

# Laplaciens discrets et combinatoire

Sanjay RAMASSAMY

Sous la direction de Richard KENYON

3 octobre 2012

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Le théorème matrice-arbre de Kirchhoff</b>	<b>2</b>
1.1	Laplacien sur un graphe . . . . .	2
1.2	Théorème de Kirchhoff . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Interprétation combinatoire du déterminant du laplacien fibré vectoriel</b>	<b>3</b>
2.1	Le laplacien fibré vectoriel . . . . .	3
2.2	Cas d'un fibré unidimensionnel . . . . .	5
2.3	Cas d'un fibré bidimensionnel, avec une connexion dans $SL_2(\mathbb{C})$ . . . . .	6
2.4	Les arêtes prennent du poids : qu'est-ce que cela change ? . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Laminations sur un graphe surfacique</b>	<b>7</b>
3.1	Cas général . . . . .	7
3.2	Laminations sur une couronne . . . . .	8
3.3	Laminations sur une sphère à trois trous . . . . .	9
3.4	Questions ouvertes . . . . .	11

Le laplacien est un opérateur classique sur une surface de Riemann. Il a un analogue discret, défini dans le cadre des graphes. Pour des graphes finis, le laplacien discret est un endomorphisme en dimension finie : il peut être vu comme une matrice carrée. L'étude de ses mineurs, entamée par Kirchhoff au 19ème siècle, révèle une interprétation combinatoire, en termes d'arbres couvrants ou de structures analogues. Ceci a permis des avancées dans diverses directions, telles que l'étude théorique des réseaux électriques ou la construction de certaines courbes aléatoires sur des surfaces. Dans ce document, nous nous contentons d'évoquer quelques aspects de la connexion entre les laplaciens discrets et la combinatoire.

Après une présentation du laplacien discret et du théorème matrice-arbre de Kirchhoff dans la partie 1, on introduit dans la partie 2 les notions et résultats essentiels concernant le laplacien fibré vectoriel. La partie 3 traite de l'emploi de ce laplacien fibré vectoriel avec une connexion plate pour étudier les laminations des graphes de surfaces.

J'ai découvert ce sujet à l'occasion d'un stage avec Richard Kenyon. Je le remercie d'avoir bien voulu m'accueillir, m'expliquer ses idées et encadrer mes premiers pas dans la recherche en me proposant un sujet passionnant.

# 1 Le théorème matrice-arbre de Kirchhoff

## 1.1 Laplacien sur un graphe

Le laplacien est défini dans le continu par la formule  $\Delta = \overrightarrow{\text{div grad}}$ . On va le définir de manière analogue sur un graphe discret.

Soit  $G = (S, A)$  un graphe fini, où  $S$  désigne l'ensemble (fini) des sommets,  $A$  l'ensemble (fini) des arêtes. On note  $n = |S|$  et  $m = |A|$ .

**Définition 1.** Une **1-forme** sur  $G$  est une fonction (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) sur les arêtes orientées qui est antisymétrique sous l'action du changement d'orientation. On note  $\Lambda^1(G)$  l'ensemble des 1-formes sur  $G$ .

$\Lambda^1(G)$  est un espace vectoriel de dimension  $m$ . Si l'on fixe une orientation des arêtes, un élément de  $\Lambda^1(G)$  est simplement une fonction sur  $A$ . Si  $f$  est une 1-forme dont on connaît les valeurs pour une certaine orientation des arêtes, on en déduit la valeur de  $f$  pour n'importe quelle autre orientation par la propriété d'antisymétrie.

**Définition 2.** Le **gradient** sur  $G$  est l'application linéaire  $d : \mathbb{R}^S \rightarrow \Lambda^1(G)$  définie de la manière suivante : pour toute fonction  $f \in \mathbb{R}^S$  et pour toute arête  $a$  orientée de  $x$  vers  $y$ ,

$$(df)(a) = f(y) - f(x).$$

**Définition 3.** La **divergence** sur  $G$  est l'application linéaire  $d^* : \Lambda^1(G) \rightarrow \mathbb{R}^S$  définie de la manière suivante : pour toute 1-forme  $\omega$  et tout sommet  $s$ ,

$$(d^*\omega)(s) = \sum_{a=s' \rightarrow s} \omega(a),$$

où la somme est prise sur les arêtes orientées  $a$  qui pointent vers  $s$ .

**Définition 4.** Le **laplacien** sur  $G$  est l'endomorphisme  $\Delta : \mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^S$  défini par :

$$\Delta = d^*d.$$

On a l'expression suivante pour le laplacien d'une fonction  $f$  : pour tout sommet  $s$ ,

$$(\Delta f)(s) = \sum_{s' \sim s} [f(s) - f(s')],$$

où la somme est prise sur les voisins  $s'$  de  $s$  (si on a affaire à un multigraphe et que  $s'$  est relié à  $s$  par  $n$  arêtes, le terme  $f(s) - f(s')$  apparaîtra  $n$  fois dans la somme).

**Remarque 1.** En fait ici  $\Delta$  désigne l'opposé du laplacien usuel. Cela est dû à la convention adoptée pour définir la divergence. Nous passerons outre cela dans la suite et désignerons quand même par "laplacien" l'opérateur  $\Delta$ .

On confond  $\Delta$  avec sa matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^S$ . C'est une matrice symétrique à coefficients entiers. Plus précisément, si l'on définit  $Deg$  la matrice diagonale dont l'élément en position  $i$  est le degré du sommet  $i$ , et  $Adj$  la matrice d'adjacence du graphe  $G$  (dont l'élément en position  $(i, j)$  représente le nombre d'arêtes reliant  $i$  et  $j$ ), on a la relation :

$$\Delta = Deg - Adj.$$

On est en présence d'une matrice à coefficients entiers, tous les déterminants de ses sous-matrices sont aussi entiers, on peut donc se demander s'ils comptent certains objets combinatoires. Le plus ancien résultat en ce sens est le théorème "matrice-arbre" de Kirchhoff, datant de 1847.

## 1.2 Théorème de Kirchhoff

Le noyau de  $\Delta$  est constitué des fonctions  $f$  vérifiant la propriété suivante : pour tout sommet  $s$ ,  $f(s)$  est égal à la moyenne des  $f(s')$  pour  $s'$  voisin de  $s$ . De telles fonctions sont appelées **fonctions harmoniques**, toujours par analogie avec le cas continu. On montre aisément avec le principe du maximum que les fonctions harmoniques sur  $G$  sont les fonctions constantes sur chaque composante connexe de  $G$ . En particulier, si  $G$  est connexe, les fonctions harmoniques sont les fonctions constantes, et  $\Delta$  est de rang  $n - 1$ . Dans toute la suite,  $G$  sera considéré connexe, sauf mention explicite du contraire.

On définit le déterminant réduit  $\det'$  d'un endomorphisme comme étant le produit de ses valeurs propres non nulles. On montre aisément que  $\det' \Delta = n \cdot M_{i,j}$ , où  $M_{i,j}$  est le mineur en position  $(i, j)$  de  $\Delta$ , avec  $i$  et  $j$  quelconques.

**Définition 5.** Soit  $T$  un sous-graphe de  $G$ , i.e. un graphe d'ensemble de sommets  $S$  et d'ensemble d'arêtes inclus dans  $A$ . On dit que  $T$  est un **arbre couvrant** de  $G$  si  $T$  est connexe et sans cycle. On note  $\mathcal{T}(G)$  l'ensemble des arbres couvrants de  $G$ .

**Théorème 1** (Kirchhoff, [5]).

$$\frac{1}{n} \det' \Delta = M_{1,1} = |\mathcal{T}(G)|.$$

La preuve repose sur la factorisation  $\Delta = d^* d$  (où l'on remarque que  $d^*$  est l'adjoint de  $d$ ) et sur le résultat suivant :

**Théorème 2** (Formule de Cauchy-Binet). Soit  $A$  une matrice rectangulaire de taille  $n * m$  et  $B$  une matrice rectangulaire de taille  $m * n$ . Alors :

$$\det(AB) = \sum_{\substack{I \subset [1, m] \\ |I|=n}} \det(A_I B_I),$$

où  $A_I$  (resp.  $B_I$ ) désigne la matrice construite à partir de  $A$  (resp.  $B$ ) en gardant uniquement les colonnes (resp. lignes) de  $A$  (resp.  $B$ ) dont l'indice est dans  $I$ .

On déduit du théorème de Kirchhoff la formule de Cayley :

**Théorème 3** (Formule de Cayley). Le nombre d'arbres étiquetés à  $n$  sommets est égal à  $n^{n-2}$ .

Pour la preuve, il suffit d'observer qu'il s'agit du nombre d'arbres couvrants du graphe complet à  $n$  sommets et d'appliquer le théorème de Kirchhoff.

Jusqu'à présent, les graphes que nous avons considérés sont définis abstraitement, ils ne sont pas plongés sur une surface. Pour étudier certaines propriétés géométriques de graphes dessinés sur des surfaces, nous allons introduire des concepts issus de la géométrie, comme les fibrés vectoriels et les connexions, et déduire des résultats semblables au théorème de Kirchhoff.

## 2 Interprétation combinatoire du déterminant du laplacien fibré vectoriel

### 2.1 Le laplacien fibré vectoriel

Soit  $E$  un espace vectoriel (réel ou complexe). On définit au-dessus de chaque sommet  $s$  un espace  $E_s$  isomorphe à  $E$ . De même, au-dessus de chaque arête  $a$ , on définit un espace  $E_a$

isomorphe à  $E$ . On dispose à l'arrivée d'un fibré vectoriel

$$E_G := \left( \bigoplus_{s \in S} E_s \right) \oplus \left( \bigoplus_{a \in A} E_a \right),$$

où  $\bigoplus_{s \in S} E_s$  est le **fibré des sommets** et  $\bigoplus_{a \in A} E_a$  est le **fibré des arêtes**.

On munit le fibré d'une **connexion**  $\Phi$  : ce sont des isomorphismes de type  $\phi_{sa} : E_s \rightarrow E_a$ ,  $\phi_{as} : E_a \rightarrow E_s$  et  $\phi_{ss'} : E_s \rightarrow E_{s'}$  (où  $s$  et  $s'$  sont des sommets reliés par l'arête  $a$ ) qui vérifient de plus les conditions suivantes :

- pour tout sommet  $s$  et arête  $a$  contenant  $s$ ,  $\phi_{as} = (\phi_{sa})^{-1}$  ;
- pour toute arête  $a = ss'$ ,  $\phi_{ss'} = \phi_{as'} \circ \phi_{sa}$ .

On en déduit notamment que  $\phi_{ss'} = (\phi_{s's})^{-1}$ . Ces isomorphismes portent le nom de **transport parallèle**. On peut à présent étendre les définitions de la partie précédente.

**Définition 6.** Une **1-forme** sur  $(G, \Phi)$  est une fonction sur les arêtes orientées à valeurs dans  $\bigcup_{a \in A} E_a$ , qui est antisymétrique sous l'action du changement d'orientation et telle que l'image d'une arête  $a$  soit dans l'espace  $E_a$  au-dessus de  $a$ . On note  $\Lambda^1(G, \Phi)$  l'ensemble des 1-formes sur  $(G, \Phi)$ .

$\Lambda^1(G, \Phi)$  est un espace vectoriel de dimension  $m \cdot \dim(E)$ . Si l'on fixe une orientation des arêtes, un élément de  $\Lambda^1(G, \Phi)$  est une section du fibré des arêtes, *i.e.* un élément de  $\bigoplus_{a \in A} E_a$ , qui est isomorphe à l'espace des fonctions de  $A$  dans  $E$ .

**Définition 7.** Une **0-forme** sur  $(G, \Phi)$  est une section du fibré des sommets, c'est-à-dire un élément de  $\bigoplus_{s \in S} E_s$ . On note  $\Lambda^0(G, \Phi)$  l'espace des 0-formes sur  $(G, \Phi)$ .

Remarquons que  $\Lambda^0(G, \Phi)$  est isomorphe à l'espace des fonctions de  $S$  dans  $E$ . Si  $f$  est dans  $\Lambda^0(G, \Phi)$  et si  $s$  est un sommet on écrira donc  $f(s)$  pour désigner la composante selon  $E_s$  de  $f$ . Par abus de langage, on qualifiera quelquefois  $f$  de "fonction de  $S$  dans  $E$ ".

**Définition 8.** Le **gradient** sur  $(G, \Phi)$  est l'application linéaire  $d : \Lambda^0(G, \Phi) \rightarrow \Lambda^1(G, \Phi)$  définie de la manière suivante : pour tout  $f \in \Lambda^0(G, \Phi)$  et pour toute arête  $a$  orientée de  $x$  vers  $y$ ,

$$(df)(a) = \phi_{ya}f(y) - \phi_{xa}f(x).$$

**Définition 9.** La **divergence** sur  $(G, \Phi)$  est l'application linéaire  $d^* : \Lambda^1(G, \Phi) \rightarrow \Lambda^0(G, \Phi)$  définie de la manière suivante : pour toute 1-forme  $\omega$  et tout sommet  $s$ ,

$$(d^*\omega)(s) = \sum_{a=s' \rightarrow s} \phi_{as}\omega(a),$$

où la somme est prise sur les arêtes orientées  $a$  qui pointent vers  $s$ .

**Définition 10.** Le **laplacien fibré vectoriel** sur  $(G, \Phi)$  est l'endomorphisme  $\Delta$  de  $\Lambda^0(G, \Phi)$  défini par :

$$\Delta = d^*d.$$

En combinant les définitions ci-dessus avec les propriétés des transports parallèles, on a l'expression suivante pour le laplacien d'une fonction  $f$  : pour tout sommet  $s$ ,

$$(\Delta f)(s) = \sum_{s' \sim s} [f(s) - \phi_{s's}f(s')],$$

où la somme est prise sur les voisins  $s'$  de  $s$ . Notons que cette expression est ambiguë dans le cas d'un multigraphe, il faudrait préciser pour chaque terme quelle arête, et donc quel transport parallèle, on utilise pour passer de  $s$  à  $s'$ .

**Remarque 2.** Dans le cas où  $E = \mathbb{R}$  et que le fibré est trivial (à savoir tous les transports parallèles valent l'identité), on retombe sur la définition du laplacien de la partie précédente.

## 2.2 Cas d'un fibré unidimensionnel

Introduisons à présent l'objet combinatoire qui va jouer dans la suite le rôle tenu par les arbres couvrants dans le théorème de Kirchhoff.

**Définition 11.** Un *unicycle* est un graphe connexe ayant autant de sommets que d'arêtes.

C'est donc un arbre auquel on a ajouté une arête : un unicycle comporte, comme son nom l'indique, un unique cycle.

**Définition 12.** Soit  $F$  un sous-graphe de  $G = (S, A)$ , i.e. un graphe d'ensemble de sommets  $S$  et d'ensemble d'arêtes inclus dans  $A$ . On dit que  $F$  est une **forêt couvrante d'unicycles** (abrégée en **FCU**) de  $G$  si chaque composante connexe de  $F$  est un unicycle.

La connexion va intervenir dans les résultats à suivre *via* la notion de monodromie :

**Définition 13.** Soit  $C = s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_k \rightarrow s_1$  un cycle (orienté) dans  $(G, \Phi)$ , de point de départ  $s_1$ . La **monodromie** de  $C$  est le produit  $\phi_{s_1 s_2} \phi_{s_2 s_3} \dots \phi_{s_k s_1}$  des transports parallèles le long du cycle.

Changer le point de départ du cycle revient à conjuguer la monodromie. Renverser l'orientation du cycle revient à inverser la monodromie.

On peut à présent énoncer un premier résultat analogue au théorème de Kirchhoff, dû à Forman ([2]). Observons que si le fibré est de dimension 1 ( $E = \mathbb{C}$ ), les transports parallèles sont des isomorphismes de  $\mathbb{C}$ , donc assimilables à des nombres complexes non nuls.

**Théorème 4.** Pour un graphe  $G$  connexe et un fibré de dimension 1,

$$\det \Delta = \sum_{F \text{ FCU}} \prod_{\text{cycles de } F} \left(2 - w - \frac{1}{w}\right),$$

où la somme est prise sur les FCU  $F$ , le produit est pris sur les cycles non orientés  $C$  de  $F$ , et  $w$  et  $1/w$  désignent les monodromies des deux orientations possibles de  $C$ .

**Remarque 3.** Pour un fibré unidimensionnel, la monodromie d'un cycle orienté ne dépend pas du point de base, donc il n'y a pas d'ambiguïté dans la formule ci-dessus.

La preuve consiste à développer  $\Delta = d^*d$  par la formule de Cauchy-Binet, à identifier les termes non nuls comme représentant des FCU et à calculer ces termes à l'aide de la définition du déterminant à base de permutations et signatures.

## 2.3 Cas d'un fibré bidimensionnel, avec une connexion dans $SL_2(\mathbb{C})$

Lorsque le fibré est complexe de dimension 2, la matrice du laplacien fibré vectoriel  $\Delta$  a pour coefficients des isomorphismes de  $\mathbb{C}^2$ , c'est-à-dire des matrices de  $GL_2(\mathbb{C})$ . La définition usuelle du déterminant ne s'applique plus pour  $\Delta$ , car les coefficients sont des matrices qui ne commutent pas. Nous allons définir un analogue du déterminant pour une certaine catégorie de matrices.

Si  $X \in GL_2(\mathbb{C})$ , notons  $\tilde{X}$  la transposée de la comatrice de  $X$ . Observons que si  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , alors  $\tilde{X} = (\det X)X^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

**Définition 14.** Soit  $M$  une matrice à coefficients dans  $GL_2(\mathbb{C})$ . On dit que  $M$  est **autoduale** si pour tous  $i$  et  $j$ ,  $M_{ij} = \widetilde{M_{ji}}$ .

Il est possible de procéder à la construction suivante lorsque  $M$  est une matrice autoduale  $n \times n$  (à coefficients dans  $GL_2(\mathbb{C})$ ). Notons  $M'$  la matrice  $2n \times 2n$  obtenue à partir de  $M$  en remplaçant chaque coefficient de  $M$  par le bloc  $2 \times 2$  correspondant. Notons  $Z$  la matrice  $2n \times 2n$  diagonale par blocs, dont les  $n$  blocs sont égaux à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Donnons enfin la définition du pfaffien :

**Définition 15.** Si  $A$  est une matrice  $2n \times 2n$  antisymétrique, alors le **pfaffien** de  $A$  est la quantité

$$\text{Pf}(A) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma \in S_{2n}} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}$$

où  $\text{sgn}(\sigma)$  désigne la signature de  $\sigma$ .

En observant que  $ZM'$  est antisymétrique, on peut définir le quasi-déterminant de la manière suivante :

**Définition 16.** Le **quasi-déterminant** de  $M$  est la quantité

$$\text{Qdet}(M) = \text{Pf}(ZM').$$

Revenons à l'étude du laplacien fibré vectoriel et restreignons-nous dans la suite du paragraphe à des connexions dans  $SL_2(\mathbb{C})$ . Observons que  $\Delta$  est alors autoduale. En effet, ses coefficients diagonaux sont des matrices scalaires, qui sont bien autoduales, et ses coefficients hors de la diagonale sont  $\Delta_{ij} = -\phi_{ij}$ , donc

$$\Delta_{ji} = -\phi_{ji} = -\phi_{ij}^{-1} = -\frac{1}{\det \phi_{ij}} \widetilde{\phi_{ij}} = -\widetilde{\phi_{ij}} = \widetilde{\Delta_{ij}}.$$

Énonçons à présent une extension du théorème 4, due à Kenyon [3] :

**Théorème 5.** Pour un graphe  $G$  connexe et un fibré complexe de dimension 2 avec une connexion dans  $SL_2(\mathbb{C})$ ,

$$\text{Qdet} \Delta = \sum_F \prod_{\text{cycles de } F} (2 - \text{Tr } w),$$

où la somme est prise sur les FCU  $F$ , le produit est pris sur les cycles non orientés  $C$  de  $F$ , et  $\text{Tr } w$  désigne la trace de la monodromie du cycle  $C$  (indépendante du choix de l'orientation de  $C$ ).

La preuve est similaire à celle du théorème de Forman. Elle repose d'une part sur une version non commutative de la formule de Cauchy-Binet, d'autre part sur une expression du quasi-déterminant à l'aide d'une formule ressemblant beaucoup à la définition du déterminant (classique).

## 2.4 Les arêtes prennent du poids : qu'est-ce que cela change ?

Généralisons les résultats précédents aux graphes pondérés. À chaque arête  $a$  du graphe on associe un **poids** (ou conductance)  $C_a > 0$ .

Ceci permet de voir un graphe comme un réseau de résistances : l'arête  $a$  représente une résistance de valeur  $\frac{1}{C_a}$ . On peut alors utiliser les équivalences connues entre résistances en série, en parallèle, ou en configuration triangle/étoile, pour transformer un graphe complexe en un graphe plus simple.

Avec l'introduction de ces poids, le laplacien est défini par la formule  $\Delta = d^*Cd$ , où  $C$  est la matrice diagonale des conductances. Pour un graphe sans arêtes multiples, le laplacien classique vaut alors

$$(\Delta f)(s) = \sum_{s' \sim s} C_{ss'} [f(s) - f(s')]$$

et le laplacien fibré vectoriel devient

$$(\Delta f)(s) = \sum_{s' \sim s} C_{ss'} [f(s) - \phi_{s's} f(s')].$$

Si  $G'$  est un sous-graphe de  $G$ , on définit le poids  $C(G')$  de  $G'$  comme étant le produit des poids des arêtes de  $G'$ .

Les théorèmes de Kirchhoff, Forman et Kenyon deviennent alors :

**Théorème 6.**

$$\frac{1}{n} \det' \Delta = M_{1,1} = \sum_{T \in \mathcal{T}(G)} C(G).$$

**Théorème 7.** *Pour un graphe  $G$  connexe et un fibré de dimension 1,*

$$\det \Delta = \sum_F \prod_{FCU \text{ cycles de } F} C(F) \left(2 - w - \frac{1}{w}\right).$$

**Théorème 8.** *Pour un graphe  $G$  connexe et un fibré complexe de dimension 2 avec une connexion dans  $SL_2(\mathbb{C})$ ,*

$$\text{Qdet} \Delta = \sum_F \prod_{FCU \text{ cycles de } F} C(F) (2 - \text{Tr } w).$$

Les preuves sont une réécriture de celles dans le cas où il n'y a pas de poids.

## 3 Laminations sur un graphe surfacique

### 3.1 Cas général

Soit  $\Sigma$  une surface orientée, qui peut avoir une frontière. On suppose dans la suite qu'il existe un plongement de  $G$  dans  $\Sigma$  tel que les composantes connexes de  $\Sigma \setminus G$  soient ou bien

contractiles (ces composantes connexes seront appelées **faces**) ou bien un voisinage annulaire d'une composante connexe de la frontière de  $\Sigma$ . Le couple  $(G, \Sigma)$  est alors appelé un **graphe surfacique**.

La définition de graphe surfacique implique notamment que chaque composante connexe de la frontière de  $\Sigma$  est entourée par un cycle dans  $G$ .

Jusqu'à présent, les résultats que nous avons énoncés étaient valables pour des connexions quelconques. Nous allons maintenant choisir des connexions appropriées pour représenter des propriétés géométriques de la surface. Ici nous allons nous intéresser aux classes d'homotopie des lacets, mais on aurait également pu étudier l'effet de la courbure de la surface, avec la connexion de Levi-Civita.

**Définition 17.** *La connexion  $\Phi$  est dite **plate** si la monodromie autour de chaque face est triviale.*

**Remarque 4.** *Dans le cas d'une connexion plate, la monodromie d'un cycle ne dépend que de la classe d'homotopie de celui-ci.*

**Définition 18.** *Une FCU est dite **incompressible** si aucun de ses cycles n'est topologiquement trivial.*

Dans toute la suite, les connexions seront supposées plates. Dans ce cas, les FCU incompressibles sont les seules à pouvoir avoir une contribution non nulle au déterminant (classique ou quasi-) du laplacien fibré vectoriel.

**Définition 19.** *Une **lamination finie** de  $\Sigma$  est (la classe d'isotopie d') un ensemble fini de lacets simples deux à deux disjoints, tel que chaque lacet ait une classe d'homotopie non triviale. Deux lacets de la lamination peuvent être isotopes.*

On dira qu'une FCU  $F$  induit la lamination  $L$  si la réunion des cycles de  $F$  appartient à  $L$ . Notons que seule une FCU incompressible peut induire une lamination de  $\Sigma$ .

Le théorème 8 se réécrit en termes de laminations sous la forme :

$$\text{Qdet}\Delta = \sum_{L \text{ laminations}} c_L \prod_{\text{cycles de } L} (2 - \text{Tr } w),$$

où  $c_L$  est la somme des poids des FCU incompressibles induisant la lamination  $L$ . Dans le cas où toutes les arêtes sont de poids unité,  $c_L$  est le nombre de telles FCU.

Un résultat de Fock et Goncharov (voir [1]) stipule que l'on peut extraire n'importe quel coefficient  $c_L$  en faisant varier la connexion plate  $\Phi$ .

### 3.2 Laminations sur une couronne

Dans ce paragraphe,  $\Sigma$  est une couronne. Les laminations de  $\Sigma$  sont indexées par  $k \geq 1$  : ce sont les familles de  $k$  lacets simples disjoints faisant un tour autour du trou central.

Comme le groupe fondamental de  $\Sigma$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble des monodromies forme un sous-groupe  $H$  de  $SL_2(\mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Ce sous-groupe  $H$  a les mêmes traces qu'un autre sous-groupe  $H'$  de  $SL_2(\mathbb{C})$  constitué de matrices diagonales et isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Comme  $H'$  est caractérisé par un unique nombre complexe non nul, on peut donc supposer dans le cas d'une couronne que le fibré est de dimension 1.

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  la monodromie d'un cycle autour du trou central. On construit concrètement une telle connexion plate en mettant l'identité comme transport parallèle sur toutes les arêtes, sauf sur certaines arêtes disposées en fermeture éclair entre la frontière intérieure et la frontière extérieure de  $\Sigma$ , sur lesquelles on met  $z$  comme transport parallèle (voir figure 1).

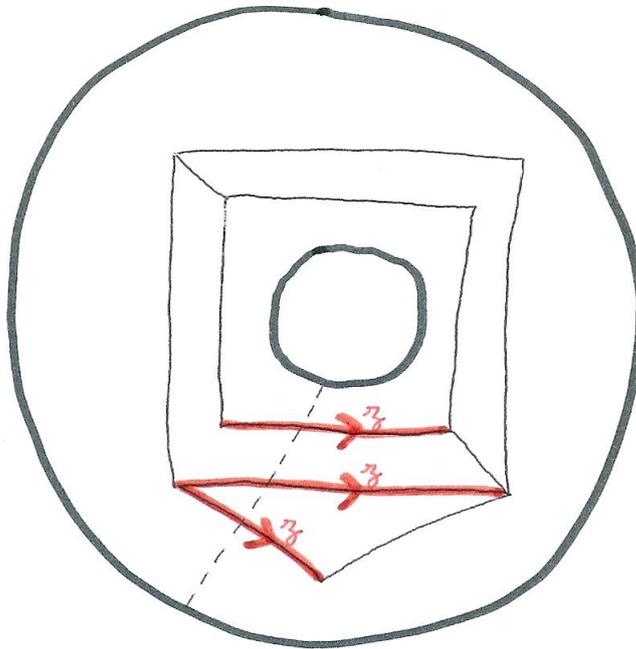


FIGURE 1 – Connexion plate pour un graphe sur une couronne

Alors, le déterminant de  $\Delta$  est un polynôme de Laurent en  $z$  noté  $P(z)$ . Kenyon a prouvé le résultat suivant concernant  $P$  (voir [4]) :

**Théorème 9.** *Le polynôme  $P$  est réciproque et ses racines sont toutes réelles et strictement positives.  $P$  admet une racine double en 1, toutes les autres sont simples.*

La preuve repose sur des réductions de réseaux électriques plongés dans le revêtement universel de  $\Sigma$ .

### 3.3 Laminations sur une sphère à trois trous

Nous aimerions maintenant étendre le théorème précédent au cas où  $\Sigma$  est une sphère à trois trous. Cette fois le fibré est bien bidimensionnel et la connexion est dans  $SL_2(\mathbb{C})$ . La sphère à trois trous est le cas le plus simple où la connexion est non commutative.

Notons  $a, b$  et  $c$  les trois trous.  $a$  (resp.  $b, c$ ) désignera alternativement le trou ou la frontière de celui-ci. Soit  $u, v$  et  $w$  les monodromies respectives autour de  $a, b$  et  $c$ . Alors  $uvw = 1$ , et c'est la seule relation liant les monodromies, car le groupe fondamental de  $\Sigma$  est le groupe libre à deux générateurs (voir figure 2).

Tout lacet est soit trivial, soit homotope à la frontière de l'un des trous. Une lamination est donc représentée par un triplet d'entiers naturels  $(i, j, k) \neq (0, 0, 0)$  :  $i$  lacets homotopes à  $a$ ,  $j$  lacets homotopes à  $b$  et  $k$  lacets homotopes à  $c$ .

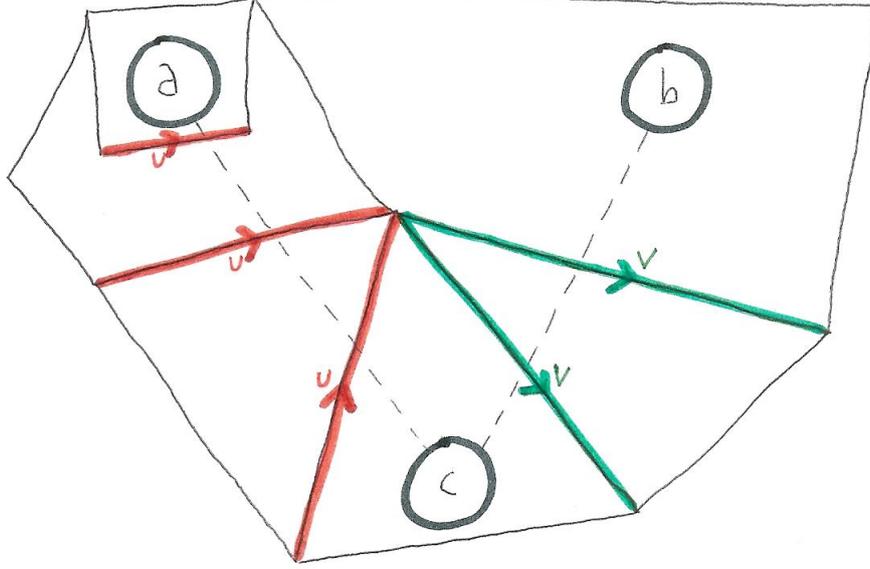


FIGURE 2 – Connexion plate pour un graphe sur une sphère à trois trous

Notons  $X = 2 - \text{Tr}(a)$ ,  $Y = 2 - \text{Tr}(b)$  et  $Z = 2 - \text{Tr}(c) = 2 - \text{Tr}(ab)$ . On peut montrer que  $X, Y$  et  $Z$  sont algébriquement indépendants. Alors, d'après la remarque consécutive à la définition 19,

$$P(X, Y, Z) := \text{Qdet} \Delta = \sum_{F \text{ FCU incompressibles}} X^i Y^j Z^k,$$

où  $(i, j, k)$  décrit la lamination induite par  $F$ . Autrement dit,

$$P(X, Y, Z) = \sum_{\substack{i, j, k \geq 0 \\ (i, j, k) \neq (0, 0, 0)}} n_{ijk} X^i Y^j Z^k,$$

où  $n_{ijk}$  est le nombre de FCU incompressibles induisant  $(i, j, k)$ . Peut-on trouver un analogue au théorème 9 et caractériser tous les  $P(X, Y, Z)$  qui sont associés à un graphe sur  $\Sigma$  ?

Soit  $G$  un graphe tel que  $(G, \Sigma)$  soit un graphe surfacique.

Nous appellerons dans la suite “face” toute composante connexe de  $\Sigma \setminus G$ , qu'elle soit contractile ou non, changeant ainsi la convention adoptée dans le paragraphe précédent.

Définissons une distance  $\rho$  entre faces. On veut que deux faces ayant un sommet commun soient à distance 1. On considère le graphe dual  $G^*$ , auquel on ajoute des arêtes duales de telle sorte que deux faces ayant un sommet commun soient adjacentes : cela définit un graphe  $\widetilde{G}^*$ .  $\rho$  est alors définie comme la distance usuelle sur le graphe  $\widetilde{G}^*$ .

Soit  $\rho_{ab}$  la distance  $\rho$  entre les voisinages annulaires de  $a$  et de  $b$ . On définit de même  $\rho_{ac}$  et  $\rho_{bc}$ .

Soit  $I$  (resp.  $J, K$ ) le nombre maximal de cycles simples disjoints que l'on peut dessiner autour de  $a$  (resp.  $b, c$ ).

**Proposition 1** ([6]). *On peut dessiner sur  $G$  la lamination  $(i, j, k)$  si et seulement si les six conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $i \leq I$  ;

- (ii)  $j \leq J$  ;
- (iii)  $k \leq K$  ;
- (iv)  $j + k \leq \rho_{bc}$  ;
- (v)  $i + k \leq \rho_{ac}$  ;
- (vi)  $i + j \leq \rho_{ab}$ .

**Définition 20.** Si  $Q$  est un polynôme à trois variables,  $Q(X, Y, Z) = \sum_{i,j,k} c_{ijk} X^i Y^j Z^k$ , on appelle **support** de  $Q$  l'ensemble

$$\text{Supp}(Q) := \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 \mid c_{ijk} \neq 0\}.$$

**Remarque 5.** Les six équations de la proposition précédente caractérisent  $\text{Supp}(P)$ , et montrent que celui-ci est convexe.

Nous voulons à présent trouver tous les supports possibles des polynômes qui apparaissent lorsque  $G$  varie. D'après la proposition précédente, cela revient à caractériser l'image de l'application  $\Psi$  qui va de l'ensemble des graphes surfaciques sur  $\Sigma$  dans  $\mathbb{N}^6$ , et qui à un graphe surfacique  $G$  associe le sextuplet  $(I, J, K, \rho_{bc}, \rho_{ac}, \rho_{ab})$ . Notons que ces six quantités sont des caractéristiques géométriques simples de  $G$ , ne faisant plus appel à la notion de laplacien.

**Théorème 10** ([6]). Soit  $\tau = (I, J, K, \rho_{bc}, \rho_{ac}, \rho_{ab}) \in \mathbb{N}^6$ . Il existe un graphe surfacique  $G$  tel que  $\tau = \Psi(G)$  si et seulement si les douze conditions suivantes sont vérifiées :

- (1)  $\rho_{bc} \leq \rho_{ac} + \rho_{ab}$  ;
- (1')  $\rho_{ac} \leq \rho_{ab} + \rho_{bc}$  ;
- (1'')  $\rho_{ab} \leq \rho_{bc} + \rho_{ac}$  ;
- (2)  $1 \leq I \leq \min(\rho_{ac}, \rho_{ab})$  ;
- (2')  $1 \leq J \leq \min(\rho_{ab}, \rho_{bc})$  ;
- (2'')  $1 \leq K \leq \min(\rho_{bc}, \rho_{ac})$  ;
- (3)  $\rho_{bc} \leq J + K$  ;
- (3')  $\rho_{ac} \leq K + I$  ;
- (3'')  $\rho_{ab} \leq I + J$  ;
- (4)  $\min(\rho_{ab} - J, \rho_{ac} - K) + \lfloor \frac{J+K-\rho_{bc}}{2} \rfloor \leq I$  ;
- (4')  $\min(\rho_{bc} - K, \rho_{ab} - I) + \lfloor \frac{K+I-\rho_{ac}}{2} \rfloor \leq J$  ;
- (4'')  $\min(\rho_{ac} - I, \rho_{bc} - J) + \lfloor \frac{I+J-\rho_{ab}}{2} \rfloor \leq K$ .

### 3.4 Questions ouvertes

Nous aimerions par la suite pouvoir caractériser complètement les polynômes  $P(X, Y, Z)$  qui apparaissent dans le cas de la sphère à trois trous, pour avoir l'analogie exact du théorème 9.

On peut aussi se poser des questions similaires : que se passe-t-il pour les graphes surfaciques dessinés sur une sphère à  $n$  trous ? Sur un tore avec un trou ? Sur un ruban de Moebius ?

On pourrait également chercher une extension des théorèmes 4 et 5, pour trouver une signification à un fibré tridimensionnel.

## Références

- [1] V. Fock, A. Goncharov, Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory. Pub. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 103 (2006), 1-211.
- [2] R. Forman, Determinants of Laplacians on graphs. Topology 32 (1993), no. 1, 35-46.
- [3] R. Kenyon, Spanning forests and the vector bundle laplacian. Annals of Probability (2011), Vol. 39, No. 5, 1983-2017.
- [4] R. Kenyon, The Laplacian on planar graphs and graphs on surfaces. arXiv :1203.1256v1
- [5] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Ann. Phys. Chem. (1847) 72, 497-508.
- [6] S. Ramassamy, Laminations sur une sphère à trois trous. Manuscrit.