu'ici, on a parlé du plan hyperbolique. Il y a aussi d'autre surfaces riemanniennes connexes complètes à courbure sectionnelle -1. Dans ce cas-là, le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2_\mathbb{R}$

est un revêtement universel riemannien.
Soit M une telle surface et $\widetilde{M} = \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Soit $\pi : \widetilde{M} \to M$ la projection du revêtement universel sur la variété originale M. On note $\Gamma = \pi_1 M$ le groupe du revêtement ou groupe fondamental, alors $M \simeq \widetilde{M}/\Gamma$.
On note avec un tilde un relèvement d'un point, d'un vecteur, d'un flot ou d'une géodésique. Par exemple : un relevé $\widetilde{v}$ d'un vecteur $v \in T^1M$ est tout élément de $T^1\widetilde{M}$ qui est projeté sur v par l'application $D\pi$, la différentielle de π.
Si le groupe Γ est infini, on peut examiner l'ensemble des relèvements d'un élément de M.

Définition 3.2 *Soient M une variété riemannienne, $\widetilde{M}$ son revêtement universel riemannien et Γ son groupe du revêtement. Pour un point $x_0 \in M$, on définit l'ensemble limite par*

$$\Lambda\Gamma := \{\textit{points d'accumulation de l'orbite } \Gamma\widetilde{x}_0\} \cap \partial_\infty \widetilde{M}$$

Il est clair que cet ensemble est indépendant du choix du relevé $\widetilde{x}_0$ de x_0. Il est de plus indépendant du point x_0 (voir chap. I, 3.1, dans [D07]). L'ensemble limite $\Lambda\Gamma$ est invariant par le groupe Γ.
On a maintenant bien compris la courbure strictement négative. Pour les études plus étendues sur le plan hyperbolique, on renvoie à [B91]. Le flot géodésique est expliqué en plus de détail dans [M91]. Dans [D07] se trouve une introduction qui inclut les groupes fuchsiens dans la théorie du flot géodésique. Abordons maintenant le sujet principal : la transitivité du flot géodésique.

4 Transivité du flot géodésique en courbure strictement négative

Le but de ce chapitre est d'énoncer le théorème 4.5, qui nous donne la transitivité du flot géodésique en courbure strictement négative, et de voir pourquoi ce théorème ne peut pas rester vrai si la courbure s'annule. Commençons avec quelques propriétés générales d'un flot.

Définition 4.1 *Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continu défini sur un espace métrique X. Un vecteur $v \in X$ est périodique s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}\backslash 0$ tel que $\phi_{t_0}(v) = v$. Une orbite du flot est périodique (ou fermée) si elle est engendrée par un vecteur périodique.*

Définition 4.2 *Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continu défini sur un espace métrique X. Un élément $v \in X$ est positivement (respectivement négativement) récurrent s'il existe une suite $t_n \to +\infty$ (respectivement $-\infty$) tel que $\phi_{t_n}(v) \to v$. On dit que v est récurrent s'il est à la fois positivement et négativement récurrent.*

Définition 4.3 *Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continu défini sur un espace métrique X. L'ensemble non errant de ϕ_t est défini par :*

$$\Omega = \{x \in X \mid \textit{pour tout voisinage ouvert de } x \textit{ il existe } t_n \to +\infty \textit{ tel que } \phi_{t_n}(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

On voit tout de suite que l'ensemble non errant Ω est un ensemble fermé (son complémentaire est visiblement ouvert) qui est invariant par le flot ϕ_t, et que les points récurrents appartiennent à Ω.

Dans la suite, on va regarder le flot géodésique défini sur le fibré tangent unitaire d'une variété à courbure négative ou nulle. Commonçons avec le cas de courbure strictement négative. Ce flot satisfait le lemme de fermeture d'Anosov suivant.

Définition 4.4 *Un flot $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur un espace métrique X satisfait le lemme de fermeture si pour tout point $v \in X$, il existe un voisinage V de v tel que :*
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $x \in V$ et pour tout $t > t_0$ avec $d(x, \phi_t(x)) < \delta$ et $\phi_t(x) \in V$, on trouve $x_0 \in V$ et $\ell > 0$, avec $|\ell - t| < \varepsilon$, $\phi_\ell x_0 = x_0$, et $d(\phi_s x_0, \phi_s x) < \varepsilon$ pour $0 \leq s \leq \min(t, \ell)$.

Cette propriété nous dit que si une orbite retourne aux alentours du point initial, on trouve une orbite fermée qui est proche de la première orbite.
Dans sa thèse [A67], Anosov a démontré le lemme de fermeture pour de nombreux systèmes dynamiques, qui portent aujourd'hui son nom. Le flot géodésique sur une variété compacte à courbure strictement négative en fait partie (voir §22 de [A67] ou chap. 2.1.f. dans [H02]).
Un flot ϕ_t est un flot d'Anosov s'il existe des distributions E^s (stable), E^u (instable) et des constantes $C > 0$, $0 < \gamma < 1$ telles qu'on trouve une décomposition du fibré tangent invariante par le flot

$$TM = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$$

avec

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(v)\| &\leq C\gamma^t \|v\| \quad \text{pour tout } v \in E^s \\ \|d\phi_{-t}(v)\| &\leq C\gamma^t \|v\| \quad \text{pour tout } v \in E^u. \end{aligned}$$

Les vecteurs dans E^0 pointent dans la direction du flot.
Le lemme de fermeture reste vrai pour une variété non compacte à courbure strictement négative (voir chapitre 7 de [CS10]). Comme on le verra plus tard, le flot géodésique en courbure négative ou nulle satisfait aussi le lemme de fermeture, si on le restreint à un sous-ensemble convenable.

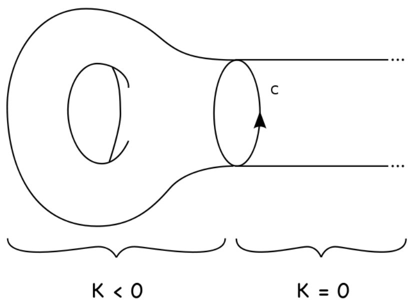
On peut maintenant énoncer un premier résultat sur le flot géodésique sur une variété à courbure strictement négative :

Proposition 4.5 *Soit M une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle strictement négative. Alors les vecteurs unitaires engendrant des géodésiques périodiques sont denses dans l'ensemble non errant. Supposons de plus que Ω contient au moins trois géodésiques périodiques. Alors le flot géodésique g_t restreint à l'ensemble non errant Ω est topologiquement transitif : il existe un $v \in \Omega$ tel que $\{g_t(v) | t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans Ω.*

La première propriété est une conséquence immédiate du lemme de fermeture. Pour la deuxième, donnons une esquisse de la preuve. Soit $\widetilde{M}$ le revêtement universel riemannien de la variété M, c'est donc une variété de Hadamard. On sait qu'en courbure strictement négative, la géodésique qui joint deux points de $\widetilde{M} \cup \partial_\infty \widetilde{M}$ existe et est unique (on l'a démontré dans la cas plus général de la courbure négative ou nulle dans la proposition 2.3). Le fait que Ω contienne au moins trois géodésiques périodiques implique que le relevé de Ω contient une infinité de géodésiques périodiques non équivalentes, c'est-à-dire qui ne sont pas projetées sur la même géodésique de M (voir th. 3.9 dans [E72]). Il s'ensuit que l'ensemble limite $\Lambda\Gamma$ lui aussi est de cardinalité infinie. Ceci, par le théorème 3.11 de [E72], nous donne la transitivité du flot géodésique g_t sur l'ensemble non-errant Ω. □

Le théorème précédent est faux en courbure nulle : Soient $\widetilde{M}$ l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^3$ et γ un vissage qui est composé d'une rotation irrationnelle et d'une translation le long de l'axe de la rotation. On s'intéresse aux géodésiques dans $M = \widetilde{M}/\langle\gamma\rangle$. Comme la courbure est nulle, toutes les géodésiques doivent être des projections de droites de $\mathbb{R}^3$.
La droite verticale passant par l'origine $(0, 0, \mathbb{R})$ est projetée sur une géodésique périodique (deux, si on compte le sens). La projection de toute autre droite verticale n'est pas fermée, mais dense dans un tore qui est la projection d'un cylindre de la forme $S^1 \times \mathbb{R}$ autour de la géodésique fermée. Chaque droite non verticale de $\mathbb{R}^3$ est projetée sur une géodésique qui part vers l'infini pour les temps positifs et négatifs, donc qui n'est pas périodique dans M. Les vecteurs engendrant une géodésique verticale qui ne passe pas par l'origine sont donc réccurents et appartiennent à l'ensemble non errant. Par conséquent, il y a une infinité d'orbites de vecteurs récurrents. En particulier, les vecteurs engendrant une géodésique périodique ne sont pas denses dans l'ensemble non errant.

Donnons de plus un contre-exemple non trivial en courbure négative ou nulle où le deuxième énoncé de la proposition 4.5 est faux. Regardons la surface composée d'un tore troué auquel est collé un demi-cylindre. La géodésique c sépare la partie compacte à courbure strictement négative et la partie isométrique à $[0, \infty) \times S^1$ à courbure nulle (voir la figure ci-dessous, de [CS10]).



Le fibré tangent unitaire de cette surface possède trois types d'orbites du flot géodésique $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$: les orbites périodiques contenues dans le cylindre euclidien, les orbites qui restent dans la partie à courbure strictement négative et les orbites qui rencontrent la géodésique c. Pour tout vecteur du cylindre engendrant une géodésique qui croise c, on trouve un voisinage de vecteurs dont l'image par g_t tend vers l'infini, soit pour $t \to +\infty$, soit pour $t \to -\infty$. Ces orbites sont donc errantes.
Les géodésiques périodiques dans le cylindre sont incluses dans l'ensemble non errant Ω, les autres géodésiques rencontrant le cylindre ne le sont pas. Une orbite non périodique proche d'une orbite périodique du cylindre doit donc être errante. Elle ne peut ni être récurrente ni être dense dans l'ensemble Ω. Autrement dit, le flot géodésique ne peut pas être transitif sur l'ensemble non errant Ω, même si les orbites périodiques sont denses dans Ω.

5 Transitivité du flot géodésique en courbure négative ou nulle

On essaie maintenant de trouver des énoncés plus fortes pour lesquelles le flot géodésique reste transitif même en courbure négative ou nulle. Dans le cas d'une surface, un théorème d'Eberlein nous donne la transitivité si tout vecteur unitaire est non errant.

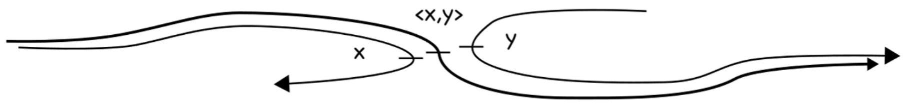
Proposition 5.1 *Soit M une surface à courbure négative ou nulle, ayant au moins un point de courbure strictement négative, et telle que $\Omega = T^1M$. Alors les orbites périodiques sont denses dans T^1M et le flot géodésique est transitif sur T^1M (voir [E96]).*

En dimension quelconque, Coudène et Schapira ont trouvé un résultat en 2010 qu'on présentera dans ce mémoire. Pour cela, il faut introduire plusieurs notions préliminaires.

Définition 5.2 *Soit $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un flot continu sur un espace métrique X. On dit qu'il admet une structure de produit local si tout $v \in X$ possède un voisinage V qui vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tous $x, y \in V$ avec $d(x, y) \leq \delta$, il existe un point $\langle x, y\rangle \in X$ et un nombre réel t tels que $|t| \leq \varepsilon$ et*

$$\langle x, y\rangle \in W_\varepsilon^{su}(\phi_t(x)) \cap W_\varepsilon^{ss}(y).$$

Cette propriété nous donne la possibilité de recoller des orbites. Plus précisément, pour deux orbites passant à faible distance l'une de l'autre, on peut trouver une nouvelle orbite qui suit à distance proche la permière orbite jusqu'au rapprochement, puis la deuxième. Notons qu'en utilisant cette méthode récursivement, nous pouvons recoller un nombre fini d'orbites. La figure ci-dessous éclaire la propriété de structure de produit local (figure de [CS10]).



Le flot géodésique en courbure strictement négative admet une structure de produit local (voir le th. 3.2 de [PS70] ; d'après le lemme de fermeture et les propriétés d'un flot d'Anosov, g_t satisfait l'axiome A'). On démontrera plus tard que cette propriété est préservée sur un sous-ensemble non vide de l'ensemble non errant Ω même en courbure négative ou nulle, si la variété est de rang 1.

Définition 5.3 *Soient M une variété riemannienne et v un vecteur du fibré tangent unitaire T^1M. Le vecteur v est un vecteur de rang 1 si le seul champ de Jacobi parallèle le long de la géodésique engendré par v est proportionnel au générateur du flot géodésique g_t. Une géodésique est de rang 1 si elle est engendrée par un vecteur de rang 1.*
Une variété de rang 1 est une variété riemannienne connexe complète à courbure négative ou nulle dont le fibré tangent unitaire admet un vecteur de rang 1.

En particulier, si la variété est de rang 1, elle ne peut pas avoir de bandes planes (voir page 8 pour la définition d'une bande plane et une référence pour le théorème de la bande plane).

L'ensemble des vecteurs de rang 1 est un ouvert de T^1M. En effet, son complémentaire est fermé. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de vecteurs qui ne sont pas de rang 1, et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des géodésiques qu'ils engendrent. Il existe donc un champ de Jacobi J_n

parallèle le long de c_n qui n'est pas proportionnel au générateur de g_t. Comme le champ de vecteurs de norme 1 tangent à une géodésique est toujours un champ de Jacobi parallèle, et par addition et multiplication scalaire, on peut supposer sans perte de généralité que chaque J_n est normé et perpendiculaire à c_n.
La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur w qui engendre une géodésique c, et $c_n \to c$, car les limites commutent avec les différentielles définissant c_n et c. De même, la suite des champs de Jacobi J_n tend vers un champ de Jacobi J parallèle le long de la géodésique c, perpendiculaire à c et normé. Le vecteur w ne peut donc pas être de rang 1, ce qu'il fallait démontrer.

Comme on l'a vu dans les deux contre-exemples, le flot géodésique g_t n'est en général pas transitif en restriction à tout l'ensemble non errant Ω. En revanche, l'orbite d'un vecteur errant sous le flot géodésique ne peut jamais être dense. Le but est maintenant de trouver un sous-ensemble de Ω sur lequel g_t est transitif.

Soient $\widetilde{M} \to M$ un revêtement universel riemannien de M et $T^1\widetilde{M}$ le fibré tangent unitaire de $\widetilde{M}$. Rappelons qu'un tilde désigne un relèvement de M à $\widetilde{M}$, ou de T^1M à $T^1\widetilde{M}$.

Définition 5.4 *Soit v un vecteur de rang 1 dans l'ensemble non errant. Le vecteur v appartient à l'ensemble Ω_1^+ si pour tout $\widetilde{w} \in T^1\widetilde{M}$ tel que la distance $d(\widetilde{g}_t(\widetilde{w}), \widetilde{g}_t(\widetilde{v}))$ reste bornée pour $t \geq 0$, il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\widetilde{g}_{t_0}(\widetilde{w}) \in W^{ss}(\widetilde{v})$.*
On définit mutatis mutandis *l'ensemble Ω_1^- en remplaçant le flot $(\widetilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ par son inverse $(\widetilde{g}_{-t})_{t\in\mathbb{R}}$. On pose enfin $\Omega_1 := \Omega_1^+ \cap \Omega_1^-$ et $\Omega_1(M) = \Omega_1$ lorsque l'on veut préciser M.*

Un vecteur non errant v est donc dans Ω_1 si toute géodésique dont un relèvement reste – pour les temps positifs – à distance bornée d'un relèvement de la géodésique de v lui est en fait asymptote (dans les deux directions). Un contre-exemple typique de vecteurs en dehors de Ω_1 est un vecteur engendrant une géodésique fermée dans un cylindre plat, ou alors un vecteur asymptote à une telle géodésique. L'ensemble Ω_1 est invariant par le flot géodésique, car pour $t_0 \in \mathbb{R}$, la distance $d(\widetilde{g}_t(\widetilde{w}), \widetilde{g}_t(\widetilde{v}))$ reste bornée pour $t \geq 0$ si et seulement si $d(\widetilde{g}_{t+t_0}(\widetilde{w}), \widetilde{g}_{t+t_0}(\widetilde{v}))$ reste bornée pour $t \geq 0$.

L'ensemble Ω_1 d'une variété à courbure négative ou nulle possède quelques propriétés similaires à celles du fibré tangent unitaire en courbure strictement négative :

Proposition 5.5 *Soit M une variété de rang 1. La restriction à $\Omega_1(M)$ du flot géodésique admet une structure de produit local et satisfait le lemme de fermeture (voir Th. 5.1 dans [CS10]).*

Pour la démonstration de ce théorème, et aussi pour le théorème suivant, on a besoin de trois lemmes de [K02], qu'on va citer en utilisant les notations de ce mémoire et en adaptant les énoncés à notre situation, mais sans donner la démonstration.

Lemme 5.6 *Soit M une variété riemannienne à courbure sectionnelle négative ou nulle et de rang 1. Soit $\widetilde{v} \in T^1\widetilde{M}$ un vecteur récurrent de rang 1. Alors pour tout $\widetilde{w} \in Hor^+(\widetilde{v})$*

$$d(\widetilde{g}_t(\widetilde{v}), \widetilde{g}_t(\widetilde{w})) \to 0$$

quand t tend vers $+\infty$ (voir chap. 5, prop. 4.4 dans [K02]).

Lemme 5.7 *Soit $\widetilde{M}$ une variété de Hadamard et c une géodésique de rang 1 sur $\widetilde{M}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existent des voisinages U de $c(-\infty)$ et V de $c(+\infty)$ tels que pour tout $\xi \in U$, $\eta \in V$, on trouve une géodésique h de rang 1 reliant ξ et η telle que $d(\dot{c}(0), \dot{h}(0)) \leq \epsilon$. En particulier, d'après le théorème de la bande plane, h est unique modulo paramétrisation (voir chap. 5, lemme 1.3 dans [K02]).*

Avec ceci, Knieper démontre :

Lemme 5.8 *Soit $\widetilde{M}$ une variété de Hadamard. Alors on peut relier par une géodésique de rang 1 tout point à l'infini d'une géodésique de rang 1 quelconque avec un point arbitraire sur le bord à l'infini $\partial_\infty \widetilde{M}$ (voir chap. 5, lemmes 1.3 et 1.4 dans [K02]).*

Démonstration de la proposition 5.5. Le flot géodésique $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$, en restriction aux vecteurs non errants de rang 1, satisfait le lemme de fermeture. Eberlein donne une démonstration dans le cadre plus général de la courbure négative ou nulle (voir Prop. 4.5.15 dans [E96]), qui est refaite par Coudène-Schapira en utilisant les propriétés plus fortes de rang 1 (voir le chapitre 7 de [CS10]). Démontrons que ceci reste vrai en restriction à Ω_1 :

Soient v un vecteur tangent unitaire récurrent, et $\widetilde{w} \in T^1\widetilde{M}$ à distance positivement bornée comme dans la définition 5.4. D'après ce qu'on a vu à la page 8 et car tous les cas avec une bande plane (sous-variété euclidienne à bord totalemant géodésique) sont exclus, les géodésiques engendrées par $\widetilde{v}$ et $\widetilde{w}$ se rapprochent, et tendent vers le même point sur le bord à l'infini. Alors une image $\widetilde{g}_{t_0}(\widetilde{w})$ de $\widetilde{w}$ par le flot géodésique se trouve dans $Hor^+(\widetilde{v})$ l'horosphère stable de $\widetilde{v}$. Par le lemme 5.6, le vecteur $\widetilde{g}_{t_0}(\widetilde{w})$ est dans la variété fortement stable de $\widetilde{v}$, c'est-à-dire que v appartient à Ω_1^+. On a démontré que tout vecteur récurrent de rang 1 appartient à Ω_1^+, donc en particulier tout vecteur périodique de rang 1. Par le même raisonnement, on obtient le même résultat pour Ω_1^-, donc pour Ω_1. Si on applique le lemme de fermeture à un vecteur non errant de rang 1, l'orbite fermée est proche de ce vecteur. Comme l'ensemble des vecteurs de rang 1 est ouvert, l'orbite fermée est elle-même de rang 1, donc appartient à Ω_1. Le lemme de fermeture est par ceci valable en restriction à Ω_1.

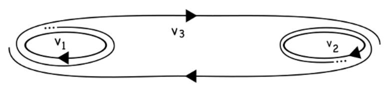
Soient v, w deux vecteurs dans T^1M proches l'un de l'autre, c et d les géodésiques qu'ils engendrent. Ces géodésiques ont chacune deux points en commun avec le bord à l'infini $\partial_\infty \widetilde{M}$: $c(-\infty)$ et $c(+\infty)$, respectivement $d(-\infty)$ et $d(+\infty)$. Si les vecteurs v, w sont assez proches, alors les points à l'infini de leurs géodésiques le sont aussi, par la définition de la métrique sur $\partial_\infty \widetilde{M}$. Le lemme 5.7 nous donne une géodésique de $d(-\infty)$ à $c(+\infty)$ engendrée par un vecteur w' proche de v et de w. Il est clair par la définition du bord à l'infini $\partial_\infty \widetilde{M}$ que, pour ce vecteur w', la distance $d(g_t(w), g_t(w'))$ est bornée pour les temps négatifs et que $d(g_t(v), g_t(w'))$ est bornée pour les temps positifs. Soient maintenant v et w dans Ω_1. Le vecteur w' est de rang 1 car proche de v et w, et car l'ensemble des vecteurs de rang 1 est ouvert. En plus, w' engendre une géodésique qui est négativement asymptote à w et positivement asymptote à v. Alors w' appartient à Ω_1, ce qui nous donne la structure de produit local recherchée. □

Avec ceci, nous pouvons enfin énoncer et démontrer le théorème de Coudène et Schapira :

Proposition 5.9 *Soit M une variété de rang 1. Supposons que le fibré tangent unitaire T^1M contient au moins trois géodésiques périodiques de rang 1. Alors le flot géodésique $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est transitif en restriction à Ω_1 (voir Th. 5.2 dans [CS10]).*

On vient de démontrer que les géodésiques périodiques de rang 1 appartiennent à l'ensemble Ω_1.

Démonstration. Soient U_1 et U_2 deux ensembles ouverts dans T^1M contenant des éléments de Ω_1. Pour démontrer la transitivité, nous construisons une trajectoire dans Ω_1 qui commence dans U_1 et aboutit dans U_2. Comme le choix des deux ensembles ouverts est arbitraire et par la structure de produit local, on peut recoller des morceaux de trajectoires pour obtenir une trajectoire telle que $g_t(v)$ est dense dans Ω_1.
D'après proposition 5.5, les vecteurs périodiques de rang 1 sont denses dans Ω_1. Il existe donc des vecteurs périodiques v_1 et v_2 de rang 1 tels que $v_1 \in U_1$ et $v_2 \in U_2$.
Premier cas. Supposons que v_2 n'est pas opposé à v_1 ou à un itéré de v_1, c'est-à-dire $-v_2 \notin \bigcup_{t\in\mathbb{R}} g_t(v_1)$. Alors il existe un vecteur v_3 de rang 1 dont la trajectoire est négativement asymptote à la trajectoire de v_1 et positivement asymptote à celle de v_2 (voir lemme 5.8). On veut démontrer que v_3 satisfait les propriétés nécessaires. Notons qu'on peut trouver de la même façon une trajectoire négativement asymptote à v_2 et positivement asymptote à v_1 (voir aussi la figure ci-dessous, de [CS10]). En utilisant la structure de produit local, nous pouvons coller ces deux orbites pour obtenir une trajectoire qui commence près de v_3, suit la deuxième orbite puis l'orbite de v_3, avant de revenir à v_3 lui-même. Ainsi, le vecteur v_3 appartient à l'ensemble non errant Ω. À cause du comportement asymptote à v_1 et v_2, il appartient à Ω_1, ce qu'il fallait démontrer.



Deuxième cas : Supposons que v_1 et v_2 engendrent des géodésiques opposées. On prend donc un troisième vecteur w de rang 1. En utilisant la structure de produit local, on recolle d'abord v_1 à w et w à v_2. Par la proposition 5.5, les deux orbites obtenues sont engendrées par des vecteurs dans Ω_1. On recolle ces deux orbites pour obtenir une trajectoire de U_1 à U_2 qui, elle aussi, est engendrée par un vecteur dans Ω_1. $\square$

Une variété riemannienne à courbure strictement négative est de rang 1, et tout vecteur non errant du fibré tangent unitaire est dans l'ensemble Ω_1 : $\Omega = \Omega_1$. Alors le théorème 4.5 est un cas spécial des théorèmes 5.5 et 5.9.

Références

[A67] Dmitri V. Anosov : *Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature.* Proc. Steklov Inst. Math. **90** (1967).

[BGS85] Werner Ballmann, Mikhael Gromov, Viktor Schroeder : *Manifolds of Nonpositive Curvature.* Boston ; Basel ; Stuttgart : Birkhäuser, 1985.

[B91] Alan Beardon : *An introduction to hyperbolic geometry.* Tim Bedford, Michael Keane, Caroline Series : Ergodic Theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces, 1-33. Oxford : Oxford University Press, 1991.

[C10] Yves Coudène : *Notes sur le flot géodésique en courbure négative ou nulle.* Notes de conférence, Tours 2010.

[CS10] Yves Coudène, Barbara Schapira : *Generic measures for hyperbolic flows on non-compact spaces.* Israel J. of Math. **178** (2010).

[D07] Françoise Dal'Bo : *Trajectoires géodésiques et horocycliques.* Les Ulis : EDP Sciences, Paris : CNRS Éditions, 2007.

[E72] Patrick B. Eberlein : *Geodesic flows on negatively curved manifolds. I.* Ann. of Math. (2) **95** (1972), 492-510.

[E96] Patrick B. Eberlein : *Geometry of nonpositively curved manifolds.* Chicago : The University of Chicago Press, 1996.

[H02] Boris Hasselblatt : *Hyperbolic Dynamical Systems.* Handbook of dynamical systems Vol. 1A, 239-319. Amsterdam : Elsevier Science, 2002.

[J02] Jürgen Jost : *Riemannian geometry and geometric analysis.* Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2002.

[K02] Gerhard Knieper : *Hyperbolic Dynamics and Riemannian Geometry.* Handbook of dynamical systems Vol. 1A, 453-545. Amsterdam : Elsevier Science, 2002.

[M91] Anthony Manning : *Dynamics of geodesic and horocycle flows on surfaces of constant negative curvature.* Tim Bedford, Michael Keane, Caroline Series : Ergodic Theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces, 71-90. Oxford : Oxford University Press, 1991.

[P06] Peter Petersen : *Riemannian Geometry.* New York : Springer Science+Business Media, 2006.

[PS70] Charles Pugh, Michael Shub : *The Ω-stability theorem for flows.* Invent. Math. **11** (1970), 150-158.