

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Feuilletages : Définition et premières propriétés</b>	<b>5</b>
1.1	Définitions . . . . .	5
1.2	Champs de $p$ -plans . . . . .	7
1.3	Orientation transverse . . . . .	8
1.4	Revêtement double d'orientation . . . . .	9
1.5	Autres propriétés . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Exemples</b>	<b>13</b>
2.1	Submersions . . . . .	13
2.2	Champs de vecteurs sans points singuliers . . . . .	14
2.3	Fibrations . . . . .	14
2.4	Pull-backs . . . . .	16
2.5	Actions de groupes . . . . .	16
2.6	Actions de groupes de Lie . . . . .	17
2.7	Feuilletage de Reeb de $S^3$ . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Théorème de Frobenius</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Propriétés topologiques des feuilles</b>	<b>25</b>
4.1	Cartes distinguées et lemmes techniques . . . . .	25
4.2	Quelques propriétés topologiques . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Holonomie et théorèmes de stabilité</b>	<b>31</b>
5.1	Systèmes cohérents de cartes . . . . .	31
5.2	Holonomie . . . . .	36
5.2.1	Germes d'applications . . . . .	36
5.2.2	Holonomie d'une feuille . . . . .	37
5.3	Stabilité locale . . . . .	40
5.4	Stabilité globale . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Théorème de Novikov</b>	<b>49</b>
6.1	Énoncé et idée de la preuve . . . . .	49
6.1.1	Énoncé . . . . .	49
6.1.2	Idée de la preuve . . . . .	49

6.2	Démonstration . . . . .	50
6.2.1	Existence d'un vanishing cycle . . . . .	50
6.2.2	Extensions cohérentes normales . . . . .	56
6.2.3	Extensions cohérentes simples . . . . .	58
6.2.4	Existence d'une feuille compacte . . . . .	61
6.2.5	Conclusion de la preuve . . . . .	69
<b>Annexe A Feuilletages du disque et construction de Hæfliger</b>		<b>72</b>
A.1	Singularités d'applications à valeurs réels . . . . .	72
A.2	Feuilletages singuliers du disque . . . . .	73
A.2.1	Définitions . . . . .	73
A.2.2	Feuilletages singuliers du disque et champs de vecteurs . .	74
A.3	Construction de Hæfliger . . . . .	80
A.4	Construction de la région $R$ d'holonomie triviale . . . . .	83
<b>Annexe B Théorème de Poincaré-Bendixson</b>		<b>85</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>86</b>

# Table des figures

1.1	Parcours de plaques . . . . .	11
4.1	Carte distinguée . . . . .	25
4.2	Exemple de charte distinguée ne vérifiant pas le lemme 4.1.2 . . . . .	26
4.3	Exemple de chaîne en $x$ de longueur $m$ . . . . .	27
5.1	Petite explication du théorème 5.1.1 . . . . .	32
5.2	Exemple de calcul d'un groupe d'holonomie . . . . .	40
6.1	Cas $\alpha$ non fermée . . . . .	51
6.2	Comment obtenir une courbe transverse à partir de $\alpha$ . . . . .	52
6.3	Cas malheureux . . . . .	55
6.4	Cas malheureux : continuation . . . . .	56
6.5	Construction du paramétrage $t = t(\alpha, x)$ . . . . .	58
6.6	Disposition de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ . . . . .	62
6.7	Cas $\mathcal{F}$ transversalement orientable : construction de $\gamma$ . . . . .	62
6.8	Cas $\mathcal{F}$ transversalement orientable : construction de $\mu$ . . . . .	63
6.9	Cas $\mathcal{F}$ non transversalement orientable : cas possibles de disposition de $\ell$ par rapport à trois points successifs de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ . . . . .	63
6.10	Cas $s_{n-1} < t_n < s_n$ , c'est à dire $q_n < p_n$ dans $\gamma$ . . . . .	66
6.11	Construction de $K_n$ . . . . .	67
6.12	Construction de $\bar{\gamma}$ . . . . .	68
6.13	Situation autour de la feuille compacte $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . . . . .	69
6.14	La courbe piégée . . . . .	70
A.1	Petite dessin des types de singularité, cas $n = 3$ : . . . . .	75
A.2	Cas de cycle limite qui est un graphe . . . . .	78
A.3	Seules façons possibles pour que la suite $p_n$ converge vers $q$ . . . . .	79
A.4	Si $\Gamma_\infty$ contient une selle, il contient au moins deux séparatrices . . . . .	80
A.5	Quelque exemples de régions $R(\Gamma)$ possibles . . . . .	84



# Chapitre 1

## Feuilletages : Définition et premières propriétés

### 1.1 Définitions

On Considérera toujours une  $n$ -variété différentielle  $M$  de classe  $C^r$ , avec  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$ . On fixe  $0 \leq p \leq n$  un entier.

**Définition 1.1.1.** Un *atlas de cartes feuilletées* de dimension  $p$  et de classe  $C^k$ ,  $k \leq r$ , sur  $M$  est un atlas  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  de classe  $C^k$  sur  $M$  tel que :

- on a  $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V \times T$  pour tout  $\alpha \in A$ , avec  $V \subseteq \mathbb{R}^p$  et  $T \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$  ouverts
- on a des changements de coordonnées du type

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x, y) \mapsto (f_{\alpha, \beta}(x, y), g_{\alpha, \beta}(y))$$

pour tout  $\alpha, \beta \in A$  et pour tout  $(x, y) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

Un *feuilletage*  $\mathcal{F}$  de dimension  $p$  et de classe  $C^k$  sur  $M$  est un atlas *maximal* de cartes feuilletées de dimension  $p$  et de classe  $C^k$ . Si  $M$  est de dimension  $n$ , on appelle l'entier  $n - p$  la *codimension* du feuilletage. Une *variété feuilletée* de classe  $C^k$  est une couple  $(M, \mathcal{F})$ , où  $M$  est une variété  $C^r$  et  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^k$  sur  $M$ .

On remarque que si  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  est une carte feuilletée  $C^k$  alors  $\varphi^{-1} : V \times \{y\} \rightarrow U$  est un *plongement* pour tout  $y \in T$ ; de même pour  $\varphi^{-1} : \{x\} \times T \rightarrow U$ ,  $x \in V$ .

On introduit encore quelques notations.

**Définition 1.1.2.** Si  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  est une carte locale d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  alors les sous-variétés de classe  $C^k$  de  $U$  données par  $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$  sont appelés les *feuilles locales*, ou *plaques locales*, de  $\mathcal{F}$  dans cette carte. Les sous-variétés

## 6 CHAPITRE 1. FEUILLETAGES : DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

$\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$  sont les *transverses locales* de  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1.1.3.** *Les feuilles locales sont indépendantes des cartes, dans le sens suivant : si  $(U, \varphi), (U', \varphi')$  sont deux cartes feuilletées de  $\mathcal{F}$  et si  $x, y \in U \cap U'$ , alors  $x, y$  sont dans une même feuille locale pour la carte  $(U, \varphi)$  si et seulement s'ils le sont pour la carte  $(U', \varphi')$ .*

*Cela suit directement de la définition du feuilletage. Supposons par exemple  $x, y \in \varphi^{-1}(V \times \{t\})$ , où  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  et  $t \in T$ . On aura donc  $x = \varphi^{-1}(x', t)$ ,  $y = \varphi^{-1}(y', t)$ , pour  $x', y' \in V$  convenables.*

Alors :

$$\varphi'(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(x', t)) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x', t) = (f(x', t), g(t))$$

où  $f, g$  sont des fonctions données par l'atlas de cartes feuilletées.

De même :

$$\varphi'(y) = \varphi'(\varphi^{-1}(y', t)) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(y', t) = (f(y', t), g(t))$$

*On voit donc que  $x, y \in \varphi'^{-1}(V' \times (g(t)))$ , où l'on a supposé  $\varphi' : U' \rightarrow V' \times T'$ . Ici  $f$  est à valeurs dans  $V'$ , et  $g$  à valeurs dans  $T'$ .*

*Réciproquement, avec un raisonnement similaire, si  $x, y$  sont dans des feuilles locales différent selon  $\varphi$  alors le même est vrai pour  $\varphi'$ .*

*On peut dire que la définition du feuilletage  $\mathcal{F}$  est donnée afin que les feuilles locales soient bien définie, c'est à dire indépendantes de la carte locale choisie.*

*On remarque en passant que deux feuilles locales différentes sont disjointes.*

Maintenant on a une façon naturelle, purement topologique, pour définir les feuilles globales d'une variété feuilletée.

**Remarque 1.1.4.** *L'espace topologique  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$  est muni de la topologie standard (euclidienne), en tant que variété topologique. Cette topologie coïncide avec le produit de cette topologie standard sur  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathbb{R}^{n-p}$ .*

*On peut quand même définir une deuxième topologie sur notre espace produit, qui résulte plus fine de l'originelle, afin de "séparer" les feuilles  $\mathbb{R}^p \times \{y\}$  du notre feuilletage : l'idée est de considérer le produit de la topologie usuelle sur  $\mathbb{R}^p$  et de la topologie discrète sur  $\mathbb{R}^{n-p}$  (l'espace des paramètres des feuilles).*

*On remarque que cette topologie est strictement plus fine de celle usuelle si  $0 < p < n$ , et que ses composantes connexes sont les sous-espaces affines  $\mathbb{R}^p \times \{y\}$ , pour  $y \in \mathbb{R}^{n-p}$ .*

*La remarque cruciale est que les homéomorphismes locaux de  $\mathbb{R}^n$  de la forme*

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$$

*sont aussi des homéomorphismes locaux pour cette nouvelle topologie sur  $\mathbb{R}^n$ . Cela va devenir le modèle local d'une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$ , en modifiant de façon convenable la topologie naturelle de  $M$ .*

**Définition 1.1.5.** Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété feuilletée.

La variété  $M$  admet une seule topologie telle que les cartes feuilletées de  $\mathcal{F}$  soient des homéomorphismes entre des ouverts de  $M$  et des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , muni de la nouvelle topologie qu'on vient d'introduire. On appelle *topologie des feuilles* cette nouvelle topologie sur  $M$ .

Si  $A \subseteq M$  est une partie de notre variété, on appelle encore *topologie des feuilles* sur  $A$  la topologie induite sur  $A$  par la topologie des feuilles sur  $M$ .

**Remarque 1.1.6.** La topologie des feuilles est plus fine de la topologie originelle sur  $M$ ; de plus, si  $0 < p < n$  alors elle est strictement plus fine.

Comme la topologie de  $M$  était séparée, la topologie des feuilles l'est encore.

Les feuilles locales sont ouvertes pour la topologie des feuilles. En effet, si  $\varphi : U \rightarrow V \times T$  est une carte feuilletée, alors  $V \times \{y\}$  est un élément de la base de la topologie produit de  $V \times T$ , car on a la topologie discrète sur  $T$ .

**Définition 1.1.7.** Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété feuilletée, et  $x \in M$  un point.

On appelle *feuille* du feuilletage  $\mathcal{F}$  passant pour  $x$  la composante connexe de  $x$  dans la topologie des feuilles de  $M$ . On la note  $\mathcal{F}_x$ .

## 1.2 Champs de $p$ -plans

On introduit maintenant les champs de  $p$ -plans, objets que l'on peut penser comme généralisation des champs de vecteurs. Ils seront utilisés dans la suite pour donner une autre définition de feuilletage, en utilisant le théorème 3.0.4.

Si  $V$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et si  $k \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $\mathcal{G}_k(V)$  la variété compacte de dimension  $n(n-k)$  des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $V$ . On l'appelle la *variété grassmannienne* de rang  $k$  de  $V$ .

On introduit la fibration grassmannienne d'une variété, en admettant la proposition suivante.

**Proposition 1.2.1.** Soit  $p : E \rightarrow B$  un fibré vectoriel  $C^r$  de rang  $n$ , et soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

On note  $\mathcal{G}_k E := \coprod_{b \in B} \mathcal{G}_k(p^{-1}(b))$  la somme disjointe des variétés grassmanniennes de rang  $k$  des fibres de  $p$ . On note aussi  $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \rightarrow B$  l'application qui à un élément de  $\mathcal{G}_k(p^{-1}(b))$  associe le point  $b \in B$ .

Cette projection admet une unique structure de fibration  $C^r$  telle que, pour toute inverse de trivialisatoin locale  $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow p^{-1}(U)$  de  $p$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $B$ , l'application  $(x, A) \mapsto h(x, A)$  de  $U \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$  dans  $(\mathcal{G}_k p)^{-1}(U)$  soit l'inverse d'une trivialisatoin locale de  $\mathcal{G}_k(p)$  au dessus de  $U$ .

Cette fibration s'appelle la *fibration grassmannienne de rang  $k$  du fibré vectoriel  $E$ , ou fibré des  $k$ -plans de  $E$* .

**Définition 1.2.2.** Soit  $M$  une variété  $C^{r+1}$ . On appelle *fibration grassmannienne* de  $M$  de rang  $k$  la fibration grassmannienne de rang  $k$  de son fibré tangent  $\pi : TM \rightarrow M$ , qui est de classe  $C^r$ .

Précisément, on a donné un nom à la fibration  $\mathcal{G}_k \pi : \mathcal{G}_k TM \rightarrow M$ , qui à un sous-espace de dimension  $k$  de  $T_x M$  associe le point  $x$ , pour tout  $x \in M$ .

**Définition 1.2.3.** Un champ de  $p$ -plans de classe  $C^k$  sur  $M$  est une section  $C^k$  de la fibration grassmannienne de rang  $p$  de  $M$ .

**Remarque 1.2.4.** En termes intuitifs, un champ de  $p$ -plans de classe  $C^k$  sur  $M$ , qu'on note  $\Delta$ , est la donnée, pour tout point  $x$  de  $M$ , d'un sous-espace vectoriel  $\Delta_x$  de dimension  $p$  de l'espace tangent  $T_xM$  qui "dépend de manière  $C^k$  de  $x$ ". L'écriture  $\Delta_x \subseteq T_xM$  a un sens.

En raisonnant dans un ouvert de carte  $U \subseteq M$ , notre champ de  $p$ -plans s'identifie à une application  $\Delta|_U : U \rightarrow \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$  de classe  $C^k$ .

Un feuilletage  $C^k$  définit de façon naturelle un champ de  $p$ -plans de classe  $C^{k-1}$  dans une variété feuilletée.

Si  $(M, \mathcal{F})$  est une variété feuilletée  $C^k$ , il suffit de poser  $\Delta_x := T_x\mathcal{F}_x$  : on associe à tout point  $x$  de  $M$  l'espace tangent de dimension  $p$  à la feuille  $\mathcal{F}_x$ , qu'on démontrera être une  $p$ -variété.

### 1.3 Orientation transverse

On définit ici la notion de feuilletage transversalement orientable, qui sera utilisée dans la démonstration du théorème de Novikov.

On considère  $\Delta$  un champ de  $p$ -plans  $C^r$  sur  $M$ .

On dit qu'un deuxième champ de  $p$ -plans  $\delta'$  sur  $M$  est *complémentaire* à  $\Delta$  (où *transverse* à  $\Delta$ ) si l'on a  $T_xM = \Delta_x \oplus \Delta'_x$  pour tout  $x \in M$ . Simplement, on veut qu'ils soient complémentaires en tout point de  $M$ .

Évidemment,  $\Delta'$  est alors un champ de  $n - p$ -plans sur  $M$ .

**Remarque 1.3.1.** Supposons  $\Delta$  soit de classe  $C^r$  sur  $M$ . On peut fabriquer un complémentaire de  $\Delta$  de même régularité comme suit.

Tout d'abord, on fixe une métrique Riemannienne  $\langle, \rangle$  sur  $M$ , que l'on peut définir grâce à une partition de l'unité : il suffit de recoller les pull-backs de la métrique euclidienne standard sur les images des ouverts de carte d'un atlas de  $M$ . On note  $\langle, \rangle_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  le produit scalaire sur  $T_xM$  défini par  $\langle, \rangle$  au point  $x \in M$ .

Posons, pour  $x \in M$  :

$$\Delta_x^\perp := \{v \in T_xM \mid \langle u, v \rangle_x = 0 \text{ pour tout } u \in \Delta_x\}$$

On a alors  $T_xM = \Delta_x \oplus \Delta_x^\perp$  pour tout  $x \in M$ , et on peut vérifier que  $\Delta^\perp$  est un champ de plans  $C^r$  de codimension  $p$  sur  $M$ .

On peut maintenant donner notre notion d'orientation par champs de plans transverses.

**Définition 1.3.2.** Soit  $\Delta$  un champ de  $p$ -plans continu sur la  $n$ -variété  $M$ . On dit que  $\Delta$  est *transversalement orientable* s'il admet un complémentaire orientable.

On aurait pu demander que *tous* les champs de plans complémentaires étaient orientables, grâce à la proposition suivante.

**Proposition 1.3.3.** *Si  $\Delta$  est transversalement orientable, tout champ de plans continu complémentaire à  $\Delta$  est orientable.*

Si  $M$  était orientable, avoir champs de plans orientables ou transversalement orientable est la même chose.

**Théorème 1.3.4.** *Soit  $\Delta$  un champ de  $p$ -plans  $C^r$  sur une variété  $M$ . On a alors les propriétés suivantes :*

1. *si  $\Delta$  est orientable et transversalement orientable, alors  $M$  est orientable*
2. *si  $M$  est orientable, alors  $\Delta$  est orientable si et seulement si il est transversalement orientable*

Revenons aux feuilletages.

**Définition 1.3.5.** Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^r$  de dimension  $p$  sur une variété  $M$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est *orientable* si le champs de  $p$ -plans tangents à  $\mathcal{F}$  l'est. On dit que  $\mathcal{F}$  est *transversalement orientable* si le champs de  $p$ -plans tangents à  $\mathcal{F}$  l'est.

## 1.4 Revêtement double d'orientation

Le *revêtement double* d'un champ de  $p$ -plans  $\Delta$  est défini comme suit. Posons :

$$\tilde{M} := \{(x, \mathcal{O}) \mid x \in M, \mathcal{O} \text{ orientation de } \Delta_x\}$$

Considérons la projection naturelle  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ , avec  $\pi(x, \mathcal{O}) := x$ . Avec cette donnée, il existe un et un seul atlas sur  $\tilde{M}$  qui fait de  $\tilde{M}$  une variété différentiable et de  $\pi$  un revêtement à deux feuillets. Le revêtement double de  $\Delta$  est par définition son tiré-en-arrière  $\pi^*(\Delta)$ , défini par :

$$\pi^*(\Delta)_x := D(\pi)|_x^{-1}(\Delta_{\pi(x)})$$

On a alors la proposition suivante, qu'on ne démontrera pas.

**Proposition 1.4.1.** *Supposons  $M$  connexe, et soit  $\Delta$  un champ de  $p$ -plans sur  $M$ . Soit puis  $(\tilde{M}, \pi, \pi^*(\Delta))$  le revêtement double d'orientation de  $\Delta$ .*

*Alors :*

1.  *$\pi^*(\Delta)$  est orientable*
2.  *$\tilde{M}$  est connexe si et seulement si  $\Delta$  n'était pas orientable*

## 1.5 Autres propriétés

Voici quelques propriétés immédiates des feuilletages :

**Remarque 1.5.1.** *Les feuilles de  $\mathcal{F}$ , étant les composantes connexes de  $M$  pour la topologie des feuilles, définissent une partition de  $M$ .*

*En général, l'ensemble des feuilles sera non dénombrable.*

*De plus, on peut montrer que l'espace topologique  $\mathcal{F}_x$ , muni de la topologie des feuilles induite par celle de  $M$ , est séparé et a base dénombrable. Elles sont donc des variétés différentiables, grâce à l'atlas défini par le feuilletage. La séparation a déjà été mentionnée.*

*Le fait que  $\mathcal{F}_x$  soit à base dénombrable suit du fait que l'on peut choisir  $\mathcal{F}$  de façon que  $\mathcal{F}_x$  soit réunion dénombrable de feuilles locales, pour tout  $x \in M$ .*

*Pour montrer ça, on va choisir un atlas convenable pour la variété  $M$ . On sait que toute variété différentiable  $M$  admet une exhaustion en compact, c'est à dire une famille  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de parties compactes de  $M$  telle que  $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$  et  $K_n \subseteq \text{Int}(K_{n+1})$  pour tout  $n \leq 1$ . On dit aussi que  $M$  est dénombrable à l'infini. On peut alors choisir un atlas feuilleté  $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  de  $M$  tel que :*

1.  $\text{card}(\Lambda) = \aleph_0$
2. les  $U_\lambda$  sont relativement compacts
3. pour tout  $\lambda \in \Lambda$ , on a  $U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \emptyset$  sauf pour un nombre fini de  $\lambda' \in M$

*Disons : le graphe des intersections des domaines de carte de notre atlas a tous les sommets de degré fini.*

*Fixons un point  $x \in M$ , et soit  $\mathcal{F}_x$  la feuille passant par  $x$ . On veut l'écrire comme réunion dénombrable de feuilles locales.*

*On commence en choisissant un indice  $\lambda_0 \in \Lambda$  tel que  $x \in U_{\lambda_0}$ , et on prend la plaque locale contenant  $x$  dans  $U_{\lambda_0}$ , à savoir  $\mathcal{F}_x \cap U_{\lambda_0}$ . Puis, pour tout  $\lambda \in \Lambda$  tels que  $U_{\lambda_0} \cap U_\lambda \neq \emptyset$ , on prend la feuille locale dans  $U_\lambda$  d'un point quelconque de l'intersection  $U_{\lambda_0} \cap U_\lambda$ . La famille  $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda \mid U_{\lambda_0} \cap U_\lambda \neq \emptyset\}$  est finie par hypothèse, et on numérote ses éléments ainsi :  $\Lambda_0 = \{\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,i_0}\}$ .*

*Maintenant on fait de même pour tout indice  $\lambda_{0,k}$ , où  $1 \leq k \leq i_0$ , en obtenant des familles finies  $\Lambda_{0,k} := \{\lambda \in \Lambda \mid U_{\lambda_{0,k}} \cap U_\lambda \neq \emptyset\}$ , et en choisissant toujours la feuille locale d'un point quelconque de  $U_{\lambda_{0,k}} \cap U_\lambda$ .*

*On peut continuer comme ça, et comme  $\text{card}(\Lambda) = \aleph_0$  on ne peut construire qu'une infinité dénombrable de parties finies de  $\Lambda$  (voir figure 1.1). De plus, le cardinal de la réunion disjointe de ces parties finies est encore  $\aleph_0$ .*

*Enfin, la réunion de toutes ces feuilles locales donne  $\mathcal{F}_x$ , car on ne peut trouver une feuille locale qui lui correspond si l'on ne suit pas un parcours de plaques parmi les domaines de carte de notre atlas feuilleté. C'est la définition de feuille globale comme composante connexe pour la topologie des feuilles qui entraîne ça.*

*Notons encore qu'une feuille rencontre un domaine de carte feuilletée en une réunion (disjointe) au plus dénombrable de feuilles locales ; cela peut se montrer directement avec le même raisonnement qu'on vient de faire, en utilisant un*

atlas qui a cette bonne propriété d'intersections finies.

Remarquons enfin que cette famille au plus dénombrable de plaques peut s'accumuler dans le domaine de carte considéré.

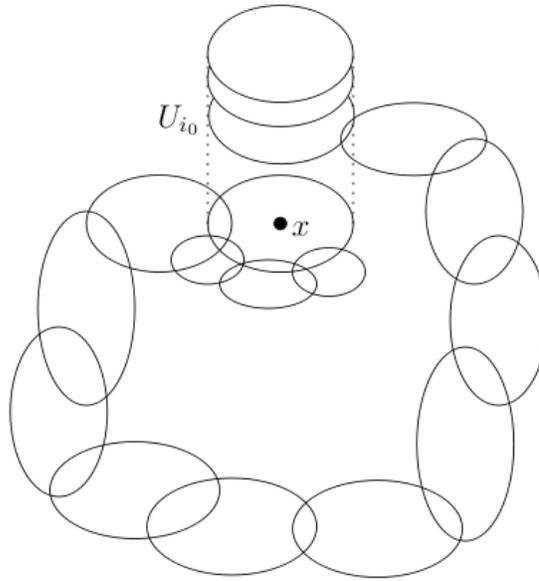


FIGURE 1.1 – Parcours de plaques

On peut maintenant exprimer de manière précise le fait qu'un feuilletage de dimension  $p$  sur une variété  $M$  définit une partition de  $M$  en variétés de dimension  $p$ , avec la remarque suivante.

**Remarque 1.5.2.** Comme les feuilles locales de  $\mathcal{F}$  sont des sous-variétés  $C^k$ , chaque feuille  $\mathcal{F}_x$ , munie de sa topologie des feuilles et de son atlas des feuilles locales est une variété  $C^k$ . De plus, si on munit  $\mathcal{F}_x$  de la topologie induite par la topologie originelle de  $M$ , alors elle résulte en une sous-variété immergée de  $M$ , avec l'inclusion canonique.

En général  $\mathcal{F}_x$  n'est pas une sous-variété (plongée) de  $M$  : il se peut que l'inclusion canonique ne soit pas un homéomorphisme sur son image (on verra un exemple de ça). Par abus de notation, on utilise la même notation pour le feuilletage  $\mathcal{F}$  et la partition de  $M$  en feuilles de  $\mathcal{F}$ .

**Remarque 1.5.3.** On peut définir le quotient d'une variété feuilletée par son feuilletage.

Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété feuilletée, avec  $\mathcal{F}$  de codimension  $k$ . Supposons que les feuilles de  $\mathcal{F}$  soient fermées dans  $M$ .

On définit l'espace des feuilles de la variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$  comme l'espace

## 12 CHAPITRE 1. FEUILLETAGES : DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

topologique quotient  $M/\sim$ , par la relation d'équivalence où  $x \sim y$  si et seulement si  $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$  : on identifie les points de  $M$  dans la même feuille de  $\mathcal{F}$ .

Cette construction donne des exemples de ce qu'on appelle des variétés non séparées, car l'espace des feuilles est en général localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^k$ , mais par contre il n'est pas toujours séparé.

# Chapitre 2

## Exemples

### 2.1 Submersions

Soit  $f : M \rightarrow N$  une submersion entre variétés de classe  $C^k$ , avec  $M$  de dimension  $m$  et  $N$  de dimension  $n$ .

D'après le théorème de *forme normale* des submersions, on voit que si  $x \in M$  et  $y = f(x) \in N$ , alors on a deux cartes locales  $(U, \varphi)$  autour de  $x$  dans  $M$  et  $(V, \psi)$  autour de  $y$  dans  $N$  telles que  $\varphi(U) = U_1 \times U_2$ , avec  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  et  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  ouverts et  $\psi(V) = V_2 \supseteq U_2$ , de façon que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$  coïncide avec la projection sur le premier facteur.

Si on choisit des telles cartes pour tout point  $x \in M$ , on construit alors un atlas feuilleté  $C^k$  de  $M$ , de dimension  $m - n$ . De plus, avec ces hypothèses sur  $f$  on voit que les ensemble de niveau  $f^{-1}(c)$  sont des sous-variétés de dimension  $m - n$  de  $M$  pour tout point  $c \in N$  de fibre non vide : cela suit encore du théorème de forme normale pour les submersions : il nous assure que les fibres de valeurs réguliers sont des sous-variété. On peut vérifier que les feuilles de ce feuilletage sont exactement les composantes connexes des sous-variétés de niveau de  $f$ .

**Exemple 2.1.1.** Voici un exemple concret.

Considérons la submersion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(x_1, x_2, x_3) := \alpha(r^2)e^{x_3}$ , où  $r = r(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  et  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse telle que  $\alpha(1) = 0$ ,  $\alpha(0) = 1$  et  $\alpha'(t) < 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Notre submersion définit un feuilletage lisse de dimension 2 sur  $\mathbb{R}^3$ , qu'on appelle  $\mathcal{F}$ .

Dans ce cas-là, on peut étudier les classes d'homéomorphismes des feuilles de  $\mathcal{F}$ . Soit  $C := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  le cylindre solide d'axe la droite  $\{x_1 = x_2 = 0\}$  et de rayon de base 1.

Il se trouve que le bord  $\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$  du cylindre est une feuille, à savoir  $f^{-1}(0)$ . Les feuilles à l'extérieur de  $C$ , c'est à dire celles contenues dans  $\mathbb{R}^3 \setminus C$ , sont toutes homéomorphes à des cylindres. Par contre, les feuilles dans l'intérieur de  $C$  sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$  ; on peut les paramétrer

par la famille d'applications  $\varphi_c : (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \log\left(\frac{c}{\alpha(r^2)}\right)\right)$ , définies sur la boule unitaire de  $\mathbb{R}^2$  (par la métrique usuelle) dans  $\mathbb{R}^3$ , où  $c > 0$ .

## 2.2 Champs de vecteurs sans points singuliers

Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^{k-1}$  ne s'annulant pas sur  $M$  (avec la convention  $\infty - 1 = \infty$ ,  $\omega - 1 = \omega$ ).

Le théorème du redressement local de champs de vecteurs autour d'un point non singulier montre que  $M$  admet un feuilletage  $C^k$  de dimension 1, dont les feuilles sont les courbes intégrales de  $X$ .

Le résultat auquel on s'appelle est un théorème de *forme normale locale* pour un champ de vecteur ne s'annulant pas en un point. Sur  $\mathbb{R}^n$ , le champ de vecteurs constant  $X_{e_1} : x \mapsto e_1$ , où  $e_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , est un exemple de tel champ.

Le théorème suivant dit que, localement et à difféomorphismes près, c'est le seul.

**Théorème 2.2.1.** *Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^k$  sur une variété  $M$  de classe  $C^{k+1}$ .*

*Pour tout point  $x_0$  de  $M$  tel que  $X(x_0) \neq 0$ , il existe une carte locale  $(U, \varphi)$  en  $x_0$  de classe  $C^k$  telle que*

$$\varphi_*(X|_U) = (X_{e_1})|_{\varphi(U)}$$

On rappelle que  $X|_U$  désigne la restriction de  $X$  à l'ouvert  $U$ , et que  $\varphi_*(X|_U)$  est le *push-forward* du champ de vecteurs  $X|_U$  sur  $\varphi(U)$  (bien défini puisque  $\varphi$  est un difféomorphisme).

**Remarque 2.2.2.** *Cet exemple est un cas particulier de la construction de l'espace des feuilles d'une variété feuilletée.*

*Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^1$  sans points singuliers sur une variété  $M$  de classe  $C^1$ , tel que les courbes intégrales de  $X$  soient fermées dans  $M$ . Alors l'espace topologique quotient de  $M$  par la relation d'équivalence "appartenir à la même courbe intégrale de  $X$ " est localement homéomorphe à  $\mathbb{R}$ .*

## 2.3 Fibrations

Commençons en définissant les fibrations.

**Définition 2.3.1.** Une *fibration* (parfois *fibré localement trivial*) de classe  $C^k$  est une application  $\pi : E \rightarrow B$  de classe  $C^k$  entre variété  $C^k$ , de sorte que pour tout  $b \in B$  il existe une variété  $F$  de classe  $C^k$ , un voisinage ouvert  $U$  de  $b$  dans  $B$  et un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ , tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\
 \searrow \pi & & \swarrow pr_U \\
 & & U
 \end{array}$$

Où l'on a noté  $pr_U$  la projection “verticale” du produit  $U \times F$  sur la première composante  $U$ .

Voici un peu de terminologie.

**Notation 2.3.2.** On dit que  $B$  est la base,  $E$  l'espace total,  $\pi^{-1}(b)$  la fibre au-dessus de  $b$ ,  $U$  un ouvert trivialisant,  $\varphi$  une trivialisatation locale de  $\pi$ . Si la variété  $F$  ne dépend pas du point  $b$  on parle alors d'une fibration de fibre  $F$ . On désigne souvent une fibration par son espace total, par abus de notation.

On rappelle encore quelques autres notions pour donner des exemples.

**Définition 2.3.3.** Soient  $p : E \rightarrow B$  et  $p' : E' \rightarrow B'$  deux fibrations  $C^k$ . Un *morphisme* de fibrations de  $p$  dans  $p'$  est une couple d'application  $(f, g)$  de classe  $C^k$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{g} & E' \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 B & \xrightarrow{f} & B'
 \end{array}$$

Un *isomorphisme* de fibrations de  $p$  vers  $p'$  est un morphisme de fibrations  $(f, g)$  qui admet un inverse, c'est à dire un morphisme de fibrations  $(f', g')$  de  $p'$  vers  $p$  tel que :

$$g \circ g' = Id_{E'}, g' \circ g = Id_E, f \circ f' = Id_{B'}, f' \circ f = Id_B$$

Deux fibrations sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

**Définition 2.3.4.** Soit  $p : E \rightarrow B$  une fibration de classe  $C^k$ . Pour  $k' \leq k$ , une *section globale* de classe  $C^{k'}$  de  $p$  est une application  $s : B \rightarrow E$  de classe  $C^{k'}$  telle que  $p \circ s = Id_B$ .

En général des telles sections globales (c'est à dire définies sur  $B$  tout entier) n'existent pas.

**Exemple 2.3.5.** Si  $M, F$  sont variétés  $C^k$ , la projection canonique  $pr_M : M \times F \rightarrow M$  sur la première composante du produit est une fibration de fibre  $F$ . Elle est dite une fibration *triviale*.

Toute fibration isomorphe à une fibration triviale est dite *trivialisable*

**Exemple 2.3.6.** Les revêtements à au plus un nombre dénombrable de feuilletés sont des fibrations de fibre discrète.

**Exemple 2.3.7.** Les fibrés vectoriels réels  $C^k$  de rang  $n$  sont des fibrations  $C^k$ , de fibre la variété  $\mathbb{R}^n$ .

En général, une fibration de fibre  $\mathbb{R}^n$  n'admet pas une structure de fibré vectoriel évidente, c'est à dire compatible avec celle de fibration.

On peut retourner aux feuilletages.

Considérons une fibration  $\pi : E \rightarrow B$  de classe  $C^k$ , de fibre une variété  $F$  et dimension  $p$ , sur une variété  $B$  de dimension  $n$ .

Fixons une carte locale  $(U, \varphi)$  de  $B$ , où  $U$  est un ouvert trivialisant pour  $\pi$ , une carte locale  $(V, \psi)$  de  $F$ , et une trivialisatıon locale  $\theta : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  de  $\pi$  au-dessus de  $U$ . Considérons l'application de l'ouvert  $W := \theta^{-1}(U \times V)$  de  $E$  dans l'ouvert  $\varphi(U) \times \psi(V)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  définie par

$$x \mapsto (\varphi \times \psi) \circ \theta(x) = (\varphi(\theta(x)), \psi(\theta(x)))$$

On peut vérifier que la collection de ces applications donne un atlas de cartes feuilletées  $C^k$  sur  $E$ .

## 2.4 Pull-backs

On peut définir le *pull-back* d'un feuilletage.

Soient  $f : M \rightarrow N$  un  $C^k$ -difféomorphisme local entre deux variétés  $C^k$ , et  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $N$  défini par l'atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ . Pour tout point  $x \in M$ , notons  $V_x$  un voisinage ouvert de  $x$  dans  $M$  tel que  $f(V_x)$  soit ouvert dans  $N$  et tel que  $f|_{V_x}$  soit un  $C^k$ -difféomorphisme sur son image.

Alors l'atlas  $\{f^{-1}(U_i) \cap V_x, \varphi_i \circ f|_{f^{-1}(U_i) \cap V_x}\}_{i \in I, x \in M}$  est un atlas de cartes feuilletées  $C^k$  sur  $M$ . Cela définit un feuilletage  $C^k$  sur  $M$  qu'on note  $f^*\mathcal{F}$ , et qu'on appelle le *feuilletage image réciproque* de  $\mathcal{F}$  par  $f$ , ou *pull-back* de  $\mathcal{F}$  par  $f$ .

L'image  $f((f^*\mathcal{F})_x)$  d'une feuille de  $f^*\mathcal{F}$  est la feuille  $\mathcal{F}_{f(x)}$  de  $\mathcal{F}$ , mais en général l'image réciproque d'une feuille de  $\mathcal{F}$  n'est pas réduite à une seule feuille de  $f^*\mathcal{F}$ . Avec cette notion, on peut définir un isomorphisme de feuilletages.

**Définition 2.4.1.** Un *isomorphisme* d'une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$  de classe  $C^k$  dans une autre  $(M', \mathcal{F}')$  est un  $C^k$ -difféomorphisme  $f : M \rightarrow M'$  tel que  $f^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ . On dit alors que  $(M, \mathcal{F})$  et  $(M', \mathcal{F}')$  sont *équivalentes*.

De manière équivalente, les applications  $f, f^{-1}$  lue par cartes (feuilletées) préservent les familles des sous-espaces horizontaux.

## 2.5 Actions de groupes

Soit  $G$  un groupe discret agissant librement et proprement discontinuement par  $C^k$ -difféomorphismes sur une variété  $M$  de classe  $C^k$ . Soit puis  $\mathcal{F}$  un feuilletage de  $M$   $G$ -invariant, c'est à dire tel que  $g^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$  pour tout  $g \in G$ .

On peut vérifier que la variété quotient  $M/G$  admet un unique feuilletage  $\mathcal{F}'$

tel que  $\pi^* \mathcal{F}' = \mathcal{F}$ , où l'on a noté  $\pi : M \rightarrow M/G$  la projection canonique au quotient. Ce feuilletage est appelé le *feuilletage quotient* de  $\mathcal{F}$  par l'action de  $G$ .

**Exemple 2.5.1.** Si  $F$  est un  $\mathbb{R}$ -sous-espace vectoriel de dimension  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\mathbb{R}^n$  admet un feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces affines translattés de  $F$ . De plus, ce feuilletage est  $\mathbb{Z}^n$ -invariant, si l'on fait agir  $\mathbb{Z}^n$  par translations. Notre feuilletage induit donc par passage au quotient  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  un feuilletage (analytique) de dimension  $p$  du tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ ; on l'appelle un *feuilletage linéaire* du tore.

Si on choisit  $n = 2$ , et si  $F \subseteq \mathbb{R}^2$  est une droite de pente irrationnelle dans le plan, on sait que  $\pi(F)$  est une variété immergée du tore diffeomorphe à  $\mathbb{R}$  qui *n'est pas une sous-variété plongée*. En effet, elle résulte dense dans  $\mathbb{T}^2$ , mais pas ouverte.

On voit donc un exemple d'un feuilletage dont les feuilles ne sont pas des sous-variétés.

## 2.6 Actions de groupes de Lie

On commence par un rappel.

**Définition 2.6.1.** Un *groupe de Lie*  $G$  est une variété lisse muni d'une opération de groupe  $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$  telle que l'application  $(g, h) \mapsto gh^{-1} : G \times G \rightarrow G$  soit  $C^\infty$ .

Une sous-variété immergée  $H \hookrightarrow G$  qui est aussi un sous-groupe est dite un *sous-groupe de Lie* de  $G$ .

La définition donnée équivaut au fait que les applications du produit  $\mu : (g, h) \mapsto gh$  et d'inversion  $\iota : g \mapsto g^{-1}$  soient  $C^\infty$  pour l'atlas de  $G$ .

On peut maintenant considérer des action (à *gauche*) de groupes de Lie sur des variété lisses. Une action  $C^k$  d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété lisse  $M$  est une application  $\rho : G \times M \rightarrow M$  de classe  $C^k$  telle que  $\rho(e, x) = x$  et  $\rho(g, \rho(h, x)) = \rho(gh, x)$  pour tout  $x \in M$ ,  $g, h \in G$ , où l'on a noté avec  $e \in G$  l'élément neutre de  $G$ .

Dans la suite, on note l'action ainsi :  $\rho(g, x) := gx$ .

La terminologie usuelle pour les actions de groupe est utilisée dans ce contexte aussi. On appelle *G-orbite* d'un point  $x \in M$  l'ensemble  $Gx := \{gx | g \in G\} \subseteq M$ , et *stabilisateur* de  $x \in M$  le sous-groupe  $Stab_G(x) := \{g \in G | gx = x\}$  de  $G$ . Ici l'action  $\rho$  est sous-entendue, mais on parle aussi des orbites et des stabilisateurs de  $\rho$  dans le même contexte. On remarque que le sous-groupe  $stab_G(x)$  est fermé dans  $G$ , et un résultat en théorie des groupes de Lie dit que alors il est un sous-groupe de Lie de  $G$ .

Fixons  $x \in M$ . L'application  $\psi_x : G \rightarrow Gx$  qui à  $g \in G$  associe  $gx$  est surjective par définition. De plus, elle est constante sur les classes latérales du sous-groupe  $stab_G(x)$ , et donc factorise au quotient en une application  $\bar{\psi}_x : G/stab_G(x) \rightarrow Gx$ . Le quotient est un quotient *d'ensembles*, qui a structure de groupe si et seulement si le stabilisateur de  $x$  est distingué dans  $G$ .

On peut montrer que le quotient  $G/stab_G(x)$  admet une structure différentiable telle que  $\bar{\psi}_x$  soit une immersion injective

Pour revenir aux feuilletages, on a besoin d'une autre définition.

**Définition 2.6.2.** Soit  $\rho : G \times M \rightarrow M$  une action  $C^\infty$  du groupe de Lie  $G$  sur la variété lisse  $M$ .

On dit que l'action est *feuilletée* si la dimension des espaces tangents aux orbites de  $\rho$  est constante.

Si l'on a en particulier  $\dim_{\mathbb{R}}(T_{gx}Gx) = k$  pour tout  $x \in M$  et  $g \in G$ , on dit que l'action est *feuilletée de dimension  $k$* . Si de plus  $k$  est la dimension de  $G$  alors on dit que l'action est *localement libre*.

Voici le lien avec les feuilletages, qu'on admet sans démonstration.

**Proposition 2.6.3.** *Les orbites d'une action feuilletée de dimension  $k$  définissent un feuilletage lisse de  $M$  de dimension  $k$ .*

## 2.7 Feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^3$

On donne un exemple de feuilletage sur  $\mathbb{S}^3$ , le *feuilletage de Reeb*. Cela est un exemple concret qui à été beaucoup étudié pendant le développement de la théorie des feuilletages.

On va décrire la construction de ce feuilletage, qui commence en définissant un feuilletage sur un tore solide  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ , où l'on note avec  $D^2$  la boule unité fermée dans  $\mathbb{R}^2$  pour la métrique euclidienne.

D'abord, on considère une modification de la submersion de l'exemple dans la section 2.1. Posons  $f : D^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par  $f(x_1, x_2, x_3) := \alpha(r)e^{x_3}$ , où  $r = r(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  et  $\alpha(r) := \exp\left(-\exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right)$ .

Le feuilletage lisse défini sur  $D^2 \times \mathbb{R}$  par  $f$  a comme feuilles les graphes des fonctions  $\varphi_b : (x_1, x_2) \mapsto \exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + b$ , définies sur  $D^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , pour  $b \in \mathbb{R}$ . Ce feuilletage s'étend en un feuilletage lisse de  $\mathbb{R}^3$ , qu'on note  $\mathcal{F}$ , dont les feuilles à l'extérieur du cylindre  $C := D^2 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$  sont les cylindres d'équations  $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ , avec  $\rho > 1$ .

On identifie maintenant les points des deux bases du cylindre compact  $D^2 \times [0, 1]$  en disant que  $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$  si et seulement si  $x_1 = y_1$  et  $x_2 = y_2$ . Le quotient  $D^2 \times [0, 1]/\sim$  est homéomorphe au tore solide  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ , et puisque le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $D^2 \times \mathbb{R}$  est invariant par translations le long de l'axe  $\{x_1 = x_2 = 0\}$  on peut définir un feuilletage quotient lisse sur  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ . Cela suit de l'exemple dans la section 2.5.

Ce feuilletage est appelé le *feuilletage orientable de Reeb* de  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ . Il admet une feuille compacte, à savoir le tore  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  qui donne le bord. De plus, ce feuilletage n'est pas donné par une submersion.

Si on avait considéré l'identification des points de  $D^2 \times \{0\}$  avec ceux de  $D^2 \times \{1\}$  définie par  $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$  si et seulement si  $x_1 = y_1$  et  $x_2 = -y_2$ , on

aurait trouvé comme quotient  $D^2 \times [0, 1]/ \sim$  une 3-variété *non orientable*, qu'on note  $K^3$ , dont le bord est  $C^\infty$ -difféomorphe à une *bouteille de Klein*. Le feuilletage quotient sur cette variété, encore possible puisque l'action du groupe des translations "verticales" préserve les feuilles de  $\mathcal{F}$ , définit un feuilletage sur  $K^3$ .

Ce feuilletage est appelé le *feuilletage non orientable de Reeb* de  $K^3$ . Le bord est encore une feuille compacte, et les feuilles à l'intérieur sont toutes homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$ .

Maintenant on va construire un feuilletage sur  $\mathbb{S}^3$  en recollant deux feuilletages de Reeb sur  $D^2 \times \mathbb{S}^1$ .

L'idée topologique à la base est de considérer l'espace  $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$  comme la réunion de deux tores solides  $T_1, T_2 \cong D^2 \times \mathbb{S}^1$ , identifiés le long du bord par des difféomorphismes qui envoient les méridiens de  $\partial T_1$  sur les parallèles de  $\partial T_2$ , et réciproquement. À ce point là, le tore solide  $T_1$  est défini par les équations

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}$$

et  $T_2$  par

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$$

Il y a plusieurs possibilités pour décrire cette décomposition de  $\mathbb{S}^3$  dans deux tores solides, utilisant par exemple la projection stéréographique du *pole nord*  $\pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , où  $N := (0, 0, 0, 1)$ .

Après cette opération purement topologique, il y a une seule façon pour recoller les feuilletages de Reeb sur  $T_1$  et  $T_2$  afin d'obtenir un feuilletage lisse sur  $\mathbb{S}^3$  tel que  $\partial T_1 = \partial T_2$  soit une feuille.

Ce feuilletage est appelé le *feuilletage de Reeb* de  $\mathbb{S}^3$ . Il est un feuilletage de codimension 1 ayant une feuille compacte, homéomorphe au tore  $T^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , à savoir le bord des tores solides qu'on a utilisé pour construire la sphère. De plus, les autres feuilles sont homéomorphes à  $\mathbb{R}^2$  et s'accumulent sur la feuille compacte.

Cette situation particulière d'existence d'une feuille compacte à été étudiée dans le contexte plus général des variétés compactes de dimension 3. On verra à ce propos, dans le chapitre 6, un théorème dû à *Novikov*, qui donne une condition purement topologique pour qu'une 3-variété feuilletée compacte admette une feuille compacte (condition liée au groupe fondamental de la variété considérée).



## Chapitre 3

# Théorème de Frobenius

Dans la suite on travaille avec des variétés  $C^\infty$ , et on donne une définition qui généralise le fait qu'un champ de vecteurs dans une variété soit intégrable.

**Définition 3.0.1.** Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$  est dit *tangent* au champ de  $p$ -plans  $\Delta$  si pour tout  $x \in M$  on a  $X(x) \in \Delta_x$ .

**Définition 3.0.2.** Un champ de  $p$ -plans  $\Delta$ , de classe  $C^\infty$  sur  $M$ , est dit *intégrable* s'il existe un feuilletage  $\mathcal{F}$  lisse de dimension  $p$  sur  $M$  tel que  $\Delta_x = T_x \mathcal{F}_x$  pour tout  $x \in M$ .

Cela dit qu'il existe une variété tangente au champ de  $p$ -plans en tout point, à savoir la feuille de notre feuilletage.

**Remarque 3.0.3.** *Un tel feuilletage est unique.*

*En effet, considérons deux feuilletages  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sur  $M$  tel que  $T_x \mathcal{F}_x = T_x \mathcal{F}'_x$  pour tout  $x$  dans  $M$ . Alors la composée  $\varphi' \circ \varphi^{-1}$  d'une carte feuilletée  $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$  et d'une autre  $(U', \varphi') \in \mathcal{F}'$  est (localement) de la forme correcte*

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} : (x, y) \mapsto (f(x, y), g(y))$$

*car la dérivée partielle  $\frac{\partial g}{\partial x}$  de sa seconde composante par rapport à la première variable est nulle.*

*Cela dit que les atlas  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  sont compatibles, et la condition de maximalité donne  $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ .*

Voici un critère très utile pour l'intégrabilité d'un champ de  $p$ -plans.

**Théorème 3.0.4** (Théorème de Frobenius). *Un champ de  $p$ -plans  $\Delta$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$  est intégrable si et seulement si, pour tous les champs de vecteurs lisses  $X, Y$  sur  $M$  tangents à  $\Delta$ , le crochet de Lie  $[X, Y]$  sur  $M$  est tangent à  $\Delta$ .*

Pour la démonstration, on utilisera la caractérisation suivant des champs de  $p$ -plans  $C^k$ , qui dit que l'on peut travailler avec  $p$  champs de vecteurs  $C^k$  indépendants en tout point.

**Proposition 3.0.5.** *Un champ de  $p$ -plans  $\Delta : x \mapsto \Delta_x$  sur  $M$  est de classe  $C^k$  si et seulement si, pour tout point  $x_0 \in M$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  et  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  sur  $U$ , de classe  $C^k$ , tels que  $\{X_1(x), \dots, X_p(x)\}$  soit une  $\mathbb{R}$ -base de  $\Delta_x$  pour tout  $x \in U$ .*

*Démonstration (théorème 3.0.4).* Supposons d'abord que  $\Delta$  soit intégrable, défini par le feuilletage  $\mathcal{F}$  de dimension  $p$ . Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$  tangents à  $\Delta$ , et  $x \in M$  un point.

Si l'on montre que  $[X, Y](x) \in \Delta_x$  on a démontré la première implication.

Le résultat suit d'un raisonnement local. Si on avait  $M = \mathbb{R}^n$ , et  $\mathcal{F}$  le feuilletage standard  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ , alors on aurait  $X(z), Y(z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$ , pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , car notre feuilletage définit ce champ de  $p$ -plans, si l'on identifie  $T_x \mathbb{R}^n$  avec  $\mathbb{R}^n$ .

En effet,  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_z, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p} \Big|_z \right\}$  est une  $\mathbb{R}$ -base de  $T_z \mathbb{R}^n$  pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ , et donc

$X, Y$  sont combinaison linéaire des opérateurs de dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$ .

Mais un crochet de deux tels champs de vecteurs est encore une combinaison linéaire de  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}$ , et donc  $[X, Y]$  est bien tangent à  $\Delta$ .

La conclusion suit du fait qu'on peut se ramener à cette situation autour de  $x$ , en choisissant une carte locale  $(U, \varphi)$  en  $x$  et en remplaçant  $X, Y$  par  $\varphi_*(X|_U)$  et  $\varphi_*(Y|_U)$  (respectivement).

Réciproquement, supposons que la condition sur le commutateur soit satisfaite. Comme le problème est local, on peut supposer que  $M$  soit un voisinage ouvert de  $0 \in \mathbb{R}^n$ ; quitte à le réduire, il existe un  $p$ -uplet  $(X_1, \dots, X_p)$  de champs de vecteurs sur  $M$  tels que  $\{X_1(x), \dots, X_p(x)\}$  soit une base de  $\Delta_x$  pour tout  $x \in M$ .

Par définition, les champs  $X_1, \dots, X_p$  sont tangents à  $\Delta$ , et donc l'hypothèse est que  $[X_i, X_j](x) \in \Delta_x$  pour tout  $x \in M$ , pour tout  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ .

On termine la preuve en deux étapes :

1. On montre qu'on peut se réduire au cas où les champs commutent entre eux :  $[X_i, X_j] = 0$  pour  $1 \leq i, j \leq p$
2. On démontre la deuxième implication avec cette hypothèse supplémentaire

On essaye alors de modifier les champs  $X_1, \dots, X_p$  en des champs  $X'_1, \dots, X'_p$  qui commutent entre eux, et qui engendrent encore  $\Delta_x$  en tout point  $x \in M$ .

On peut supposer que  $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_0$ , pour tout  $i = 1, \dots, p$ , à un changement linéaire près. On aura maintenant une matrice de fonction lisses  $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ , qui donnent les coordonnées de  $X_1, \dots, X_p$  dans la base canonique de  $T_x M$ , pour tout  $x \in M$ . Cela signifie que l'on à l'écriture :

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

pour  $x \in M$  et  $1 \leq i \leq p$ .

Quitte à réduire  $M$ , on peut supposer que la matrice carrée  $(a_{i,j}(x))_{1 \leq i, j \leq p}$ , qui

vaut l'identité en zéro, soit inversible pour tout  $x \in M$  (pour la continuité du déterminant). Soit  $(b_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$  son inverse en tout point de  $M$ . Les formules de Cramer montrent que les fonctions  $b_{i,j}$  sont encore lisses. Posons :

$$X'_i := \sum_{j=1}^p b_{i,j} X_j$$

On va montrer que le  $p$ -uplet  $(X'_1, \dots, X'_p)$  de champs de vecteurs convient. Les  $X'_1, \dots, X'_p$  sont des nouveaux champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ . De plus, si on fixe  $x \in M$ , on voit que les vecteurs  $X'_1(x), \dots, X'_p(x)$  sont une nouvelle base du sous-espace de  $T_x M$  engendré par  $X_1(x), \dots, X_p(x)$ , c'est à dire de  $\Delta_x$ . Par construction, on a  $X'_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ , pour des fonctions lisses  $c_{i,j}$  convenables. En utilisant les propriétés élémentaires du crochet de Lie, on voit que :

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=p+1}^n d_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

pour des autres fonctions lisses  $d_{i,j,k} : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Notre hypothèse nous dit que  $[X'_i, X'_j](x) \in \langle X'_1(x), \dots, X'_p(x) \rangle_{\mathbb{R}} = \Delta_x$  pour tout  $x \in M$ , et donc on aura des fonctions  $e_{i,j,k}$  sur  $M$  telles que :

$$[X'_i, X'_j] = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} X'_k = \sum_{k=1}^p \left( \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=p+1}^n c_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

En soustrayant, on trouve que

$$\sum_{k=1}^p e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

ce qui, par indépendance des  $\frac{\partial}{\partial x_k}$ , donne  $e_{i,j,k} = 0$  pour tout  $i, j, k \in \{1, \dots, p\}$ . Alors  $[X'_i, X'_j] = \sum_{k=1}^p e_{i,j,k} X'_k = 0$ , et pour tout  $i, j \in \{1, \dots, p\}$ , ce qu'il fallait montrer.

Démontrons maintenant le théorème avec les hypothèses  $\Delta_x = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$  pour tout  $x \in M$ , et  $[X_i, X_j] = 0$  pour  $i, j = 1, \dots, p$ .

Notons  $t \mapsto \varphi_t^j$  le flot du champ  $X_j$ , et, pour  $x_0 \in M$  fixé,  $\varepsilon > 0$  convenable, considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_p) &\longmapsto \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0) \end{aligned}$$

Cette fonction a pour image une sous-variété intégrale de  $\Delta$ . En effet, on a, pour  $1 \leq j \leq p$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_j} \psi(t_1, \dots, t_p) &= \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0)) = \\
&= X_j(\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ \dots \circ \varphi_{t_p}^p(x_0))
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que les flots commutent, ainsi que la définition de  $\varphi_{t_j}^j$  comme flot de  $X_j$ .

Comme les champs  $X_1, \dots, X_p$  sont linéairement indépendants en tout point, on voit alors que  $D\psi|_{(t_1, \dots, t_p)} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(t_1, \dots, t_p)$  est injective pour tout  $(t_1, \dots, t_p) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^p$ , pour  $\varepsilon$  convenable.

De plus, l'image de  $D\psi|_{(t_1, \dots, t_p)}$  est contenue dans  $\Delta_{\psi(t_1, \dots, t_p)}$ , d'après les calculs ci-dessus, car  $\Delta$  est engendré par  $X_1, \dots, X_p$  en tout point. Donc l'image de  $\psi$  est une sous-variété tangente à  $\Delta$ ; comme les deux ont même dimension, elle est une sous-variété intégrale, et on a conclu.  $\square$

**Remarque 3.0.6.** *On peut donner une deuxième définition d'un feuilletage (dans le cas  $C^\infty$ ).*

*On peut dire qu'un feuilletage  $C^\infty$  de dimension  $p$  d'une variété lisse  $M$  est la donnée d'un champ de  $p$ -plans lisse  $\Delta$  sur  $M$  qui soit intégrable. Les feuilles de notre feuilletage seront les sous-variétés tangentes à  $\Delta$ .*

*D'après le théorème de Frobenius, on aurait pu demander la propriété suivante pour  $\Delta$ .*

*Tout point  $x_0 \in M$  admet un voisinage  $U \subseteq M$ , avec  $p$  champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_p$  lisses sur  $U$  satisfaisants :*

1.  $\Delta_x = \langle X_1(x), \dots, X_p(x) \rangle$  pour tout  $x \in U$
2.  $[X_i, X_j](x) \in \Delta_x$  pour tout  $x \in U$

*En effet, soient  $X, Y$  deux autres champs de vecteurs sur  $M$  tangents à  $\Delta$ . Pour tout  $x_0 \in M$ , si on fixe un voisinage  $U \subseteq M$  de  $x_0$  comme ci-dessus, on pourra trouver des fonctions lisses  $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_p$  sur  $U$  telles que :*

$$X|_U = \sum_{i=1}^p f_i X_i, Y|_U = \sum_{i=1}^p g_i X_i$$

*Mais alors, si on choisit  $x \in U$  quelconque, le vecteur  $[X, Y](x)$  est contenu dans l'espace vectoriel engendré par les  $[X_i, X_j](x)$ , par les propriétés élémentaires du commutateur. Cela entraîne que  $[X, Y]$  soit tangent à  $\Delta$ , et donc le théorème de Frobenius nous assure que  $\Delta$  est intégrable.*

## Chapitre 4

# Propriétés topologiques des feuilles

Fixons une variété feuilletée  $(M, \mathcal{F})$  de classe  $r$  et codimension  $q$ .

### 4.1 Cartes distinguées et lemmes techniques

**Définition 4.1.1.** On dit qu'une carte feuilletée  $(U, \phi)$  de  $\mathcal{F}$  est *distinguée* s'elle satisfait les conditions suivantes :

1. il existe une carte feuilletée  $(U', \phi')$  telle que  $\bar{U} \subset U'$  et  $\phi'|_U = \phi$ .
2.  $\phi(U) = (-1, 1)^n$  ;

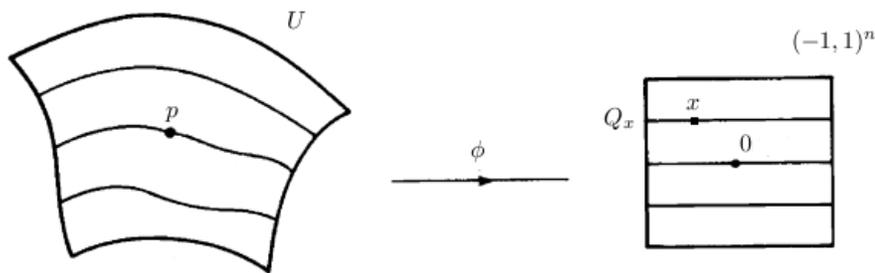


FIGURE 4.1 – Carte distinguée

C'est clair que tout point  $p$  de  $\text{int}(M)$  appartient à une carte distinguée  $(U, \phi)$  avec  $\phi(p) = (0, \dots, 0)$ .

Dorénavant, on notera  $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)^q$  la projection sur les dernières  $q$  coordonnées.

Si  $(U, \phi)$  est une carte distinguée et  $x \in (-1, 1)^q$ , on appelle aussi, dans la suite du chapitre 4, l'ensemble  $\phi^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x))$  plaque de  $U$ , et on la notera souvent par  $Q_x$  ou  $Q$ . Notons que chaque plaque  $Q$  est contenue dans une seule feuille de  $\mathcal{F}$ , qu'elle est difféomorphe à  $(-1, 1)^{n-q}$  et que

$$U = \bigcup_{x \in (-1, 1)^q} Q_x.$$

**Lemme 4.1.2.** *Si  $(U_i, \phi_i)$  et  $(U_j, \phi_j)$  sont deux cartes distinguées avec  $U_i \subset U_j$  et si  $Q_i$  est une plaque de  $U_i$ , alors il existe une carte distinguée  $(U'_i, \phi'_i)$  telle que :*

1.  $Q_i \subset U'_i \subset U_i$  et  $Q_i$  est une plaque de  $U'_i$  ;
2. si  $Q_j$  est une plaque de  $U_j$  avec  $Q_j \cap U'_i \neq \emptyset$  alors  $Q_j \cap U_i$  est une plaque de  $U'_i$ .

**Remarque.** Notons que la condition 2 du lemme n'est pas triviale : en effet, a priori, il se pourrait que  $Q_j \cap U_i$  ait plusieurs composantes connexes (figure 4.2) ; il faut vraiment, donc, se restreindre à une carte distinguée  $U'_i$  plus petite de  $U_i$  pour éviter ces problèmes.

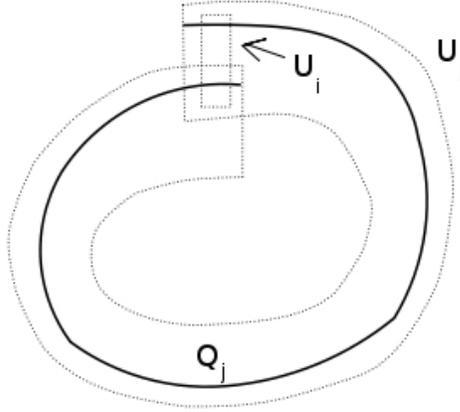


FIGURE 4.2 – Exemple de charte distinguée ne vérifiant pas le lemme 4.1.2

*Démonstration.* Pour le choix de  $U_i$  et  $U_j$ , chaque plaque de  $U_i$  est contenue dans une plaque de  $U_j$ . Donc, pour chaque  $x \in (-1, 1)^q$ , on a un unique  $x' \in (-1, 1)^q$  tel que  $Q_x \subset Q_{x'}$ . Posons  $\zeta : (-1, 1)^q \rightarrow (-1, 1)^q$ ,  $\zeta(x) = x'$  ; alors,  $\zeta$  est une immersion  $C^r$ . De plus, si on fixe une plaque  $Q_i = (\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(\hat{x})$  dans  $U_i$ , pour un certain  $\hat{x} \in (-1, 1)^q$ , on peut trouver un  $\epsilon > 0$  tel que, si l'on pose

$$\hat{U} := \prod_{i=1}^q (\hat{x}_i - \epsilon, \hat{x}_i + \epsilon),$$

alors  $\zeta|_{\hat{U}}$  est un plongement  $C^r$ .

Donc, finalement, il suffit de poser  $U'_i := (\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(\hat{U})$  et  $\phi'_i := \phi_i|_{\hat{U}}$  pour obtenir, quitte à modifier le domaine par une homothétie, la carte distinguée  $(U'_i, \phi'_i)$  voulue.  $\square$

Soit maintenant  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}\}$  une suite de cartes distinguées  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Soit  $x$  un point dans une plaque  $Q_1$  de  $U_{\lambda_1}$ . S'il existe des plaques  $Q_i$  de  $U_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$  telles que  $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$ ,  $i = 1, \dots, m$ , on appelle  $\mathfrak{C}$  une chaîne en  $x$  et on appelle longueur de  $\mathfrak{C}$  l'entier  $m$  (figure 4.3).

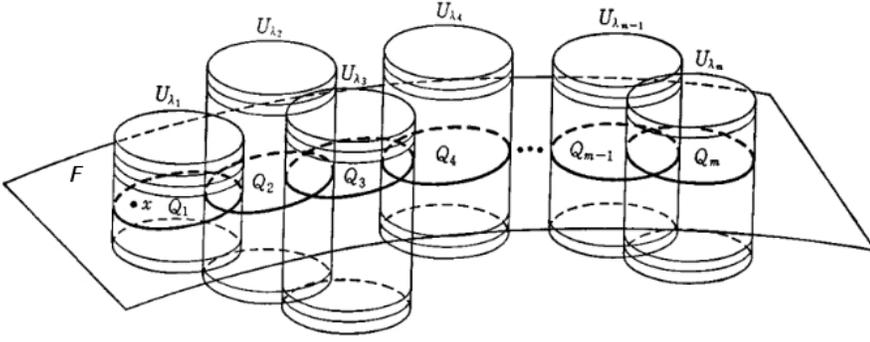


FIGURE 4.3 – Exemple de chaîne en  $x$  de longueur  $m$

**Remarque.** Si  $\mathfrak{C}$  est une chaîne en  $x \in Q$  alors elle l'est en tout point  $y \in Q$ .

On commence à étudier les propriétés des chaînes par un lemme immédiat :

**Lemme 4.1.3.** Soit  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}\}$  une chaîne en  $x$  et

$$O = \{z \in U_{\lambda_1} \mid \mathfrak{C} \text{ est une chaîne en } z\}.$$

Alors  $O$  est un ouvert de  $U_{\lambda_1}$  qui est réunion de plaques de  $U_{\lambda_1}$ .

*Démonstration.* Soit  $O_m = U_{\lambda_m}$  et, par récurrence,

$$O_i = (\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_i}^i)(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_i})(U_{\lambda_i} \cap O_{i+1}),$$

pour  $i = m - 1, \dots, 1$ . Alors on a simplement  $O = O_1$ , qui est bien ouvert dans  $U_{\lambda_1}$ .  $\square$

On va maintenant rappeler un lemme classique sur les espaces métriques qui sera utile pour la suite de cette section ainsi que pour l'étude de l'holonomie au chapitre suivant :

**Lemme 4.1.4.** Soit  $X$  un espace métrique,  $K$  un sous ensemble compact de  $X$  et  $U'_i$ ,  $i = 1, \dots, v'$ , ouverts de  $X$  tels que  $K \subset \cup_{i=1}^{v'} U'_i$ . Alors il existe des ouverts  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, v$  tels que :

1.  $K \subset \cup_{i=1}^v U_i$  ;
2. si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors  $U_i \cup U_j \subset U_k$  pour un  $1 \leq k \leq v'$ .

*Démonstration (Idée).* Comme  $K$  est un espace métrique compact, on peut trouver un nombre de Lebesgue  $\delta > 0$  associé au recouvrement ouvert  $\{U'_i \cap K\}_i$  de  $K$ . Alors, il suffit de choisir les  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, v$ , satisfaisants la condition 1 avec diamètre  $d(U_i) < \frac{\delta}{2}$ .  $\square$

Voici un autre lemme sur les propriétés des chaînes en un point fixé :

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $F$  une feuille et soient  $x, y \in F$ . Alors il existe une chaîne  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}\}$  en  $x$  telle que :*

1.  $x \in U_{\lambda_1}$  et  $y \in U_{\lambda_m}$  ;
2. si  $\mathfrak{C}$  est aussi un chaîne en un certain point  $z \in U_{\lambda_1}$  contenu dans une feuille  $F'$  et si  $\{Q'_i \mid i = 1, \dots, m\}$  est une chaîne de plaques associée à  $\mathfrak{C}$  en  $z$  telle que

$$Q'_i \subset U_{\lambda_i} \cap F', \quad z \in Q'_1, \quad i = 1, \dots, m,$$

alors, pour chaque  $i = 1, \dots, m-1$ ,  $Q'_{i+1}$  est l'unique plaque de  $U_{\lambda_{i+1}}$  qui intersecte  $Q'_i$  et, de même,  $Q'_i$  est l'unique plaque de  $U_{\lambda_i}$  qui intersecte  $Q'_{i+1}$ .

*Démonstration.* Soit  $l : [0, 1] \rightarrow F$  une courbe continue avec  $l(0) = x$  et  $l(1) = y$ . Recouvrons  $l([0, 1])$  par des cartes distinguées et choisissons finies des cartes parmi elles pour construire une chaîne  $\mathfrak{C}'' = \{U_{\xi_1}, \dots, U_{\xi_{m'}}\}$  en  $x$ , telle que  $x \in U_{\xi_1}$  et  $y \in U_{\xi_{m'}}$ .

En regardant  $\cup_{i=1}^{m'} U_{\xi_i}$  comme un espace métrique, on peut appliquer le lemme 4.1.4 à  $U'_i = U_{\xi_i}$ ,  $v' = m'$  et  $K = l([0, 1])$  pour obtenir une chaîne  $\mathfrak{C}' = \{U_{\lambda'_1}, \dots, U_{\lambda'_m}\}$  en  $x$ , avec  $y \in U_{\lambda'_m}$  et telle que si  $U_{\lambda'_i} \cap U_{\lambda'_j} \neq \emptyset$  alors  $U_{\lambda'_i} \cup U_{\lambda'_j} \subset U_{\xi_k}$  pour un certain  $k$ .

Soit, maintenant,  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , une chaîne de plaques associée à  $\mathfrak{C}'$  en  $x$ , avec  $x \in Q_1$  et  $y \in Q_m$ . Comme  $\emptyset \neq Q_1 \cap Q_2 \subset U_{\lambda'_1} \cap U_{\lambda'_2}$ , il existe un  $k$  tel que  $U_{\lambda'_1} \cup U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_k}$ . En appliquant, or, le lemme 4.1.2 à  $U_{\lambda'_1} \subset U_{\xi_k}$  et  $U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_k}$ , on obtient des cartes distinguées  $(U_{\lambda'_1}, \phi_{\lambda'_1})$  et  $(U_{\lambda'_2}, \phi_{\lambda'_2})$  telles que

$$Q_1 \subset U_{\lambda'_1}, \quad Q_2 \subset U_{\lambda'_2},$$

chacune satisfaisante la propriété 2 du lemme 4.1.2. Maintenant, on peut supposer que  $U_{\lambda'_2} \cup U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$ , pour un certain  $k'$ , car on a que  $\emptyset \neq Q_2 \cap Q_3 \subset U_{\lambda'_2} \cap U_{\lambda'_3}$  ; donc, on peut appliquer le lemme 4.1.2 à  $U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_{k'}}$  et  $U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$  pour obtenir des  $(U_{\lambda'_2}, \phi_{\lambda'_2})$  et  $(U_{\lambda'_3}, \phi_{\lambda'_3})$  qui vérifient les deux conditions du lemme. En itérant cette procédure, on obtient  $(U_{\lambda'_1}, \phi_{\lambda'_1})$  (déjà construite) et des  $(U_{\lambda'_i}, \phi_{\lambda'_i})$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , et une  $(U_{\lambda'_m}, \phi_{\lambda'_m})$ . On définit, finalement,  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$ , pour  $i = 1, \dots, m$  en posant

$$\begin{aligned} (U_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_1}) &= (U_{\lambda'_1}, \phi_{\lambda'_1}), \quad (U_{\lambda_m}, \phi_{\lambda_m}) = (U_{\lambda'_m}, \phi_{\lambda'_m}) \quad \text{et} \\ (U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) &= (U_{\lambda'_i}, \phi_{\lambda'_i}), \quad i = 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Clairement les  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$  vérifient la propriété 1 du lemme ; on veut montrer qu'ils vérifient aussi la 2. Comme  $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \subset U_{\xi_k}$  pour un certain  $k$ , il existe une unique plaque  $Q'_k$  de  $U_{\xi_k}$  avec  $Q'_1 \subset Q'_k$ . Comme chaque plaque de  $U_{\lambda_2}$  qui intersecte  $Q'_1$  est contenue dans  $U_{\lambda_2} \cap Q'_k$  et comme  $U_{\lambda_2} \cap Q'_k$  contient une seule plaque de  $U_{\lambda_2}$  par le lemme 4.1.2, aucune plaque de  $U_{\lambda_2}$  différente de  $Q'_2$  peut intersecter  $Q'_1$ . Le même argument, appliqué récursivement à la couple  $(U_{\lambda_i}, U_{\lambda_{i+1}})$  montre que la propriété 2 vaut aussi.  $\square$

On peut, finalement, énoncer un dernier résultat technique qui nous permettra d'analyser quelques propriétés topologiques des feuilles.

**Théorème 4.1.6.** *Soient  $x$  et  $y$  deux points d'une feuille  $F$ . Si l'on a une carte distinguée  $(U_\nu, \phi_\nu)$  au voisinage de  $y$ , il existe une carte distinguée  $(U_\mu, \phi_\mu)$  au voisinage de  $x$  telle que pour toute feuille  $F'$  avec  $F' \cap U_\nu \neq \emptyset$  on a  $F' \cap U_\mu \neq \emptyset$ . De plus,  $U_\mu$  peut être choisie de façon que si  $U_\mu$  a une plaque  $Q'_1$  avec  $Q'_1 \subset F'$  et  $x \notin Q'_1$ , alors  $F'$  contient une plaque de  $U_\nu$  qui ne contient pas  $y$ .*

*Démonstration.* Considérons la chaîne  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_m}\}$  en  $x$  donnée par le lemme 4.1.5. On peut supposer que  $U_{\lambda_m} \subset U_\nu$ . En appliquant le lemme 4.1.4 à  $\mathfrak{C}$ , on obtient  $O_1 \subset U_{\lambda_1}$  ; on choisit alors  $U_\mu$  ouvert dans  $O_1$  de façon que  $(U_\mu, \phi_\mu)$  soit une carte distinguée, où on a posé  $\phi_\mu := \phi_{\lambda_1}|_{U_\mu}$ , quitte à ajuster le codomaine. On veut montrer que cette carte satisfait la conclusion du théorème.

Choisissons une chaîne de plaques  $Q'_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , qui vérifie la condition 2 du lemme 4.1.5 ; alors, les plaques  $Q'_i$  et  $Q'_{i+1}$  se déterminent réciproquement de façon unique. Donc, si  $x \notin Q'_1$ , on a aussi  $y \notin Q'_m$ , et on a conclu.  $\square$

## 4.2 Quelques propriétés topologiques

On commence par un résultat sur la clôture des feuilles.

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un ensemble de feuilles et soit  $x \in \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$ . Si  $F$  est la feuille passante par  $x$ , alors  $F \subset \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$ . En particulier, pour chaque feuille  $F'$ , on a*

$$\overline{F'} = \bigcup_{F \cap \overline{F'} \neq \emptyset} F = \bigcup_{F \subset \overline{F'}} F .$$

*Démonstration.* Soit  $y$  un point de  $F$  et soit  $(U_\nu, \phi_\nu)$  une carte distinguée au voisinage de  $y$ . Par la première partie du théorème 4.1.6, on a une carte distinguée  $(U_\mu, \phi_\mu)$  au voisinage de  $x$  telle que chaque feuille intersectant  $U_\mu$  intersecte aussi  $U_\nu$ . Donc, on a  $U_\nu \cap (\cup_{\alpha \in A} F_\alpha) \neq \emptyset$  ; alors, comme on peut choisir  $U_\nu$  arbitrairement petit, on a  $y \in \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$ .  $\square$

On a aussi un résultat relatif au saturé d'un ouvert.

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $O$  un ouvert de  $M$ . Alors*

$$\bigcup_{F \cap O \neq \emptyset} F$$

*est ouvert aussi.*

*Démonstration.* Notons  $Y$  l'ensemble en question : on montre que  $Y$  est voisinage de tous ses points. Si  $x \in Y$ , on a une feuille  $F$  contenant  $x$  telle que  $F \cap O \neq \emptyset$ . Pour  $y \in F \cap O$ , choisissons alors une carte distinguée  $(U_\nu, \phi_\nu)$  au voisinage de  $y$ , telle que  $U_\nu \subset O$ . Par la première partie du théorème 4.1.6, il existe une carte distinguée  $(U_\mu, \phi_\mu)$  au voisinage de  $x$  avec la propriété que chaque feuille intersectant  $U_\mu$  intersecte  $U_\nu$  aussi et, donc,  $O$ ; alors  $U_\nu \subset O$ , c'est à dire que  $O$  contient un voisinage de  $x$ .  $\square$

Le théorème 4.1.6 permet aussi de donner une caractérisation, avec laquelle on peut travailler facilement, pour les feuilles qui sont des sous variétés plongées.

**Théorème 4.2.3.** *Une feuille  $F$  est propre si et seulement si il existe une carte distinguée  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$  telle que  $F \cap U_\lambda$  est la seule plaque de  $U_\lambda$  contenue dans  $F$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $F$  soit une feuille propre. Alors, si  $(U'_\lambda, \phi'_\lambda)$  est une carte distinguée qui a une plaque  $Q'$  contenue dans  $F$ , comme  $F$  est propre, on a un voisinage  $V$  de  $Q'$  contenu dans  $U'_\lambda$  tel que  $F \cap V = Q'$ . On peut alors construire une carte distinguée  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$  qui vérifie l'énoncé du théorème.

Supposons d'avoir  $(U_\mu, \phi_\mu)$  telle que  $F \cap U_\lambda$  est l'unique plaque de  $U_\lambda$  contenue dans  $F$ . Soit  $x \in F$ . Pour le théorème 4.1.6, on a une carte distinguée  $(U_\mu, \phi_\mu)$  au voisinage de  $x$  telle que, pour chaque feuille  $F'$ ,  $F' \cap U_\lambda \neq \emptyset$  implique  $F' \cap U_\mu \neq \emptyset$  et si  $F'$  contient une plaque  $Q'_1$  de  $U_\mu$  avec  $x \notin Q'_1$  alors  $F'$  contient aussi une plaque de  $U_\lambda$  qui est différente de  $F \cap U_\lambda$ . Mais la seule plaque de  $U_\lambda$  contenue dans  $F$  est  $F \cap U_\lambda$  et, donc, si  $x \notin F'$  on a que  $F' \neq F$ . Alors la seule plaque de  $U_\mu$  contenue dans  $F$  est la plaque contenant  $x$  et  $F$  est plongée.  $\square$

On peut, finalement, énoncer une caractérisation des feuilles compactes, qui sera très utile dans la suite :

**Théorème 4.2.4.** *Si  $F$  est compacte, pour chaque carte distinguée  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ ,  $F \cap U_\lambda$  est constituée d'un nombre fini de plaques de  $U_\lambda$ . De plus, s'il existe un ensemble compact  $E$  tel que  $F \subset E \subset M$ , alors cette condition est aussi suffisante pour la compacité de  $F$ .*

*Démonstration.* Pour la première partie, supposons  $F$  compacte et supposons, par absurde,  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$  carte distinguée avec  $F \cap U_\lambda$  constituée d'une infinité de plaques. Mais alors, comme chacune de ces plaques est ouverte dans la feuille  $F$  par définition même de la topologie des feuilles, on peut trouver un recouvrement infini de  $F$  dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini : c'est absurde par compacité de  $F$ .

Supposons, or, qu'il existe un ensemble  $E$  compact tel que  $F \subset E \subset M$  et que, pour chaque  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ ,  $F \cap U_\lambda$  est une famille fini de plaques. Comme  $E$  est compact, il est recouvert par un nombre fini de cartes distinguées. Donc,  $F$  est une réunion finie de plaques fermées et est, alors, compacte.  $\square$

## Chapitre 5

# Holonomie et théorèmes de stabilité

Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$  feuilletée par  $\mathcal{F}$  de codimension  $q$  et de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Dans cette partie on va étudier les propriétés locales au voisinage d'une feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ .

### 5.1 Systèmes cohérents de cartes

On montre que, étant donné un compact  $K$  contenu dans une feuille  $F$ , on peut trouver une famille de cartes distinguées qui recouvrent  $K$  même et qui ont des propriétés très agréables.

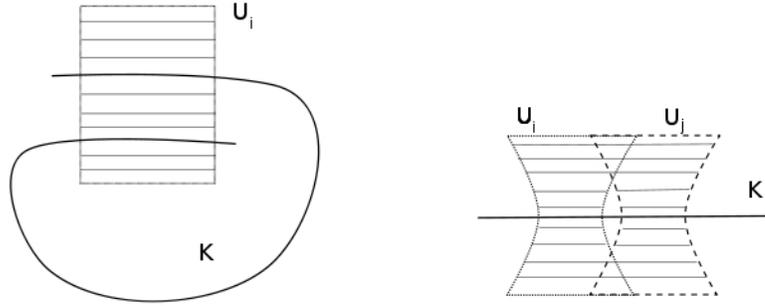
**Théorème 5.1.1.** *Soit  $K$  un sous ensemble compact d'une feuille  $F$ . Alors il existe une famille  $\mathfrak{N}(K) = \{(U_i, \phi_i) | i = 1, \dots, v\}$  de cartes distinguées qui vérifient les propriétés suivantes :*

1.  $K \subset \cup_{i=1}^v U_i$ ,
2. pour tout  $U_i$ ,  $U_i \cap K$  est contenu dans une plaque  $Q_i$  de  $U_i$  : en particulier, on peut choisir  $Q_i = \phi_i^{-1}(\pi^{-1}(0))$  ;
3. si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , alors  $U_i \cap U_j \cap K \neq \emptyset$  ;
4. si  $U_i, U_j$  sont tels que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , il existe une carte distinguée  $(U_{ij}, \phi_{ij})$  telle que :
  - (a)  $U_i \cup U_j \subset U_{ij}$  ;
  - (b) si  $Q_{ij}$  est une plaque de  $U_{ij}$  et  $Q_{ij} \cap U_i \neq \emptyset$ ,  $Q_{ij} \cap U_i$  est une plaque de  $U_i$  et de même avec  $U_j$  ;
5. si  $(U_{ij}, \phi_{ij})$  et  $(U_{kl}, \phi_{kl})$  sont comme en 4, avec  $U_{ij} \cap U_{kl} \neq \emptyset$ , il existe une carte distinguée  $(U_{ijkl}, \phi_{ijkl})$  telle que :
  - (a)  $U_{ij} \cup U_{kl} \subset U_{ijkl}$  ;

(b) si  $Q_{ijkl}$  est une plaque de  $U_{ijkl}$  et si  $Q_{ijkl} \cap U_{ij} \neq \emptyset$ ,  $Q_{ijkl} \cap U_{ij}$  est une plaque de  $U_{ij}$  et de même pour  $U_{kl}$ .

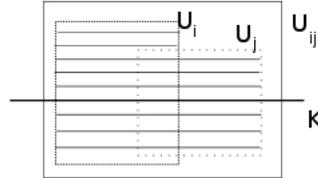
On appelle la famille  $\mathfrak{N}(K)$  un *système cohérent de cartes* sur  $K$ .

**Remarque.** Pour mieux comprendre ce qui se passe “usuellement” et ce qui est, par contre, interdit, on peut voir la figure 5.1.



(a) Cas interdit par la propriété 2.

(b) Cas interdit par la propriété 3.



(c) Cas typique pour la propriété 4;  
pour la 5 c'est pareil.

FIGURE 5.1 – Petite explication du théorème 5.1.1

*Démonstration.* Comme  $K$  est compact, on peut choisir un nombre fini de cartes distinguées  $(U_i, \phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, v$ , telles que  $K \subset \cup_{i=1}^v U_i$ . La propriété 1 est, donc, vérifiée.

On a aussi que  $U_i \cap K$  est contenu dans une réunion finie de plaques de  $U_i$ , car  $K$ , compact, est recouvert par la famille des plaques, ouverts dans  $K$ , qui sont contenues dans un des  $U_k$  choisis. Alors, étant donnée une plaque  $Q_i$  de  $U_i$  qui intersecte  $K$ , le même raisonnement qu'on a fait dans le lemme 4.1.2 montre qu'on peut choisir une carte distinguée  $(U'_i, \phi'_i)$  telle que

1.  $Q_i \subset U'_i \subset U_i$ ,
2. la plaque  $Q_i$  est aussi un plaque de  $U'_i$ ,
3.  $Q_i$  est la seule plaque de  $U'_i$  qui intersecte  $K$ .

De plus, c'est facile de voir qu'on peut aussi choisir  $(U'_i, \phi'_i)$  de façon que  $Q_i = \phi_i'^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(0))$ . Donc, quitte à changer  $(U'_i, \phi'_i)$  avec  $(U_i, \phi_i)$ , la propriété 2 est vérifiée aussi.

Notons qu'on peut supposer aussi que les  $U_i$  satisfont la propriété suivante : si  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ , alors  $\overline{Q_i} \cap \overline{Q_j} = \emptyset$ .

De plus, comme  $(U_i, \phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, v$ , sont des cartes distinguées telles que  $K \subset \cup_{i=1}^v U_i$ , en regardant  $\cup_{i=1}^v U_i$  comme espace métrique (cette réunion l'est car sous-ensemble de la variété  $M$ , qui est bien un espace métrique) et en appliquant le lemme 4.1.4, on obtient des cartes distinguées  $(V_i, \psi_i)$ ,  $i = 1, \dots, v$  qui vérifient  $V_i \cup V_j \subset U_k$  pour un certain  $k$  : on pose alors  $U_{ij} := U_k$ . Puis, en appliquant le lemme 4.1.2 aux ouverts  $V_i \subset U_{ij}$  et  $V_j \subset U_{ij}$ , on obtient des cartes distinguées  $(V_{i'}, \psi_{i'})$  et  $(V_{j'}, \psi_{j'})$  telles que  $Q_i \subset V_{i'} \subset V_i$  et  $Q_j \subset V_{j'} \subset V_j$ . Donc, quitte à considérer les  $(V_i, \psi_i)$  à la place des  $(U_i, \phi_i)$ , on obtient aussi la propriété 4 en gardant la 1 et la 2.

Le même raisonnement appliqué à la famille des  $U_i$ , qu'on a obtenue tout à l'heure, montre qu'on peut choisir  $\{(U_i, \phi_i)\}_i$  vérifiant aussi la propriété 5.

Maintenant, si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  mais  $U_i \cap U_j \cap K = \emptyset$ , pour deux indices  $i$  et  $j$ , alors, grâce au lemme 4.1.2, on peut trouver deux cartes distinguées  $(U'_i, \phi'_i)$  et  $(U'_j, \phi'_j)$  telles que  $Q_i \subset U'_i \subset U_i$ ,  $Q_j \subset U'_j \subset U_j$ ,  $Q_i$  et  $Q_j$  sont plaques de  $U'_i$  et  $U'_j$  respectivement et  $U'_i \cap U'_j = \emptyset$ . Donc, quitte à changer  $(U_i, \phi_i)$  avec  $(U'_i, \phi'_i)$  et  $(U_j, \phi_j)$  avec  $(U'_j, \phi'_j)$ , la propriété 3 est vérifiée aussi par les  $(U_i, \phi_i)$ .  $\square$

Fixons, maintenant,  $K$  un compact contenu dans une feuille  $F$  et  $\mathfrak{A}(K)$  un système cohérent sur  $K$  de cartes distinguées. Une chaîne  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  en  $x$  est dite *chaîne cohérente en  $x$*  si  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{A}(K)$  pour  $i = 1, \dots, m'$ .

**Lemme 5.1.2.** *Si  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  est une chaîne cohérente en  $x$  qui est aussi une chaîne en  $z \in U_{\lambda_1}$ , alors on a une unique chaîne de plaques  $Q'_i \subset U_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, m'$ , avec  $z \in Q'_1$ , associée à  $\mathfrak{C}$ .*

*Démonstration.* On montre, par récurrence, que les  $Q'_i$  sont uniquement déterminées.

$Q'_1$  est clairement uniquement déterminée. Supposons, donc,  $Q'_i$  uniquement déterminée pour  $i = 1, \dots, j < m'$ . Par le théorème 5.1.1, on a une carte distinguée  $(U_{\lambda_j \lambda_{j+1}}, \phi_{\lambda_j \lambda_{j+1}})$  telle que  $U_{\lambda_j} \cup U_{\lambda_{j+1}} \subset U_{\lambda_j \lambda_{j+1}}$  et vérifiant la propriété 4b.

On a alors que  $Q'_{j+1}$  est uniquement déterminée, dès que  $Q'_j$  est entièrement contenue dans une plaque  $Q_{j,j+1}$  de  $U_{\lambda_j \lambda_{j+1}}$  qui intersecte  $U_{\lambda_{j+1}}$  forcement en une et une seule plaque de  $U_{\lambda_{j+1}}$ .  $\square$

Soit  $x \in K$  et  $m$  un entier positif. Supposons qu'il existe un point  $z$  tel que toute chaîne cohérente  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  en  $x$  avec longueur  $m'$ ,  $m' \leq m$ , soit aussi une chaîne en  $z$ . On dit, alors, que  $z$  est un *point admissible* pour les chaînes cohérentes en  $x$  de longueur au plus  $m$ .

**Lemme 5.1.3.** *L'ensemble de tous les points admissibles pour les chaînes cohérentes en  $x$  de longueur au plus  $m$  est un ouvert  $A$  qui vérifie*

$$\bigcap_{\substack{U \in \mathfrak{N}(K) \\ x \in U}} (U \cap K) \subset A \subset \bigcap_{\substack{U \in \mathfrak{N}(K) \\ x \in U}} U.$$

*Démonstration.* On a seulement un nombre fini de chaînes cohérentes en  $x$  de longueur au plus  $m$ ; en considérant l'ensemble  $O$  donné par le lemme 4.1.3 pour chaque chaîne cohérente, leur intersection est l'ouvert  $A$  cherché, qui vérifie bien les inclusions dans l'énoncé.  $\square$

Soit  $l : [0, 1] \rightarrow K$  une courbe continue dans  $K$ . On dit *chaîne cohérente au dessus de  $l$*  une chaîne cohérente en  $l(0)$   $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  telle qu'il existe  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, m'$  avec

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m'} = 1$$

et

$$l([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\lambda_i}, \quad i = 1, \dots, m'.$$

Évidemment, donnée une courbe  $l$  continue sur  $K$ , il existe toujours une chaîne cohérente avec  $l(0) \in U_{\lambda_1}$  et  $l(1) \in U_{\lambda_{m'}}$ .

Avant de procéder avec l'étude des propriétés de ces chaînes cohérentes au dessus des arcs continus, on donne un résultat qui suit de tout ce qu'on a dit jusqu'alors mais qui sera aussi très utile dans la suite. Pour cela, on écrit, en utilisant la notation du chapitre 4,  $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)^q$  la projection sur les dernières composantes,  $n$  étant la dimension de  $M$  et  $q$  étant la codimension de  $\mathcal{F}$ .

**Lemme 5.1.4** (de trivialisations globale). *Soit  $l : I \rightarrow M$  un arc continu, injectif et avec image contenue dans une feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ . Alors il existe un voisinage  $W$  de  $l(I)$  et un difféomorphisme  $h : (-1, 1)^{n-q} \times (-1, 1)^q \rightarrow W$  tel que les feuilles de  $h^*\mathcal{F}$  soient données par  $\hat{\pi}^{-1}(y)$ , pour chaque  $y \in (-1, 1)^q$ .*

*Démonstration.* Fixons, avec les notations qu'on a utilisé tout à l'heure,  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  une chaîne cohérente au dessus de  $l$  telle que  $l([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, m'$ .

On construit  $W$  et  $h$  par récurrence : pour chaque  $1 \leq k \leq m'$ , on va construire  $W_k$  voisinage de  $l([0, t_k])$  et un difféomorphisme  $h_k : (-1, 1)^{n-q} \times (-1, 1)^q \rightarrow W_k$  tel que les feuilles de  $(h_k)^*\mathcal{F}$  soient données par les fibres de  $\hat{\pi}$ .

Pour  $k = 1$ , cela suit immédiatement de la définition de carte distinguée : en effet, il suffit de poser  $W_1 = U_{\lambda_1}$  et  $h_1 = \phi_{\lambda_1}^{-1} : (-1, 1)^n \rightarrow U_{\lambda_1}$ , où  $\phi_{\lambda_1}$  est l'application de la carte distinguée  $(U_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_1})$ .

Supposons, maintenant, d'avoir construit jusqu'à  $W_{k-1}$  et  $h_{k-1}$ .

On aura alors  $l([0, t_k]) \subset W_{k-1} \cup U_{\lambda_k}$ , où, par hypothèse de récurrence, on a aussi  $W_{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} U_{\lambda_j}$ . Alors on a, en particulier, que  $W_{k-1} \cap U_{\lambda_k} \subset U_{\lambda_{k-1}} \cap U_{\lambda_k}$ , où, pour les propriétés des chaînes cohérentes qu'on a énoncées dans le théorème 5.1.1,  $\phi_{\lambda_k}(U_{\lambda_{k-1}} \cap U_{\lambda_k})$  est de la forme  $(a, b)^{n-q} \times (c, d)^q$ . Grâce à tout ça,

c'est facile de construire un voisinage  $W_k$  de  $l([0, t_k])$  et un difféomorphisme  $h_k : (-1, 1)^n \rightarrow W_k$  qui vérifie la propriété voulue ; on omet les détails de la construction.  $\square$

On revient maintenant à la discussion des propriétés des chaînes au dessus des arcs avec le lemme suivante :

**Lemme 5.1.5.** *Soient  $\mathfrak{C} = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_{m'}}\}$  et  $\mathfrak{C}' = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_{m''}}\}$  deux chaînes cohérentes au dessus de  $l$  telles que  $U_{i_1} = U_{j_1}$  et  $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$ , et  $m', m'' \leq m$ . Soit  $z \in U_{i_1}$  un point admissible pour les chaînes cohérentes en  $l(0)$  de longueur au plus  $m$  et soient  $Q'_i, i = 1, \dots, m'$  et  $Q''_i, i = 1, \dots, m''$ , avec  $Q'_1 = Q''_1$ , les chaînes de plaques en  $z$  dans  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  respectivement. Alors  $Q'_{m'} = Q''_{m''}$ .*

*Démonstration.* On prend des subdivisions

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m'} = 1, \quad 0 = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{m''} = 1$$

telles que  $l([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k}, k = 1, \dots, m'$  et  $l([t'_{k-1}, t'_k]) \subset U_{j_k}, k = 1, \dots, m''$ . On peut, alors, trouver un raffinement commun  $0 = t''_0 < t''_1 < \dots < t''_{m'''} = 1$  tel que pour chaque  $k''$

$$[t''_{k''-1}, t''_{k''}] \subset [t_{k-1}, t_k] \quad \text{et} \quad [t''_{k''-1}, t''_{k''}] \subset [t'_{k'-1}, t'_{k'}]$$

pour  $k, k'$  convenables ; en particulier, on a aussi  $l([t''_{k''-1}, t''_{k''}]) \subset l([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k}$  et  $l([t''_{k''-1}, t''_{k''}]) \subset l([t'_{k'-1}, t'_{k'}]) \subset U_{j_{k'}}$ . Alors,  $U_{i_k} \cap U_{j_{k'}} \neq \emptyset$  et, par la propriété 4 du théorème 5.1.1, on peut trouver une carte distinguée  $(U_{i_k j_{k'}}, \phi_{i_k j_{k'}})$  telle que  $U_{i_k} \cup U_{j_{k'}} \subset U_{i_k j_{k'}}$ .

On montre maintenant par récurrence sur  $k, k'$  et  $k''$ , qu'il existe une plaque  $\hat{Q}_{kk'}$  de  $U_{i_k j_{k'}}$  telle que  $Q'_k \cap Q''_{k'} \subset \hat{Q}_{kk'}$ . Si  $k'' = 1$ , on peut choisir  $k = k' = 1$  et, comme on a  $Q'_1 = Q''_1$ , c'est clair qu'il existe une plaque  $\hat{Q}_{11}$  de  $U_{i_1 j_1}$  telle que  $Q'_1 \cup Q''_1 \subset \hat{Q}_{11}$ .

Supposons, donc, d'avoir trouvé une telle plaque jusqu'aux indices  $k, k', k''$ . Si  $\delta, \delta' = 0$  ou 1, on a alors

$$[t''_{k''}, t''_{k''+1}] \subset [t_{k-1+\delta}, t_{k+\delta}] \cap [t'_{k'-1+\delta'}, t'_{k'+\delta'}].$$

En particulier,  $U_{i_{k+\delta}} \cap U_{j_{k'+\delta'}} \neq \emptyset$  et, par la propriété 4 du théorème 5.1.1, on peut trouver une carte distinguée  $(U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}, \phi_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}})$  telle que  $U_{i_{k+\delta}} \cup U_{j_{k'+\delta'}} \subset U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}$ . Comme  $Q'_{k+\delta}, Q''_{k'+\delta'} \subset U_{i_{k+\delta}} \cup U_{j_{k'+\delta'}}$ , on a aussi  $\hat{Q}_{kk'} \cap U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}} \neq \emptyset$ . Donc, grâce à la propriété 5 du théorème 5.1.1, c'est facile de voir qu'il y a une unique plaque  $\hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'}$  de  $U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}$  telle que  $\hat{Q}_{k, k'} \cap \hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'} \neq \emptyset$ . Comme on sait aussi que  $\hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'} \cap U_{i_{k+\delta}}$  est une plaque de  $U_{i_{k+\delta}}$  ; donc, elle doit forcément être égale  $Q'_{k+\delta}$ . De même,  $\hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'} \cap U_{j_{k'+\delta'}}$  doit coïncider avec  $Q''_{k'+\delta'}$ . On a, donc,

$$Q'_{k+\delta} \cup Q''_{k'+\delta'} \subset \hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'},$$

ce qui conclut le pas inductif.

Donc, on a, pour  $k = m'$ ,  $k' = m''$  et  $k'' = m'''$ , une unique plaque  $\hat{Q}_{m',m''}$  telle que

$$Q'_{m'} \cup Q''_{m''} \subset \hat{Q}_{m',m''}.$$

Comme  $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$ , on a, par la propriété 5 du théorème 5.1.1, que  $Q'_{m'} = Q''_{m''}$ .  $\square$

On se demande, maintenant, quels sont les effets d'une "modification continue" de la courbe  $l$  sur les chaînes cohérentes associées.

Fixons, donc, deux courbes continues

$$l_0 : [0, 1] \rightarrow K, \quad l_1 : [0, 1] \rightarrow K,$$

avec  $x = l_0(0) = l_1(0)$ ,  $y = l_0(1) = l_1(1)$ , qui soient homotopes à extrémités fixées; on note  $\{l_s\}_{0 \leq s \leq 1}$  la famille de courbes donnée par l'homotopie entre  $l_0$  et  $l_1$ .

Soient  $\mathfrak{C} = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_{m'}}\}$  et  $\mathfrak{C}' = \{U_{j_1}, \dots, U_{j_{m''}}\}$  deux chaînes cohérentes au dessus, respectivement, de  $l_0$  et  $l_1$ , avec  $U_{i_1} = U_{j_1}$  et  $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$ .

Maintenant, on peut trouver une subdivision  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_u = 1$  et des chaînes cohérentes en  $x$

$$\mathfrak{C}^{(k)} = \{U_1^{(k)}, \dots, U_{m_k}^{(k)}\}, \quad k = 0, \dots, u-1$$

telles que  $\mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}^{(1)} = \mathfrak{C}'$ ,  $U_1^{(k)} = U_{i_1}$  et  $U_{m_k}^{(k)} = U_{i_{m'}}$  et chaque  $\mathfrak{C}^{(k)}$  est cohérente au dessus de  $l_s$  pour  $s_k \leq s \leq s_{k+1}$ . On appelle les  $\mathfrak{C}^{(k)}$ ,  $k = 0, \dots, u-1$ , *homotopie* entre  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  et l'entier  $\max_k m_k$  la *longueur* de l'homotopie.

On a, alors, le résultat suivant :

**Théorème 5.1.6.** *Soit  $\mathfrak{C}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, u-1$  une homotopie de longueur au plus  $m$  entre les chaînes cohérentes  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  au dessus, respectivement, de  $l_0$  et  $l_1$ . Soit  $z$  un point admissible pour les chaînes cohérentes en  $l(0)$  de longueur au plus  $m$  et soient  $Q'_i$ ,  $i = 1, \dots, m'$  et  $Q''_j$ ,  $j = 1, \dots, m''$  les chaînes de plaques en  $z$ , associées à  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$ , respectivement, avec, en particulier,  $Q'_1 = Q''_1$ . Alors  $Q'_{m'} = Q''_{m''}$ .*

*Démonstration.* Si  $Q'''_k$ ,  $k = 1, \dots, m_1$  est la chaînes de plaques, associée à  $\mathfrak{C}^{(1)}$ , au point  $z$ , comme  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(0)}$  et  $\mathfrak{C}^{(1)}$  sont deux chaînes cohérentes au dessus de  $l_{s_1}$ , le lemme 5.1.5 implique que  $Q'''_{m_1} = Q'_{m'}$ .

En appliquant le même argument, récursivement sur  $k$ , à  $\mathfrak{C}^{(k)}$ , on conclut facilement la démonstration.  $\square$

## 5.2 Holonomie

### 5.2.1 Germes d'applications

Soient  $U_1, U_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^q$  contenant 0 et soient

$$f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^q \text{ et } f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

avec  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ , deux difféomorphismes  $C^r$  au voisinage de 0, pour  $r \geq 0$ .

On pose  $f_1 \sim f_2$  s'il existe un ouvert  $U'$  de  $\mathbb{R}^q$ , avec  $0 \in U' \subset U_1 \cap U_2$ , tel que  $f_1|_{U'} = f_2|_{U'}$ .

La relation  $\sim$  est bien une relation d'équivalence ; chaque classe qu'elle définit est dite *germe* d'un difféomorphisme local  $C^r$  de  $\mathbb{R}^q$  au point 0 et on note par  $[f]$  la classe de  $f$  et par  $G_q^r$  l'ensemble de tous les germes en 0.

Si  $[f], [g] \in G_q^r$  sont représentés par  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $g : U' \rightarrow \mathbb{R}^q$  respectivement, on peut définir une application

$$g \circ f : f^{-1}(f(U) \cap U') \rightarrow \mathbb{R}^q$$

par  $g \circ f(x) = g(f(x))$ . Alors  $g \circ f$  définit un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^q$  et on pose  $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$ . C'est facile de voir que ça donne une loi de composition

$$\cdot : G_q^r \times G_q^r \rightarrow G_q^r$$

bien définie, grâce à laquelle on peut munir  $G_q^r$  d'une structure de groupe avec identité  $[id]$ , où  $id : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$  est l'identité, et où l'inverse d'un élément  $[f]$  est donné par  $[f]^{-1} = [f^{-1}]$ , bien défini car  $f^{-1}$  est bien définie au voisinage de 0.

### 5.2.2 Holonomie d'une feuille

Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$  et soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^r$  de  $M$  de codimension  $q$ . On fixe un point  $\hat{x}$  d'une feuille  $F$  et on considère le groupe fondamental  $\pi_1(F, \hat{x})$  de  $F$  basé en  $\hat{x}$ .

On considère un arc continu  $w : [0, 1] \rightarrow F$ , et, en fixant un compact  $K$  contenant  $w([0, 1])$ , on prend un système cohérent de cartes sur  $K$   $\mathfrak{N}(K) = \{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, \dots, v\}$ .

On choisit, maintenant, une chaîne cohérente  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m-1}}, U_{\lambda_m}\}$  au dessus de  $w$ , avec  $w(0) \in U_{\lambda_1}$ . Pour le lemme 4.1.3, l'ensemble  $\hat{O}$  de tous les  $z \in U_{\lambda_1}$  tels que  $\mathfrak{C}$  soit une chaîne en  $z$  est un ouvert de  $U_{\lambda_1}$ , contenant la plaque  $Q_1$  telle que  $U_{\lambda_1} \cap K \subset Q_1$ . Pour le lemme 5.1.2, la chaîne de plaques au point  $z$  associée à  $\mathfrak{C}$ ,

$$Q_i^{(z)}, i = 1, \dots, m, z \in Q_1^{(z)}, \text{ avec } Q_1^{(z)} \subset U_{\lambda_1} \text{ et } Q_m^{(z)} \subset U_{\lambda_m},$$

est uniquement déterminée par  $z$ .

On peut, alors, définir une application  $f : \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(\hat{O}) \rightarrow \mathbb{R}^q$  via

$$f(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(Q_1^{(z)})) = \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_m}(Q_m^{(z)}), \text{ pour } z \in \hat{O},$$

où  $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)^q$  est la projection sur les dernières  $q$  coordonnées. C'est facile de voir que, par construction,  $f$  est un difféomorphisme local  $C^r$  de  $\mathbb{R}^q$  au voisinage de l'origine.

Si  $\mathfrak{C}' = \{U_{\mu_1}, \dots, U_{\mu_{m'-1}}, U_{\mu_{m'}}\}$  est une autre chaîne au dessus de  $w$ , avec  $w(0) \in U_{\mu_1}$ , et si on construit un autre difféomorphisme local  $f'$  à partir de  $\mathfrak{C}'$ , comme on a fait pour  $\mathfrak{C}$  et  $f$ , on peut construire  $h : \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(U_{\lambda_1} \cap U_{\mu_1}) \rightarrow \mathbb{R}^q$  via

$$h(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(Q'_1 \cap U_{\lambda_1})) = \hat{\pi} \circ \phi_{\mu_1}(Q'_1 \cap U_{\mu_1}),$$

pour chaque plaque  $Q'_1$ . Alors  $h$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^q$  au voisinage de l'origine qui satisfait  $[f] = [h][f'][h]^{-1}$  : donc,  $w$  détermine un unique élément de  $G_q^r$ , à automorphismes intérieurs de  $G_q^r$  près.

De plus, si  $\bar{w} : [0, 1] \rightarrow F$ ,  $\bar{w}(0) = w(0)$  et  $\bar{w}(1) = w(1)$  est une autre courbe continue qui est homotope à  $w$  à extrémités fixées, on prend  $K$  compact de  $M$  qui contient une homotopie entre  $w$  et  $\bar{w}$ . On considère aussi

$$\bar{\mathcal{C}} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda_2}, \dots, U_{\lambda'_{m''-1}}, U_{\lambda_m}\}$$

une chaîne cohérente au dessus de  $\bar{w}$  et  $\bar{f}$  le difféomorphisme local associé comme ci-dessus. Par le théorème 5.1.6, on a alors facilement que  $[f] = [\bar{f}]$ .

Avant de parler d'holonomie pour courbes fermées, on va faire une petite digression pour énoncer un résultat, application immédiate de ce qu'on a dit ci-dessus. Il s'agit, en effet, d'un raffinement du lemme 5.1.4, vu dans la section 5.1 de ce chapitre, dans le cas de feuilletages de codimension 1 transversalement orientables :

**Lemme 5.2.1.** *Soit  $F$  une feuille d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  transversalement orientable, de codimension 1, sur une variété  $M$  de dimension  $n$ . et soient  $K$  un espace topologique compact, connexe par arcs et  $f_0 : K \rightarrow F$  une application continue homotope à une application constante. Alors il existe une famille continue  $f_t : K \rightarrow M$ , avec  $t \in [0, 1]$ , telle que, pour tout  $t$ ,  $f_t(K)$  soit contenu dans une feuille  $F_t$  et, pour tout  $x \in K$ , l'arc  $t \mapsto f_t(x)$  soit normal à  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Pour le théorème 5.1.1, il existe un système de cartes cohérentes  $\eta(f_0(K)) = \{(U_1, \phi_1), \dots, (U_m, \phi_m)\}$  au dessus de  $f_0(K)$ .

Remarquons la propriété suivante : si  $\gamma : S^1 \rightarrow K$  est une courbe continue, comme  $f_0$  est homotope à une application constante, on a que  $f_0 \circ \gamma : S^1 \rightarrow M$  est une courbe homotope à une constante. En particulier, tout chemin de plaques au dessus de  $f_0 \circ \gamma$  construit à partir d'une chaîne cohérente au dessus de son image sera trivial, au sens où la plaque initiale coïncidera avec celle finale.

Fixons, maintenant, un  $p \in f_0(K)$  et, si  $(U_i, \phi_i) \in \eta(f_0(K))$  est la carte distinguée contenant  $p \in U$  et si  $\phi_i(p) = \{x_1, \bar{x}\}$ , pour  $x_0 \in (-1, 1)$  et  $\bar{x} = \{x_2, \dots, x_n\} \in (-1, 1)^{n-1}$  convenables, posons  $\Sigma(t) = \phi_i^{-1}(\{x_1, \dots, x_{n-1}, t\})$ , pour  $t \in (-1, 1)$ .

Pour le lemme 5.1.3, il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour chaque  $t \in [0, \epsilon]$  et chaque arc  $\alpha : [0, 1] \rightarrow F$  avec  $\alpha(0) = p$ , il existe un chemin de plaques au dessus de  $\alpha$ , relativement à une chaîne cohérente au dessus de  $\alpha$  donnée.

Enfin, fixons un champ de vecteurs normal  $Y$  à  $\mathcal{F}$ , qui existe par l'hypothèse d'orientation transverse.

Pour chaque  $x \in K$ , on fait, alors, la construction suivante : on considère  $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow M$  avec  $\gamma_x(0) = p$ ,  $\gamma_x(1) = f_0(x)$  et on prend l'orbite  $Y_{f_0(x)}$  du champ de vecteurs normal à  $\mathcal{F}$  passant par  $f_0(x)$  ; on définit, donc,  $f_t(x)$  comme le seul point d'intersection de l'orbite  $Y_{f_0(x)}$  avec la plaque terminale de la chaîne de plaque au dessus de  $\gamma_x$ .

Il faut vérifier que cela ne dépend pas du choix de  $\gamma_x$ . En effet, la remarque

qu'on a fait tout à l'heure nous dit que, si  $\delta_x$  est une autre courbe avec  $\delta(0) = p$ ,  $\delta(1) = f_0(x)$ , alors  $f_0 \circ \gamma_x * \delta_x^{-1}$  est homotope à une constante.

Donc,  $f_t$  est une famille bien définie : de plus elle vérifie les propriétés dans l'énoncé.  $\square$

On peut, maintenant, retourner à parler d'holonomie de courbes fermées. Pour ce qu'on a dit avant le lemme, *pour chaque classe d'homotopie à extrémités fixées de arcs sur  $F$ , on a un élément de  $G_q^r$ , qui est unique à automorphismes intérieurs près* : en effet, l'élément  $[f]$  trouvé dépend du choix de la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}$  au dessus de  $K$ , mais la classe de conjugaison de  $[f]$  dans  $G_q^r$  n'en dépend pas, pour le même argument qu'on avait utilisé tout à l'heure pour montrer que la classe de conjugaison dans  $G_q^r$  d'une certain  $[f]$ , construite à partir d'un courbe fermée  $w$  étant donnée une chaîne  $\mathcal{C}$  au dessus de  $w$ , ne dépend pas, en effet, du choix de  $\mathcal{C}$ .

On peut, en particulier, construire une application

$$\Psi_{\hat{x}} : \pi_1(F, \hat{x}) \rightarrow G_q^r$$

en associant à chaque classe  $[w] \in \pi_1(F, \hat{x})$  le germe  $[f]$ , obtenu comme ci dessus à partir du représentant  $w$ .

De plus, on peut facilement vérifier, en utilisant seulement des chaînes cohérentes qui commencent et finissent avec un  $U_{\lambda_1}$  contenant  $\hat{x}$  fixé, que  $\Psi_{\hat{x}}$  est un morphisme de groupes.

Pour ce qui concerne le changement de point base du groupe fondamental, en choisissant un arc  $\alpha$  qui joint les deux points de base,  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$ , et en prenant le difféomorphisme local  $[\varphi]$  lui associé, on montre sans difficulté que l'on a

$$[\varphi] \cdot \Psi_{\hat{x}}(\gamma) \cdot [\varphi]^{-1} = \Psi_{\hat{y}}(\bar{\alpha}(\gamma))$$

pour chaque  $\gamma \in \pi_1(F, \hat{x})$ , où  $\bar{\alpha}$  est l'isomorphisme entre  $\pi_1(F, \hat{x})$  et  $\pi_1(F, \hat{y})$  induit par  $\alpha$  de la façon habituelle.

Remarquons que si on note, comme d'habitude,  $\pi_1(F)$  l'ensemble des classes de conjugaisons du groupe  $\pi_1(F, \hat{x})$  on a une application

$$\Psi : \pi_1(F) \rightarrow \{\text{classes de conjugaison dans } G_q^r\}$$

bien définie.

**Définition 5.2.2.** Le morphisme  $\Psi_{\hat{x}}$  s'appelle *holonomie* de la feuille  $F$  au point  $\hat{x}$ , et le sous groupe  $\text{Hol}(F, \hat{x}) := \Psi_{\hat{x}}(\pi_1(F, \hat{x}))$  de  $G_q^r$  *groupe d'holonomie* de  $F$  au point  $\hat{x}$ .

**Exemple 5.2.3.** Considérons le feuilletage de Reeb de la sphère  $S^3$  et fixons  $F$  comme étant la seule feuille compacte. Comme  $F \simeq S^1 \times S^1$ , on a bien  $\pi_1(F, \hat{x}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , où on peut choisir comme générateurs le méridien et la longitude de  $S^1 \times S^1$ . Alors, en faisant référence à la figure 5.2, on peut voir que le groupe d'holonomie de  $F$  en  $\hat{x}$  est aussi isomorphe à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , engendré par  $[f]$  et  $[g]$ , où

$$f, g : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

avec  $f(x) = x$  pour  $x \geq 0$ ,  $f(x) < x$  pour  $x < 0$  et  $g(x) = x$  pour  $x \leq 0$ ,  $g(x) < x$  pour  $x > 0$ .

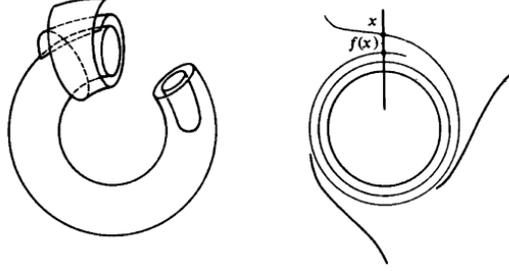


FIGURE 5.2 – Exemple de calcul d'un groupe d'holonomie

### 5.3 Stabilité locale

Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$ , et soit  $\mathcal{F}$  une feuilletage de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  et codimension  $q$  pour  $M$ . Fixons  $F$  une feuille compacte de  $\mathcal{F}$  avec groupe d'holonomie  $\text{Hol}(F)$  fini, d'ordre  $\nu$ , et  $\hat{x} \in F$  : on peut, alors, trouver une famille finie

$$\mathfrak{U} := \{[w_i]\}_{i=1}^\nu \subset \pi_1(F, \hat{x})$$

telle que  $\Psi(\mathfrak{U}) = \text{Hol}(F, \hat{x})$ .

En appliquant le théorème 5.1.1 à  $K = F$ , on obtient

$$\mathfrak{N}(F) = \{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, \dots, \nu\}.$$

Alors, pour la propriété 2 de ce théorème, on a  $U_i \cap F = Q_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ .

Pour chaque  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , on fixe un point  $x_i \in Q_i$  et une famille de courbes continues  $l_i$  telles que

$$l_i : [0, 1] \rightarrow F, l_i(0) = x_1, l_i(1) = x_i \text{ pour } i = 1, \dots, \nu.$$

Si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , pour la propriété 3 du théorème 5.1.1, on a

$$U_i \cap U_j \cap F = Q_i \cap Q_j \neq \emptyset.$$

Pour de tels  $U_i, U_j$ , on considère, donc, une courbe continue  $l_{ij}$  telle que

$$l_{ij} : [0, 1] \rightarrow Q_i \cup Q_j, l_{ij}(0) = x_i, l_{ij}(1) = x_j,$$

de façon que  $l_{ij}(t) = l_{ji}(1-t)$  pour chaque  $t \in [0, 1]$ .

On prend des chaînes cohérentes au dessus des courbes  $l_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ ,  $w_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , et  $l_{ij}$  de façon que :

1.  $\{U_1, U_2^{(i)}, \dots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i\}$  soit au dessus de  $l_i$ , pour  $i = 1, \dots, \nu$ ;

2.  $\{U_i, U_j\}$  soit au dessus de  $l_{ij}$  ;
3.  $\{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \dots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(i)}, U_1\}$  soit au dessus de  $w_k$ , pour  $k = 1, \dots, \nu$ .

Si on note  $w_k * l_i$  la juxtaposition des arcs  $w_k$  et  $l_i$ , bien définie car  $w_k(1) = l_i(0) = x_1$ , on a que

$$\mathfrak{C}^{(k)(i)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \dots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(i)}, U_1, U_2^{(i)}, \dots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i\}$$

est une chaîne cohérente au dessus de  $w_k * l_i$ .

Soit  $z \in U_1$  tel que  $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$  soit une chaîne cohérente en  $z$  ; alors  $z$  détermine une unique chaîne de plaques associée avec  $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$ , qui commence par une certaine plaque  $Q'_1$  et termine par une autre plaque  $Q'_i$ . Comme  $Q'_i$  ne dépend que de  $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$  et de  $[w_k] \in \pi_1(F, x_1)$ , on note  $Q'_i$  aussi par  $Q_{i,z}^{[w_k]}$ .

Supposons que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  ; alors on considère la courbe  $w_k * l_i * l_{ij} * l_j^{-1}$ , où  $l_j^{-1}(t) := l_j(1-t)$ . Comme c'est une courbe fermée pointée en  $x_1$ , on peut considérer  $\Psi(w_k * l_i * l_{ij} * l_j^{-1})$  qui, par le choix de la famille  $\mathfrak{A}$ , coïncide avec  $\Psi(w_{k'})$ , pour un  $k'$  convenable. Donc, comme  $\Psi$  est un morphisme de groupes, on a que  $\Psi(w_k * l_i * l_{ij}) = \Psi(w_{k'} * l_j)$ .

Soient, or,

$$\mathfrak{C}^{(k)(i)(j)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \dots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(i)}, U_1, U_2^{(i)}, \dots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i, U_j\}$$

la chaîne cohérente au dessus de  $w_k * l_i * l_{ij}$  et

$$\mathfrak{C}^{(k')(j)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k')}, \dots, \hat{U}_{m'_{k'}-1}^{(i)}, U_1, U_2^{(j)}, \dots, U_{m_j-1}^{(j)}, U_j\}$$

cela au dessus de  $w_{k'} * l_j$  et  $Q'_1, \dots, Q_{i,z}^{[w_k]}, Q'_j$  et  $Q'_1, \dots, Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$  les chaînes de plaques respectives associées.

Comme  $\Psi(w_k * l_i * l_{ij}) = \Psi(w_{k'} * l_j)$ , on a, alors,  $Q'_j = Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$  : en particulier, on a que

$$Q_{i,z}^{[w_k]} \cap Q_{j,z}^{[w_{k'}]} \neq \emptyset \quad (5.1)$$

Soit, or,  $\hat{m}$  la longueur maximale de toutes les chaînes considérées. On a alors le résultat suivant :

**Lemme 5.3.1.** *Soit  $\hat{V}$  l'ensemble des point admissibles pour les chaînes cohérentes en  $x_1$  de longueur au plus  $\hat{m}$ . Alors il existe un ouvert  $\hat{V}'$ , avec  $x_1 \in \hat{V}' \subset \hat{V}$ , tel que pour chaque  $z \in \hat{V}'$  on a*

$$\overline{Q_{i,z}^{[w_k]}} \subset \bigcup_{i=1}^v U_i, \quad k = 1, \dots, \nu, \quad i = 1, \dots, v.$$

*Démonstration.* Pour  $m \leq \hat{m}$ , soit  $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$  une chaîne cohérente de longueur au plus  $m'$ , avec  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{N}(F)$ . Fixons  $O_{m'}$  contenu dans  $U_{\lambda_{m'}}$  qui soit réunion de plaques de  $U_{\lambda_{m'}}$  et tel que

$$Q_{\lambda_{m'}} \subset O_{m'}, \quad \overline{O_{m'}} \subset \bigcup_{i=1}^v U_i.$$

On définit par récurrence  $O_i$ , pour  $i = m' - 1, \dots, 1$ , via la formule

$$O_i = \phi_{\lambda_i}^{-1} \circ \hat{\pi}^{-1}(\hat{\pi}(\phi_{\lambda_i}(U_{\lambda_i} \cap O_{i+1}))).$$

Alors, si on dénote l'ouvert  $O_1$  ainsi construit à partir de  $\mathfrak{C}$  par  $O_{\mathfrak{C}}$ , on a simplement que

$$\hat{V}' = \bigcap \{O_{\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{C} \text{ est un chaîne cohérente de longueur au plus } \hat{m}\},$$

qui est bien ouvert, car l'intersection est finie.  $\square$

Soient, donc,  $\hat{V}'$  l'ouvert donné par le lemme 5.3.1 et  $z \in \hat{V}'$  et supposons que  $z$  est dans une feuille  $F'$ . Soit aussi

$$L(z) = \bigcup \{Q_{i,z}^{[w_k]} \mid k = 1, \dots, \nu, i = 1, \dots, v\}.$$

On a clairement que  $L(z) \subset F'$  et qu'il est un ouvert de  $F'$ ; on montre, maintenant, que  $\overline{L(z)} = L(z)$ , c'est à dire que  $L(z)$  est aussi fermé dans  $M$  et, donc, dans  $F'$ .

Supposons  $y \in \overline{L(z)}$ ; alors,  $y \in \overline{Q_{i,z}^{[w_k]}}$ , pour certains  $i$  et  $k$ . Donc, par le lemme 5.3.1 ci dessus,  $y \in U_j$  pour un certain  $j$ . Si  $i \neq j$ , alors, pour (5.1), une plaque de  $U_j$  contenant  $y$  doit être forcément une plaque du type  $Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$  telle que  $Q_{i,z}^{[w_k]} \cap Q_{j,z}^{[w_{k'}]} \neq \emptyset$ . Alors, comme  $L(z)$  est ouvert et fermé dans  $F'$ , qui est connexe, on a forcément que

$$F' = L(z) = \bigcup_{i,k} \overline{Q_{i,z}^{[w_k]}}.$$

Mais, comme la réunion ci dessus est finie, on a  $F'$  compacte; on a, donc, prouvé la première partie du théorème suivante :

**Théorème 5.3.2** (Théorème de stabilité locale). *Soit  $F$  une feuille compacte d'une feuilletage  $\mathcal{F}$ , de classe  $C^r$  et codimension  $q$ ,  $r \geq 1$ , sur une variété  $M$  de classe  $C^s$  et dimension  $n$ . Supposons que  $\text{Hol}(F)$  soit fini. Alors on a :*

1. *pour chaque ouvert  $U$  de  $M$  contenant  $F$ , il existe un ouvert  $U'$  de  $M$ , réunion de feuilles compactes, tel que  $F \subset U' \subset U$ ;*
2. *si  $r \geq 2$ , on peut choisir  $U'$  dans 1 de façon que chaque feuille  $F'$  dans  $U'$  donne un revêtement de  $F$ .*

*Démonstration.* Il faut montrer le point 2. Pour cela, fixons une métrique riemannienne  $g$  sur la variété  $M$

Considérons, pour chaque point  $p \in F$ , le sous espace vectoriel  $D_p$  donné par  $(T_p \mathcal{F}_p)^\perp$ , où  $\mathcal{F}_p$  est la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $p$  et l'orthogonal est au sens de la métrique  $g$ .

C'est facile de vérifier que l'application  $\Psi : p \mapsto D_p$  est un champ de  $q$ -planes sur  $F$ .

On donne, maintenant, l'idée de comment on peut construire l'ouvert  $U'$  vérifiant la propriété 2, sans traiter les détails.

C'est un résultat connu en géométrie riemannienne qu'il existe, pour chaque point  $p \in M$ , un ouvert  $O_p$  de  $T_pM$  contenant 0 et une application  $\text{Exp}_p : O_p \rightarrow M$  qui est un difféomorphisme  $C^\infty$  sur son image et qui dépend "de façon  $C^\infty$ " du point  $p \in M$ .

Par compacité de  $F$ , on peut trouver un  $\epsilon > 0$ , un voisinage  $U'$  de  $F$  dans  $M$ , saturé par rapport à  $\mathcal{F}$ , et un difféomorphisme  $C^\infty$   $\text{Exp} : V \rightarrow U'$ . Ici  $V = \{v \in TM \mid \|v\|_g < \epsilon, v \in \Psi(p) \exists p \in F\} \subset TF \subset TM$  est le sous-fibré de  $TM$  formé par les vecteurs de  $TF$ , vu dans  $TM$ , de module inférieure à  $\epsilon$  et contenus dans  $\Psi(p) = D_p$  pour un certain  $p \in F$ .

Avec tout cela, la vérification de la propriété suivante est immédiate : les sous ensembles  $\text{Exp}(T^\epsilon \cap D_p)$ , pour  $p \in F$ , donnent les feuilles d'un feuilletage  $\mathcal{F}^*$  défini sur tout  $U'$ .

Ce feuilletage, par construction, est transverse à  $\mathcal{F}$ ; donc, si  $\mathcal{F}_p^*$  est la feuille de  $\mathcal{F}^*$  passant par un certain point  $p \in F$ , on a que, pour chaque  $F'$  feuille de  $\mathcal{F}$  contenue dans  $U'$ ,  $\mathcal{F}_p^* \cap F'$  est un ensemble fini.

On définit  $\pi : F' \rightarrow F$  comme  $\pi(y) = x$  si  $x \in F$  et  $y$  est un des points d'intersection avec  $F$  de la feuille  $\mathcal{F}_x^*$  de  $\mathcal{F}^*$  passant par  $x$ .

On vérifie facilement, grâce à cette construction explicite de  $\mathcal{F}^*$ , que le cardinal de les fibres de  $\pi$  au dessus de  $x \in F$  ne dépend pas du choix de  $x$ ; à partir de cela, on déduit aisément que  $\pi$  est un revêtement de classe  $C^r$  : on omet ici les vérifications explicites. □

On a un corollaire immédiat du théorème 5.3.2 ci dessus qui correspond, en effet, à la version plus utile, du point de vue pratique, du résultat de stabilité locale :

**Corollaire 5.3.3.** *Soit  $F$  une feuille compacte d'une feuilletage  $\mathcal{F}$ , de classe  $C^r$  et codimension  $q$ , sur une variété  $M$  de classe  $C^s$  et dimension  $n$ . Supposons  $\pi_1(F)$  fini; alors pour chaque  $U$  ouvert de  $M$  contenant  $F$ , il existe  $U'$  ouvert de  $M$  avec  $F \subset U' \subset U$  et tel que chaque feuille  $F' \subset U'$  vérifie  $\text{card}(\pi_1(F')) < \infty$ .*

*Démonstration.* On note que la condition que  $\pi_1(F)$  soit fini implique que  $\text{Hol}(\cdot)(F)$  soit fini. De plus, si dans un revêtement le groupe fondamental de l'espace de base est fini, alors celui de l'espace total l'est aussi.

Il suffit, donc, d'appliquer le théorème 5.3.2. □

## 5.4 Stabilité globale

Dans cette section, on considère une variété  $M$ , de classe  $C^s$  et dimension  $n$ , feuilletée par  $\mathcal{F}$ , de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de *codimension* 1.

Fixons un système cohérent de cartes  $\mathfrak{N}(F) = \{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, \dots, v\}$  pour une feuille compacte  $F$ . Comme  $\mathcal{F}$  est de codimension 1, on a  $\hat{\pi} \circ \phi_i : U_i \rightarrow (-1, 1)$  et chaque plaque de  $U_i$  est de la forme  $(\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(a)$ , avec  $-1 < a < 1$ .

On dit que  $\mathfrak{N}(F)$  est à deux côtés si pour chaque couple  $U_i, U_j \in \mathfrak{N}(F)$ , avec  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $\hat{\pi} \circ \phi_i(z)$  et  $\hat{\pi} \circ \phi_j(z)$  ont même signe pour chaque  $z \in U_i \cap U_j$ ; si ce n'est pas le cas, on dit que  $\mathfrak{N}(F)$  est à un côté. On dit aussi que  $F$  est à deux côtés s'il existe une  $\mathfrak{N}(F)$  à deux côtés et que  $F$  est à un côté sinon.

**Remarque.** En utilisant les propriétés des systèmes cohérents de cartes, on peut vérifier sans problèmes que  $F$  est à deux côtés *si et seulement si* il existe un champ  $C^{r-1}$  de vecteurs, défini sur un voisinage de  $F$ , qui est transverse à  $F$ .

**Lemme 5.4.1.** *Avec les hypothèses ci dessus, il existe un ouvert  $V$  de  $M$ , qui contient  $F$ , tel que chaque feuille  $F'$  avec  $F' \cap V \neq \emptyset$  vérifie une et une seule des conditions suivantes :*

1.  $F'$  est compacte et  $F \subset \cup_{i=1}^v U_i$ ; dans ce cas, on a :
  - (a) si  $F$  est à deux côtés,  $F' \cap U_i$  consiste d'une seule plaque; dans ce cas, si  $r \geq 2$ ,  $F'$  est aussi  $C^r$  difféomorphe à  $F$ ;
  - (b) si  $F$  est à un côté et  $F \neq F'$ ,  $F' \cap U_i$  consiste de deux plaques; dans ce cas, si  $r \geq 2$ ,  $F'$  donne aussi un revêtement  $C^r$  double de  $F$ ;
2.  $F'$  n'est pas compacte et  $\overline{F'} \cap \cup_{i=1}^v U_i$  contient une feuille compacte.

*Démonstration.* Soit  $\hat{x} \in F$  et soit  $\hat{O}$  l'ensemble des points admissibles pour les chaînes cohérentes en  $\hat{x}$  de longueur au plus  $v$ .

En suivant la construction faite dans la preuve du lemme 5.3.1, on obtient, à partir de  $\hat{O}$ , un  $\hat{O}'$  qui satisfait les propriétés suivantes : pour chaque feuille  $F'$  avec  $F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset$ , on a que  $F' \cap U_i \neq \emptyset$ , pour  $i = 1, \dots, v$  et que pour chaque  $i$ , on a une plaque  $Q'_i$  de  $U_i$  telle que  $Q'_i \subset F'$  et  $\overline{Q'_i} \subset \cup_{i=1}^v U_i$ .

Donc, si on énumère par  $\Lambda_i$  l'ensemble  $\{Q_i^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda_i}$  des plaques de  $U_i$  telles que

$$Q_i^{(\lambda)} \subset F', \quad \overline{Q_i^{(\lambda)}} \subset \bigcup_{i=1}^v U_i,$$

pour  $i = 1, \dots, v$ , cela est un ensemble non vide, c'est à dire que  $\Lambda_i \neq \emptyset$  pour chaque  $i$ .

Supposons, premièrement, que  $F$  soit à deux côtes; on fixe aussi  $\mathfrak{N}(F)$  à deux côtes. Définissons  $\Lambda'_i = \{\lambda \in \Lambda_i \mid \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \geq 0\} \subset \Lambda_i$ . Quitte à changer le signe aux images des  $\phi_i$ , on peut supposer que  $\Lambda'_i \neq \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, v$ . On définit, aussi, pour chaque  $i = 1, \dots, v$ , une plaque  $Q''_i$  de  $U_i$  en demandant que

$$\hat{\pi} \circ \phi_i(Q''_i) = \inf_{\lambda \in \Lambda'_i} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}), \quad i = 1, \dots, v.$$

Clairement,  $\overline{Q''_i} \subset \cup_{k=1}^v U_k$ . De plus, si  $y \in \overline{Q''_i}$ , alors  $y \in U_j$  pour un certain  $j$ , et, en particulier,  $y$  est dans une plaque de  $U_j$ . Mais on a alors  $y \in Q''_j$ , par définition de  $Q''_j$ . Donc,  $F_0 := \cup_{i=1}^v Q''_i = \cup_{i=1}^v \overline{Q''_i}$  est une feuille compacte.

Dans le cas où  $F'$  est compacte, on a, par le théorème 4.2.4, que  $\Lambda_i$  est fini et, donc, que  $F_0 \subset F'$ . Or, comme  $F_0$  est ouvert et fermé dans  $F'$  et  $F'$  est connexe, on a  $F' = F_0$  : en particulier, pour la propriété 2 des systèmes cohérents énoncée

dans le théorème 5.1.1, on a que  $F' \cap U_i = Q_i''$ . Enfin, dans le cas où  $F'$  n'est pas compacte,  $F_0 \subset \overline{F'}$ , par définition des  $Q_i''$ .

Donc, dans le deux cas,

$$V = \bigcup_{F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset} F'$$

est l'ouvert cherché.

Supposons, maintenant,  $F$  à un côté. On décompose, pour  $i = 1, \dots, v$ ,  $\Lambda_i = \Lambda_i' \cup \Lambda_i''$ , avec  $\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \geq 0$  pour  $\lambda \in \Lambda_i'$  et  $\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \leq 0$  pour  $\lambda \in \Lambda_i''$ . On définit, donc, des plaques  $Q_i'', Q_i''' \subset U_i \cap F'$  via

$$\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i'') = \inf_{\lambda \in \Lambda_i'} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}), \quad \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i''') = \sup_{\lambda \in \Lambda_i''} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}),$$

pour  $i = 1, \dots, v$ .

Alors, avec le même argument que dans le cas à deux côtés, on peut montrer que  $F_1 = \bigcup_{i=1}^v (Q_i'' \cup Q_i''')$  est une feuille compacte. Comme ci dessus, donc, si  $F'$  est aussi compacte, on a facilement  $F' = F_1$ ; si  $F'$  n'est pas compacte, on a  $F_1 \subset \overline{F'}$  et, dans le deux cas,  $V = \bigcup_{F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset} F'$  est l'ouvert cherché.

Pour vérifier l'énoncé pour le cas  $r \geq 2$ , il suffit d'appliquer le même raisonnement utilisé dans le théorème 5.3.2 (2) et on ne le traitera pas en détail ici.  $\square$

Avec tous ces résultats, on arrive finalement au théorème plus important de cette section, dû à Reeb :

**Théorème 5.4.2** (Théorème de stabilité globale). *Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$ , compacte, connexe, et soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^r$  de codimension 1 sur  $M$ , avec  $r \geq 2$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  a une feuille compacte avec groupe fondamental fini. Alors chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est compacte et avec groupe fondamental fini.*

*Démonstration.* Soit  $\{F_\alpha \mid \alpha \in A'\}$  l'ensemble des feuilles compactes avec groupe fondamental fini, et soit  $W = \bigcup_{\alpha \in A'} F_\alpha$ .

$W$  est un ouvert de  $M$ , car si  $F \in W$ , par le théorème 5.3.2, il existe un ouvert  $U'$  de  $M$  tel que  $F \in U'$  et  $U'$  est réunion de feuilles compactes avec groupe fondamental fini, c'est à dire  $U' \subset W$ . On veut, donc, montrer que  $W = M$ .

Supposons, par l'absurde, que  $W \neq M$ ; donc, comme  $M$  est connexe,  $\overline{W} \neq W$ . Soit, alors,  $W'$  une composante connexe de  $W$  telle que  $\overline{W'} \neq W'$  : elle existe car  $W$  n'est pas connexe. Soit, alors,  $y \in \overline{W'} \setminus W'$ . Si  $y \in F_\gamma$ , pour un certain  $\gamma$ , alors  $F_\gamma \subset \overline{W'}$ , car  $W$  est saturé par rapport à  $\mathcal{F}$  et, donc, par le théorème 4.2.1,  $\overline{W'}$  l'est aussi.

Soit  $(U_\lambda, \phi_\lambda)$  une carte distinguée et soit  $\{\phi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(a_\sigma, b_\sigma))\}_{\sigma \in \Sigma}$  l'ensemble des composantes connexes de  $W' \cap U_\lambda$ . Pour chaque  $\sigma \in \Sigma$ , soit  $W_\sigma$  l'ensemble des feuilles qui intersectent  $\phi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(a_\sigma, b_\sigma))$  : alors, par le théorème 4.2.2,  $W_\sigma$  est un ouvert de  $W'$ . D'autre part,  $C := \{\phi_\lambda^{-1}(0, \dots, 0, x_n) \mid a_\sigma < x_n < b_\sigma\}$ , contenu dans  $U_i$ , est un fermé de  $W' \cap U_\lambda$ . Donc  $W_\sigma \cap U_\lambda$  est aussi fermé dans  $W' \cap U_\lambda$  et on a alors  $W_\sigma = W'$ , par connexité de  $W'$ .

Alors, pour une feuille  $F_\beta \subset W'$ , on a que le cardinal de l'ensemble des composantes connexes de  $F_\beta \cap U_\lambda$  est au moins  $\text{card}(\Sigma)$ . Mais, comme  $F_\beta$  est compacte, on a, pour le théorème 4.2.4, que  $F_\beta \cap U_\lambda$  a un nombre fini de composantes connexes et, donc,  $\Sigma$  est fini aussi. Alors aussi  $F_\gamma \cap U_\lambda$  a un nombre fini de composantes connexes et, comme ils existent  $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , cartes distinguées telles que  $M \subset \cup_{i=1}^m U_{\lambda_i}$ ,  $F_\gamma$  est compacte, encore par le théorème 4.2.4.

Donc, pour le lemme 5.4.1(1) appliqué à  $F_\gamma$ , on déduit que  $\pi_1(F_\gamma)$  est fini et, par définition de  $W$ , on a  $y \in F_\gamma \subset W' \subset W$ ; ceci est une contradiction avec le choix  $y \in \overline{W'} \setminus W'$  fait avant.

On a donc montré par absurde que  $W = M$ , ce qui conclut.  $\square$

Le théorème de stabilité globale est souvent utilisé en conjonction avec le théorème suivant, qui suit du lemme 5.4.1 et qui permet de mieux décrire les feuilletages dont toutes les feuilles sont compactes comme feuilletages induits par des fibrations :

**Théorème 5.4.3.** *Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$ , compacte, connexe, et soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^r$  de codimension 1 de  $M$ , avec  $r \geq 1$ . Si chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est compacte, on a une des propriétés suivantes :*

1. *il existe une application  $C^r$   $\pi : M \rightarrow S^1$  telle que  $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p) \mid p \in S^1\}$  et chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est à deux côtes ; de plus, si  $r \geq 2$ ,  $\pi$  est un  $C^r$  fibré et  $\mathcal{F}$  est, donc, un feuilletage définie par une fibration ;*
2. *il existe une application  $C^r$   $\pi : M \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p) \mid p \in [0, 1]\}$  et chaque feuille de  $\mathcal{F}$ , faite exception pour  $\pi^{-1}(0)$  et  $\pi^{-1}(1)$ , est à deux côtes ; dans ce cas, en plus, si  $r \geq 2$ , toutes les feuilles à deux côtes sont  $C^r$  difféomorphes et chacune forme une revêtement à deux feuillets de  $\pi^{-1}(0)$  et de  $\pi^{-1}(1)$ .*

*De plus, si  $r \geq 2$ , on a que :*

1. *dans le cas 1,  $\pi$  est un  $C^r$  fibré et  $\mathcal{F}$  est, donc, un feuilletage définie par une fibration ;*
2. *dans le cas 2, toutes les feuilles à deux côtes sont  $C^r$  difféomorphes et chacune forme une revêtement à deux feuillets de  $\pi^{-1}(0)$  et de  $\pi^{-1}(1)$ .*

*Démonstration.* Si on note l'ensemble des feuilles donné par  $\mathcal{F}$  avec  $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$ , on peut définir  $\pi : M \rightarrow A$  par  $\pi(x) = \alpha$  pour  $x \in F_\alpha$ .

Pour une feuille  $F_{\hat{\alpha}}$  fixée, soit  $V$  comme dans le lemme 5.4.1 ; comme chaque feuille de  $\mathcal{F}$  est compacte, on est forcément dans le cas 1 du lemme. Soit, alors,  $A_\alpha \subset A$  tel que  $V = \cup_{\beta \in A_\alpha} F_\beta$ , et définissons

$$\eta_{\hat{\alpha}} : A_{\hat{\alpha}} \rightarrow \hat{\pi} \circ \phi_1(V \cap U_1)$$

via la formule  $\eta_{\hat{\alpha}}(\beta) = \hat{\pi} \circ \phi_1(F_\beta \cap U_1)$ , dans le cas  $F_{\hat{\alpha}}$  à deux côtes, et via  $\eta_{\hat{\alpha}}(\beta) = \hat{\pi}(\phi_1(F_\beta \cap U_1) \cap \hat{\pi}^{-1}([0, 1]))$ , dans le cas  $F_{\hat{\alpha}}$  est à une côte.

Notons que l'application  $\eta_{\hat{\alpha}}$  ainsi définie est bijective.

Donc, on peut définir sur  $A$  une structure "naturelle" de variété, éventuellement avec bord, donnée par l'atlante  $\{(A_\alpha, \eta_\alpha) \mid \alpha \in A\}$  : en particulier, par régularité des applications  $\eta_\alpha$  construites, c'est facile de voir que cet ensemble de cartes définit bien une structure de variété  $C^r$  de dimension 1, éventuellement avec bord. De plus, cette structure de variété sur  $A$  est telle que  $\pi : M \rightarrow A$  est une application  $C^r$ . Comme  $\pi$  est clairement surjective et  $M$  est compact et connexe, on a que  $A$  l'est aussi.

Mais, alors,  $A$  doit être forcément difféomorphe à  $[0, 1]$  ou à  $S^1$ , ce qui donne la première partie du théorème.

Si on sait que  $r \geq 2$ , on peut, encore une fois, appliquer le même raisonnement que dans le théorème 5.3.2(2) pour obtenir le résultat dans l'énoncé ci dessus : on ne traitera pas les détails ici.  $\square$



# Chapitre 6

## Théorème de Novikov

### 6.1 Énoncé et idée de la preuve

#### 6.1.1 Énoncé

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant, dû à Novikov.

**Théorème 6.1.1** (Novikov, 1965). *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^2$  de codimension 1, défini sur une 3-variété compacte ayant groupe fondamental fini. Alors  $\mathcal{F}$  a une feuille compacte.*

On va donner la démonstration dans le cas d'une variété lisse et d'un feuilletage transversalement orientable. On remarquera à la fin de la preuve qu'on peut toujours se ramener à ce cas-là.

Dans le paragraphe suivant, on présente les étapes fondamentales de la démonstration, qu'on va donner avec toutes les précisions nécessaires.

#### 6.1.2 Idée de la preuve

La preuve commence en montrant l'existence d'un *vanishing cycle* sur la variété feuilletée en question,  $(M, \mathcal{F})$ . De façon informelle, cela signifie que l'on a une application  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  contenue dans une famille *différentiable* d'applications  $f_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ , où  $t \in [0, \varepsilon]$  pour  $\varepsilon > 0$  convenable, telle que :

1.  $f_t(\mathbb{S}^1)$  est contenue dans une feuille  $A_t$  de  $\mathcal{F}$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ ; cela veut dire que pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$  il existe une feuille  $A_t$  de  $\mathcal{F}$  telle que  $\mathcal{F}_{f_t(x)} = A_t$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ ;
2.  $f_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  est homotopiquement triviale dans la feuille  $A_t$  si et seulement si  $t > 0$ ;
3. pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ , la courbe  $\gamma_x : t \mapsto f_t(x)$  dans  $M$  est *transverse* à  $\mathcal{F}$ .

La troisième condition signifie que  $T_{f_t(x)}M = T_{f_t(x)}A_t \oplus \mathbb{R}\dot{\gamma}_x(t)$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $x \in \mathbb{S}^1$ .

Ce *vanishing cycle* est puis modifié en un *vanishing cycle simple*, dans le sens où l'on considère les revêtements universels  $\hat{A}_t$  des feuilles  $A_t$ , pour  $t > 0$ , et les relèvements  $\hat{f}_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \hat{A}_t$  des applications de notre cycle. On montrera que l'on peut construire cette famille différentiable afin que toute application  $\hat{f}_t$  soit *simple*.

Notons que si ces applications  $\hat{f}_t$  sont immersives, alors on aura des *plongements* du cercle dans  $M$ , par propriété.

La fin de la preuve consiste à montrer que l'existence d'un tel *vanishing cycle simple* entraîne que la feuille base  $A_0$  soit compacte. En effet, notre cycle  $\{f_t\}_{t \in [0, \varepsilon]}$  permet de définir une famille différentiable d'immersions  $F_t : D^2 \rightarrow M$  telle que, d'après ci-dessus :

1.  $(F_t)|_{\partial D^2} = f_t$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$
2.  $F_t(D^2) \subseteq A_t$  pour tout  $t > 0$
3. pour tout  $x \in D^2$ , la courbe  $\gamma_x : t \mapsto F_t(x)$  dans  $M$  est transverse à  $\mathcal{F}$

Après ça, on va montrer que pour tout  $\alpha > 0$  il existe  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  avec  $0 < t_2 < t_1 < \alpha$  et tels que :

1.  $A_{t_1} = A_{t_2}$
2.  $F_{t_1}(D^2) \subseteq F_{t_2}(D^2)$
3.  $F_t(D^2) \cap F_{t_1}(D^2) = \emptyset$  pour tout  $t \in (t_2, t_1)$

Il existe alors une région  $R$  *arbitrairement proche* à la feuille  $A_0$  qui est *disjointe* de  $A_0$  et qui est contenue dans les surfaces  $C_1, C_2$ , où :

$$C_1 := \{F_t(x) | x \in \partial D^2, t_2 < t < t_1\}$$

$$C_2 := F_{t_2}(D^2) \setminus F_{t_1}(D^2)$$

Par définition de la région  $R$ , on voit que toute courbe simple transverse à  $\mathcal{F}$  qui entre dans  $R$  ne peut jamais y sortir. Comme on peut trouver une telle  $R$  arbitrairement proche à  $A_0$ , on conclut qu'il n'existe pas de courbe fermée simple (un lacet sans auto-intersections) transverse à  $\mathcal{F}$  qui passe par  $A_0$ .

D'autre part, on peut montrer que toute feuille non-compacte  $A$  admet un lacet transverse à  $\mathcal{F}$  qui passe par  $A$ , et donc  $A_0$  doit être compacte.

## 6.2 Démonstration

### 6.2.1 Existence d'un vanishing cycle

On commence avec un petit lemme.

**Lemme 6.2.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage lisse de codimension 1 d'une variété  $M$ . Alors il existe une courbe  $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  transverse à  $\mathcal{F}$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\mathcal{F}$  soit transversalement orientable et notons par  $X$  un champ de vecteurs transverse à  $\mathcal{F}$ .

Considérons alors une courbe intégrale  $\alpha$  de  $X$ . Comme  $M$  est compacte, on a que deux possibilités : soit  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ , soit  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$  avec  $\alpha$  injective.

Dans le premier cas, on a achevé la preuve, car il suffit de poser  $\gamma := \alpha$ .

Dans le deuxième cas, il existe un point  $p \in M$  d'accumulation pour la suite  $\{\alpha(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Soit alors  $(U, \phi)$  une carte distinguée avec  $p \in U$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\alpha(n) \in U$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour définition de carte distinguée, c'est clair que, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , la composante connexe de  $\alpha(\mathbb{R} \cap \alpha^{-1}(U))$  contenant  $\alpha(n)$  rencontre la plaque de  $U$  qui contient  $p$ . Donc  $\alpha$  rencontre la feuille  $F := \mathcal{F}_p$  en une infinité de points distincts entre eux, comme  $\alpha$  n'est pas fermée ; voir la figure 6.1.

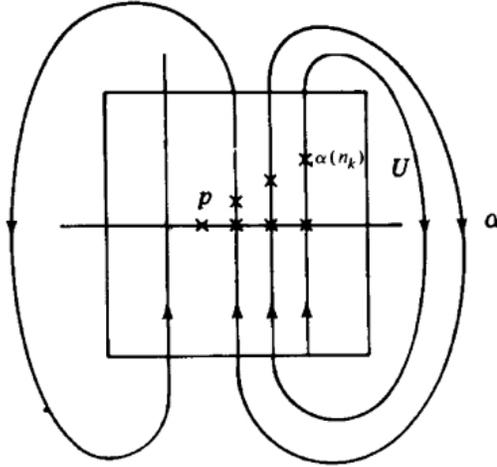


FIGURE 6.1 – Cas  $\alpha$  non fermée

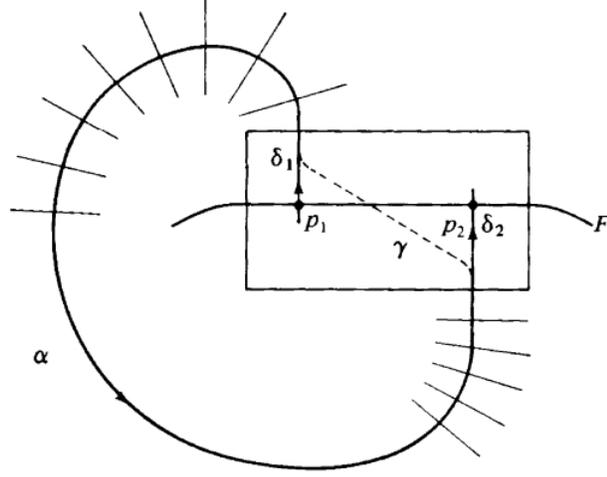
Maintenant, soient  $t, t' \in \mathbb{R}$  tels que  $\alpha(t), \alpha(t') \in F$  mais  $\alpha(s) \notin F$  pour tout  $s \in (t, t')$  : ils existent bien car  $\alpha$  est transverse à  $\mathcal{F}$ .

En choisissant un arc  $l : [0, 1] \rightarrow F$  tel que  $l(0) = \alpha(t') =: p_2$  et  $l(1) = \alpha(t) =: p_1$ , et en utilisant le lemme 5.1.4, on peut aisément modifier la courbe fermée  $\alpha|_{[t, t']} * l$ , transverse à  $\mathcal{F}$  le long de  $\alpha|_{[t, t']}$  et contenue dans  $F$  le long de  $l$ , en un courbe  $\gamma$  fermée transverse à  $\mathcal{F}$  ; voir la figure 6.2.

Il reste maintenant le cas de  $\mathcal{F}$  non transversalement orientable.

Pour ce cas-là, il suffit de considérer le revêtement double d'orientation  $\tilde{M}$  associé au champ de droites  $\Delta$  transverse à  $\mathcal{F}$ , comme dans la proposition 1.4.1.

Dès que  $\pi^*(\mathcal{F})$  est transversalement orientable de codimension 1 et que  $\tilde{M}$  est compacte (comme  $M$  l'est) on est dans le cas qu'on a considéré tout à l'heure :

FIGURE 6.2 – Comment obtenir une courbe transverse à partir de  $\alpha$ 

il existe, donc,  $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \tilde{M}$  transverse à  $\pi^*(\mathcal{F})$ .  
Il suffit alors de poser  $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$  pour terminer la preuve.  $\square$

On donne maintenant une définition. Pour cela, on considère  $M$  variété feuilletée par  $\mathcal{F}$  de *codimension 1*.

**Définition 6.2.2.** Soit  $A_0$  une feuille de  $\mathcal{F}$ .

On dit qu'une courbe fermée  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow A_0$  est un *vanishing cycle* pour  $\mathcal{F}$  si  $f_0$  se prolonge en une application différentiable  $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ , pour  $\varepsilon > 0$  convenable, telle que :

1. la courbe  $f_t := F|_{\{t\} \times \mathbb{S}^1} : t \mapsto F(t, x)$  est contenue dans une feuille  $A_t$  de  $\mathcal{F}$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon]$ ;
2. la courbe  $\gamma_x : t \mapsto F(t, x)$  est transverse à  $\mathcal{F}$  pour tout  $x \in \mathbb{S}^1$ ;
3. la courbe  $f_t$  est homotope à une constante dans  $A_t$  pour tout  $t > 0$ , et  $f_0$  n'est pas homotope à une constante dans  $A_0$ .

On dit que le prolongement  $F$  de  $f_0$  au cylindre  $[0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$  est une *extension cohérente* du vanishing cycle  $f_0$

**Exemple 6.2.3.** Dans le feuilletage orientable de Reeb de  $D^2 \times \mathbb{S}^1$  tout méridien du bord est un *vanishing cycle*.

Les hypothèses ci-dessus sont suffisantes pour énoncer la définition. Pour obtenir des résultats d'existence on a besoin d'hypothèses plus fortes, qui figurent parmi celles de l'énoncé du théorème de Novikov, à savoir la compacité de la variété sur laquelle on travaille.

**Proposition 6.2.4.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension au moins 3, avec groupe fondamental fini, et soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage lisse de codimension 1 sur  $M$ .*

*Alors  $\mathcal{F}$  admet un vanishing cycle.*

*Démonstration.* Comme  $M$  est compacte et  $\pi_1(M)$  est fini, pour le lemme 6.2.1 il existe une courbe  $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  transverse à  $\mathcal{F}$  qui est homotopiquement triviale. En effet, le lemme assure que l'on peut trouver un lacet  $\alpha$  transverse à  $\mathcal{F}$ , et comme sa classe dans  $\pi_1(M)$  est d'ordre fini on peut alors facilement construire un lacet encore transverse et homotope à une constante.

Grâce à la proposition A.3.1, il existe maintenant une application lisse  $g : D^2 \rightarrow M$  telle que le feuilletage tiré en arrière  $\mathcal{F}^* := g^*\mathcal{F}$  soit donnée par les orbites d'un champ de vecteurs  $Y$  sur  $D^2$ , dont les singularités sont des *centres* ou des *selles*; de plus, les selles n'ont que des auto-connexions entre elles. Cette construction est le centre de la démonstration : on va exploiter les propriétés spéciales des orbites d'un tel champ de vecteurs sur  $D^2$  pour construire un vanishing cycle.

On utilisera, dans la suite, la propriété suivante : il existe une région ouverte  $R \subseteq D^2$  telle que le bord  $\partial R$  est une courbe d'holonomie non triviale, et telle que les orbites de  $Y$  dans  $R$  ont par contre holonomie triviale; voir l'appendice A, section A.4 pour les détails de la construction.

On veut, maintenant, montrer qu'il existe une courbe  $\Gamma \subseteq R$  qui est une orbite périodique ou un *graphe*  $Y$ -invariant (voir la section A.2.2 de l'appendice A pour les définitions) telle que

1.  $g(\Gamma)$  n'est pas homotopiquement triviale dans la feuille  $A_{g(\Gamma)}$ ;
2.  $\Gamma$  est le bord d'une bande  $C = \bigcup_{t \in (0,1]} \gamma_t \subseteq R$ , où les  $\gamma_t$  sont orbites périodiques de  $Y$ , et  $g(\gamma_t)$  est homotope à une constante dans  $A_{g(\gamma_t)}$ .

Cela terminerait la preuve de la proposition. En effet, quitte à donner une paramétrisation des orbites  $\gamma_t$  ed de  $\Gamma$ , on voit bien qu'on peut la composer avec  $g$  pour construire une extension cohérente de  $g(\Gamma)$ .

Comme la tangence de  $g$  avec  $\mathcal{F}$  dans les centres est de type *parabolique*, toute orbite  $\gamma$  de  $Y$  au voisinage d'un centre est fermée et son image  $g(\gamma)$  est homotope à un point dans  $A_{g(\gamma)}$ . C'est donc une bonne idée de commencer la construction de  $\Gamma$  à partir des centres de  $Y$  qui se trouvent dans  $R$ .

On rappelle que si le nombre des centres de  $Y$  est  $l \geq 1$ , alors  $Y$  a  $l - 1$  selles, pour le *théorème de l'indice*. Le même est vrai pour la clôture  $\bar{R}$  de  $R$  : si  $c_1, \dots, c_k \in \bar{R}$  sont les centres de  $Y$  contenus dans  $R$  (où  $k \geq 1$ ), alors  $Y$  a  $k - 1$  selles dans  $\bar{R}$ . Le théorème de l'indice lie la *caractéristique de Poincaré* d'une variété compacte à la somme des indices d'un champ de vecteur sur cette variété en correspondance de ses zéros. Dans notre cas,  $D^2$  est une variété compacte à bord, et le théorème s'applique seulement pour des champs qui sont transverses sur le bord. D'autre part la construction de Hæfliger garantie que le champ  $Y$  est de ce type là.

La caractéristique de  $D^2$  est 1, comme il est contractile : son homologie a seulement un générateur en degré zéro. Comme les centres sont des zéros d'indice 1 et les selles sont d'indice  $-1$ , on voit qu'il faut avoir un centre en plus des selles.

Notons  $s_1, \dots, s_{k-1}$  les selles de  $Y$  dans  $R$ . Pour  $i \in \{1, \dots, k\}$ , soit  $V_i$  la partie connexe maximale de  $R$  qui contient  $c_i$  et qui est réunion d'orbites fermées de  $Y$  qui ont image homotope à une constante dans leurs feuilles. Notons que chaque  $V_i$  ne contient pas de centre différents de  $c_i$ .

On va montrer que l'ensemble  $V_i$ , non vide et  $Y$ -invariant par construction, est ouvert; de plus, on montrera que  $\partial V_i$  a une seule composante connexe, qui est une courbe fermée réunion d'orbites de  $Y$ .

Commençons en montrant que  $V_i$  est ouvert.

Soit  $\gamma_0 \subseteq V_i$  une orbite de  $Y$ . Le but est de montrer qu'il existe un voisinage tubulaire de  $\gamma_0$  contenu dans  $V_i$ .

Comme les orbites de  $Y$  dans  $R$  ont holonomie triviale par construction, le lemme 5.1.4 permet de conclure la chose suivante. Il existe un voisinage cylindrique  $C_0 \subseteq R$  et un difféomorphisme  $h : (-1, 1) \times \gamma_0 \rightarrow C_0$  tel que pour tout  $t \in (-1, 1)$  l'ensemble  $\gamma_t := h(\{t\} \times \gamma_0)$  est une orbite fermée de  $Y$ . Notons  $A_t$  la feuille de  $\mathcal{F}$  qui contient  $g(\gamma_t)$ .

Fixons une métrique Riemannienne  $\langle, \rangle$  sur  $M$ . Comme  $g(\gamma_0)$  est homotope à une constante dans  $A_0$ , il existe une application différentiable  $f_0 : D^2 \rightarrow A_0$  telle que  $f_0(\partial D^2) = g(\gamma_0)$ .

Le lemme 5.2.1 entraîne que  $f_0$  se prolonge en une famille continue d'applications  $f_t : D^2 \rightarrow M$ , où  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , telle que  $f_t(D^2) \subseteq A_t$  et telle que pour tout  $x \in D^2$  la courbe  $t \mapsto f_t(x)$  est normale à  $\mathcal{F}$ .

Pour  $t > 0$  la courbe  $f_t(\partial D^2) =: \delta_t$  est clairement homotope à une constante, car elle est la restriction d'une fonction définie sur  $D^2$ . De plus, les courbes  $\delta_t$  et  $g(\gamma_t)$  sont homotopes en  $A_t$ , pour  $t$  assez petit. En effet, les familles d'ensembles fermés  $\{g(\gamma_t)\}_t, \{\delta_t\}_t$  ont une *distance de Hausdorff* qui tend vers zéro pour  $t \rightarrow 0$ , car  $\lim_{t \rightarrow 0} g(\gamma_t) = \lim_{t \rightarrow 0} \delta_t = g(\gamma_0)$ .

Cela entraîne que  $g(\gamma_t)$  est homotopiquement trivial dans la feuille  $A_t$ , pour  $t$  assez petit, et donc on a un voisinage tubulaire  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \gamma_0$  de  $\gamma_0$  qui est contenu dans  $V_i$ .

On a donc montré que les  $V_i$  sont ouverts.

Comme  $V_i$  est  $Y$ -invariant,  $\partial V_i$  est soit une orbite fermée soit un graphe de  $Y$ . On peut maintenant conclure la preuve en raisonnant par cas.

S'il existe un indice  $i$  tel que  $\partial V_i$  est une orbite fermée de  $Y$ , disons  $\gamma_0$ , alors  $g(\gamma_0)$  n'est pas homotope à une constante dans  $A_{g(\gamma_0)}$ , car sinon on aurait eu  $\gamma_0 \subseteq V_i$ , mais  $\partial V_i \cap V_i = \emptyset$  car  $V_i$  est ouvert.

Toutes les orbites de  $Y$  dans l'intérieur de  $\gamma_0$  sont fermées, car elles sont contenues dans  $V_i$ . De plus, elle ont image homotopiquement trivial dans leur feuille correspondante. Cela dit que  $\gamma_0$  appartient à une famille d'orbites  $\{\gamma_t\}_{t \in [0, \varepsilon]}$  telle que  $g(\gamma_t)$  est homotope à une constante dans  $A_{g(\gamma_t)}$ . Pour la remarque précédente, on a conclu dans ce cas là.

Il se peut encore que  $\Gamma_i := \partial V_i$  soit un graphe de  $Y$  pour tout indice  $1 \leq i \leq k$ . On a alors deux possibilités :

1. il existe un indice  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $g(\Gamma_{i_0})$  ne soit pas homotope à une constante dans  $A_{g(\Gamma_{i_0})}$ ;

2. pour tout indice  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $g(\Gamma_i)$  est homotope à une constante dans  $A_{g(\Gamma_i)}$ .

Dans le premier cas, en raisonnant comme ci-dessus,  $g(\Gamma_{i_0})$  est un vanishing cycle, et on a terminé.

Supposons donc d'être dans le deuxième cas. On a donc  $g(\Gamma_i)$  homotope à une constante dans la feuille  $A_{g(\Gamma_i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ .

Comme la différence entre le nombre de centres et selles en  $\bar{R}$  est égal à 1, il existe deux graphes qui contiennent la même selle. Quitte à les renuméroter, supposons qu'ils soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , contenant la selle  $s_1$ .

Les situations possibles sont représentées dans la figure 6.3 ci-dessous.

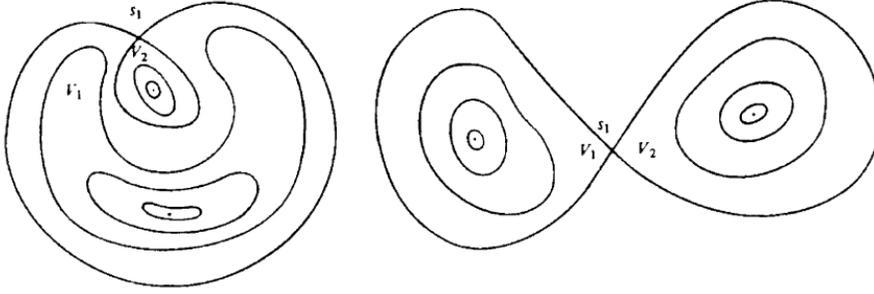


FIGURE 6.3 – Cas malheureux

Dans ce cas-là,  $\bar{V}_1 \cup \bar{V}_2$  est homéomorphe soit à un disque fermé, soit à deux disques avec un point de bord en commun. Considérons le graphe  $\Gamma^1 := \partial\bar{V}_1 \cup \partial\bar{V}_2 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Maintenant on répète la même construction ci-dessus à l'intérieur de toute région de  $D^2$  de ce type-ci.

Comme  $g(\Gamma_1)$  et  $g(\Gamma_2)$  sont contractiles dans leur respectives feuilles,  $g(\Gamma^1)$  est bien contractile dans  $A_{g(\Gamma^1)} = A_{g(\Gamma_1)} = A_{g(\Gamma_2)}$ .

Il existe alors un voisinage  $U$  de  $\Gamma^1$  tel que  $U \setminus \Gamma^1$  est réunion d'orbites fermées de  $Y$  homotopiquement triviales dans leur feuilles images. Cela suit du même raisonnement qu'on a utilisé tout à l'heure pour montrer que les  $V_i$  étaient ouverts, via le lemme 5.2.1.

Soient maintenant  $\Gamma_1^1 := \Gamma^1, \Gamma_2^1, \dots, \Gamma_{k_1}^1$  les graphes de  $Y$  obtenus de la même façon que  $\Gamma^1$ , où  $1 \leq k_1 \leq \frac{1}{2}$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, k_1\}$ , soit  $V_1^i$  la composante connexe maximale qui contient  $\Gamma_i^1$ , telle que  $V_1^i \setminus \Gamma_i^1$  soit réunion de orbites fermées homotopes à une constante dans leurs respectives feuilles.

On peut montrer que chaque  $V_1^i$  est ouvert, toujours avec le même lemme. Le bord  $\partial V_1^i$  est une courbe fermée dans  $R$ , réunion d'orbites de  $Y$ .

Pour le même argument qu'on vient d'utiliser, s'il existe un indice  $i$  tel que  $g(\partial V_1^i)$  est homotopiquement trivial dans  $A_{g(\partial V_1^i)}$ , alors on a trouvé un vanishing cycle pour  $\mathcal{F}$ .

Il se peut encore que  $g(\partial V_1^i)$  soit contractile dans sa feuille pour tout  $1 \leq i \leq k_1$ . Dans ce cas-là, tous les  $\partial V_1^i$  sont des graphes de  $Y$ ; il y en a au moins deux,

disons  $\partial V_1^1, \partial V_2^1$  qui contiennent la même selle. La situation est maintenant comme dans la figure 6.4.

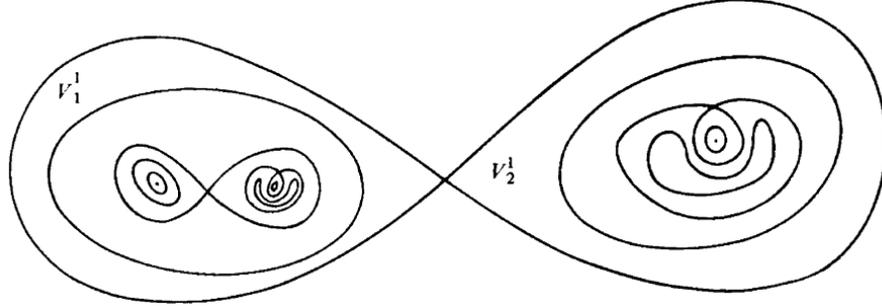


FIGURE 6.4 – Cas malheureux : continuation

Posons  $\Gamma^2 := \partial V_1^1 \cup \partial V_2^1$ . Alors  $\Gamma^2$  est un graphe de  $Y$ , et  $g(\Gamma^2)$  est homotope à une constante dans sa feuille. Si  $k_2$  est le nombre de graphes défini comme ci-dessus, on a clairement  $1 \leq k_2 \leq \frac{1}{2}k_1 \leq \frac{1}{4}k$ . De plus,  $\Gamma^2$  admet un voisinage  $U$  tel que  $U \setminus \Gamma^2$  est réunion d'orbites fermées contractiles dans leurs respectives feuilles.

Comme  $\partial R \cap \partial D^2 = \emptyset$ , et comme il y a un nombre fini de singularités de  $Y$  dans  $R$ , on peut procéder récursivement pour obtenir, après un nombre fini d'étapes, une orbite fermée ou un graphe  $\Gamma$  de  $Y$  tel que  $g(\Gamma)$  soit un vanishing cycle pour  $\mathcal{F}$ .

□

## 6.2.2 Extensions cohérentes normales

Le but de cette partie et de la prochaine est de modifier notre vanishing cycle pour en obtenir un tel que les relèvements de son extension cohérente aux revêtements universels des feuilles soient des courbes simples.

Pour décrire cette construction, on a besoin d'une définition supplémentaire.

Supposons maintenant que  $\mathcal{F}$  soit un feuilletage *transversalement orientable* d'une variété  $M$ , et soit  $X$  un champ de vecteur normal à  $\mathcal{F}$  par rapport à une *métrique Riemannienne*  $\langle, \rangle : M \rightarrow \Sigma^2 T^*M$  fixée sur  $M$ .

On note  $\langle, \rangle|_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  le produit scalaire défini par  $\langle, \rangle$  en tout point  $x \in M$ .

**Définition 6.2.5.** On dit qu'une courbe  $\gamma : I \rightarrow M$  transverse à  $\mathcal{F}$  est *positive* (respectivement, *négative*) si  $\langle \dot{\gamma}(t), X(\gamma(t)) \rangle|_{\gamma(t)} > 0$  (resp.,  $< 0$ ) pour tout  $t \in I$ .

Soit  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow A_0$  un vanishing cycle pour  $\mathcal{F}$ , et  $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  une extension cohérente de  $f_0$ .

On dit que  $f_0$  est un vanishing cycle *positif* (resp. *négatif*) si les courbes

$\gamma_x : t \mapsto F(t, x)$  sont (transverses) positives (resp. négatives). Si de plus les courbes  $\gamma_x$  sont orthogonales aux feuilles de  $\mathcal{F}$  on dit que  $F$  est une *extension normale* de  $f_0$ .

On remarque que l'on peut toujours supposer, si  $f_0$  est un vanishing cycle, que  $f_0$  soit un vanishing cycle positif, quitte à renverser le champ de vecteurs  $X$  qui donne l'orientation transverse.

En effet, si  $F$  est une extension cohérente de  $f_0$ , on a

$$\langle \dot{\gamma}_x(t), X(\gamma_x(t)) \rangle_{|\gamma_x(t)} \neq 0$$

pour tout  $x \in S^1$  et  $t \in [0, \varepsilon]$ , dès que les courbes  $t \rightarrow \gamma_x(t)$  sont transverses à  $\mathcal{F}$ . Par continuité, le signe de ce produit scalaire sera constant et il suffit donc d'effectuer le changement  $X \rightarrow -X$  pour avoir la positivité.

On peut maintenant montrer que l'on peut toujours choisir une extension (cohérente) normale.

**Proposition 6.2.6.** *Soit  $f_0 : S^1 \rightarrow M$  un vanishing cycle positif.*

*Alors :*

1. *il existe une extension cohérente positive et normale de  $f_0$  ;*
2. *si  $\bar{f}_0 : S^1 \rightarrow A_0$  est homotope à  $f_0$  dans  $A_0$  alors  $\bar{f}_0$  est un vanishing cycle positif.*

*Démonstration.* Prouvons le point 1.

Notons par  $X_t$  le flot engendré par le champ de vecteurs normale à  $\mathcal{F}$ . Il existe, alors,  $\delta > 0$  tel que l'application  $\tilde{F}(t, x) = X_t(f_0(x))$  soit bien définie sur  $[0, \delta] \times S^1$ .

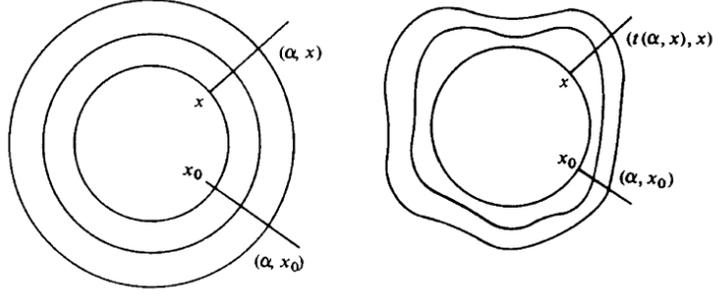
On montre, maintenant, qu'on peut paramétrer les courbes  $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$  avec un paramétrage de la forme  $\alpha \mapsto \tilde{F}(t(\alpha, x), x)$ , de façon que  $\bar{F}(\alpha, x) = \tilde{F}(t(\alpha, x), x)$  soit une extension cohérente positive et normale de  $f_0$ .

Comme  $f_0$  est un vanishing cycle positif, l'holonomie positive de  $f_0$  est l'identité ; alors, les feuilles du feuilletage de  $(0, \delta) \times S^1$  donné par  $(\tilde{F}|_{(0, \delta) \times S^1})^*(\mathcal{F})$  sont, au voisinage de la composante de bord  $\{0\} \times S^1 \subset \overline{(0, \delta) \times S^1} \subset [0, \delta] \times S^1$ , toutes des courbes fermées et, clairement, simples.

Fixons, alors,  $x_0 \in S^1$  et notons  $S_t$  la feuille de  $(\tilde{F}|_{(0, \delta) \times S^1})^*(\mathcal{F})$  passant par  $(t, x_0) \in (0, \delta) \times S^1$ . Pour ce qu'on a dit tout à l'heure, pour  $\alpha > 0$  petit,  $S_\alpha$  rencontre la courbe  $t \mapsto (t, x)$  en un seul point, qu'on note  $(t(\alpha, x), x)$  ; voir la figure 6.5.

De plus, c'est facile de voir que ce paramétrage s'étend naturellement à  $[0, \delta] \times S^1$  tout, comme  $\tilde{F}(\{0\} \times S^1)$  et  $\tilde{F}(\{1\} \times S^1)$  sont entièrement contenus chacun dans une feuille de  $\mathcal{F}$ . Par construction il existe  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tel que l'application  $\bar{F}([0, \tilde{\varepsilon}] \times S^1) \rightarrow M$  donnée par  $\bar{F}(\alpha, x) = \tilde{F}(t(\alpha, x), x)$  satisfait les condition 1 et 2 de la définition 6.2.2.

Il reste, donc, à montrer que, quitte à restreindre le domaine de  $\bar{F}$ , on a aussi la propriété 3 de la définition 6.2.2, c'est à dire que, pour  $\alpha > 0$ , les courbes  $\bar{f}_\alpha(x) := \bar{F}(\alpha, x)$  sont homotopes à une constante dans la feuille qui les contient. Pour cela, considérons  $F : [0, \tilde{\varepsilon}] \rightarrow M$ , une extension cohérente positive et

FIGURE 6.5 – Construction du paramétrage  $t = t(\alpha, x)$ 

normale de  $f_0$  et posons  $f_t(x) := F(t, x)$ . Quitte à restreindre le domaine de  $F$  et quitte à changer paramétrage pour son paramètre  $t$ , on peut supposer que  $\bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}$  et que  $f_t(S^1)$  et  $\bar{f}_t(S^1)$  soient contenus dans une même feuille  $\mathcal{F}_t$  de  $\mathcal{F}$ . C'est donc clair que, pour  $t$  petit,  $f_t(S^1)$  et  $\bar{f}_t(S^1)$  sont proches, au sens de la distance de Hausdorff pour les fermées dans  $\mathcal{F}_t$ ; en particulier, elles sont homotopes dans  $\mathcal{F}_t$ . Alors, il existe  $\epsilon \leq \bar{\epsilon}$  tel que  $\bar{F}|_{[0, \epsilon]} : [0, \epsilon] \rightarrow M$  soit une extension cohérente positive et normale de  $f_0$ .

Passons à la propriété 2 de l'énoncé.

Notons, d'abord, que si  $\bar{f}_0 : S^1 \rightarrow A_0$  est une courbe suffisamment proche, selon la topologie  $C^0$ , à  $f_0$ , alors  $\bar{f}_0$  est un vanishing cycle. En effet, comme  $\bar{f}_0$  est homotope dans  $A_0$  à  $f_0$ , par hypothèse,  $\bar{f}_0$  a holonomie qui est triviale “de l'un des deux côtés de  $A_0$ ”; alors, avec la construction ci-dessus, on obtient une  $\bar{F} : [0, \bar{\delta}] \rightarrow M$  extension positive et normale de  $\bar{f}_0$ . De plus, pour le point 1 qu'on vient de prouver, il existe  $F : [0, \bar{\delta}] \rightarrow M$  extension cohérente positive et normale de  $f_0$ . Donc, quitte à remplacer  $\bar{\delta}$  par  $\bar{\delta}' < \bar{\delta}$ , les courbes  $\bar{f}_t(S^1) = \bar{F}(\{t\} \times S^1)$  et  $f_t(S^1) = F(\{t\} \times S^1)$  sont homotopes, car ils sont “proches” selon la topologie  $C^0$  sur  $A_t$ , la feuille qui les contient, et, donc,  $\bar{F} : [0, \bar{\delta}] \rightarrow M$  est aussi cohérente. Si  $f_0$  et  $\bar{f}_0$  sont homotopes via  $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow A_0$  et si  $f_0$  est un vanishing cycle, pour compacité de  $[0, 1]$  et pour ce qu'on a remarqué tout à l'heure, on a qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que si  $H_{\frac{k}{n_0}}(S^1) := H(\{\frac{k}{n_0}\} \times S^1)$  est un vanishing cycle positif alors  $H_{\frac{k+1}{n_0}}(S^1)$  l'est aussi. Cela entraîne, par récurrence, que  $H_{\frac{n_0}{n_0}}(S^1) = H_1(S^1) = \bar{f}_0$  est un vanishing cycle positif.  $\square$

### 6.2.3 Extensions cohérentes simples

Supposons désormais que  $M$  soit une 3-variété compacte orientable, et que  $\mathcal{F}$  soit un feuilletage lisse de codimension 1 sur  $M$ .

On a quelques remarques préliminaires.

**Remarque 6.2.7.** Soit  $f_0 : S^1 \rightarrow A_0$  un vanishing cycle positif, et  $F : [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$  une extension cohérente positive et normale de  $f_0$ . En admet-

tant quelques résultats de théorie de la transversalité, et avec le point 2 de la proposition précédente, on peut supposer que :

1.  $f_0$  est une immersion ;
2. les points d'auto-intersection de  $f_0$  sont doubles et transverses.

Cela suit de la possibilité de considérer  $f_0$  à homotopie dans  $A_0$  près.

Le point 2 signifie que les fibres  $f_0^{-1}(p)$ , où  $p \in A_0$ , ont au plus 2 points, et que si l'on a  $p = f_0(x_1) = f_0(x_2)$  pour deux points différents  $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$  alors  $T_p A_0 = \mathbb{R}f_0(x_1) \oplus \mathbb{R}f_0(x_2)$ .

On a alors que l'ensemble  $B_0 := \{p \in f_0(\mathbb{S}^1) \mid \text{card}(f_0^{-1}(p)) = 2\}$  est fini, car discret dans  $\mathbb{S}^1$ . Posons puis  $B_t := \{p \in f_t(\mathbb{S}^1) \mid \text{card}(f_t^{-1}(p)) = 2\}$ , et  $n_t := \text{card}(B_t)$ .

Comme  $f_0(\mathbb{S}^1)$  est compact et les courbes  $\gamma_x : t \mapsto F(t, x)$  sont des paramétrages des trajectoires du champ de vecteurs normal, il existe  $\epsilon > 0$  assez petit tel que si  $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$ , les courbes  $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$  are soit disjointes soit l'une contenue dans l'autre. Cela est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Il existe alors un entier  $n_0$  tel que  $n_t \leq n_0$  pour tout  $t \in [0, \epsilon]$ .

Si  $A \subseteq M$  est une feuille de  $\mathcal{F}$ , on note  $\hat{A}$  son revêtement universel, qui existe comme elle est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. On note aussi  $\pi_A : \hat{A} \rightarrow A$  la projection universelle de revêtement. Comme les  $f_t$  sont toutes homotopiquement triviales dans  $A_t$  pour  $t > 0$ , il existe un relèvement universel  $\hat{f}_t$  de  $f_t$ , c'est à dire une courbe  $\hat{f}_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \hat{A}_t$  telle que  $\pi_{A_t} \circ \hat{f}_t = f_t$ . On peut supposer d'avoir fixé l'image du point  $1 \in \mathbb{S}^1$  par  $\hat{f}_t$ , au dessus du point  $f_t(1) \in A_t$ , afin que le relèvement soit unique.

**Définition 6.2.8.** Avec les mêmes hypothèses de tout à l'heure, on dit qu'une extension cohérente  $F$  de  $f_0$  est *simple* si les relèvements  $\hat{f}_t$  sont des courbes simples dans  $\hat{A}_t$  pour  $t > 0$ .

**Proposition 6.2.9.** Soit  $f_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow A_0$  un vanishing cycle positif, et  $F : [0, \epsilon] \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  une extension cohérente positive et normale de  $f_0$ . On note encore  $f_t := F|_{\{t\} \times \mathbb{S}^1}$  et  $A_t$  la feuille contenant  $f_t(\mathbb{S}^1)$ .

Il existe une suite  $\{t_n\}_{n \geq 1}$  dans  $[0, \epsilon]$  telle que  $t_n \rightarrow 0$ , pour  $n \rightarrow \infty$ , et telle que pour tout  $n \geq 1$  la feuille  $A_{t_n}$  contient un vanishing cycle  $g_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow A_{t_n}$  qui possède une extension cohérente positive, normale et simple.

**Remarque 6.2.10.** Il se peut que  $t_n = 0$  pour tout  $n \geq 1$  : un exemple est donnée par le feuilletage de Reeb de  $\mathbb{S}^3$ , en choisissant comme  $A_0$  la seule feuille compacte et comme  $f_0 : (\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow (A_0, x_0)$  une courbe dont la classe  $[f_0]$  est, par exemple, l'élément  $(1, 0)$  du  $\pi_1(A_0, x_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* Soit  $\hat{f}_t : \mathbb{S}^1 \rightarrow \hat{A}_t$  un relèvement de  $f_t$  et, avec les notations ci-dessus,  $B_t = \{p \in f_t(\mathbb{S}^1) \mid p = f_t(x_1) = f_t(x_2), \text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ dans } \mathbb{S}^1\}$ . Comme on a déjà remarqué, on peut choisir  $\epsilon$  assez petit que  $n_t = \text{card}(B_t) \leq \text{card}B_0 =: k$ . Pour  $t > 0$ , posons de même  $\hat{B}_t = \{p \in \hat{f}_t(\mathbb{S}^1) \mid p = \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x_2), \text{ avec } x_1 \neq x_2 \text{ dans } \mathbb{S}^1\}$ . Clairement,  $\pi_{A_t}(\hat{B}_t) \subseteq B_t$  et, donc,  $\hat{n}_t := \text{card}(\hat{B}_t) \leq n_t \leq k$ .

Notons  $B_0 = \{p_1, \dots, p_k\}$  et  $x_i \neq x'_i$  dans  $S^1$  tels que  $f_0(x_i) = f_0(x'_i) = p_i$ , pour chaque  $i = 1, \dots, k$ ; remarquons que si  $p \in B_t$  alors il existe  $1 \leq i \leq k$  tel que  $p = f_t(x_i) = f_t(x'_i)$ , pour unicité des solutions du champ de vecteurs normal au feuilletage.

Soient, maintenant,  $K_1 = \{t \in [0, \epsilon] \mid f_t(x_1) = f_t(x'_1)\}$  et  $U_1 = \{t \in (0, \epsilon) \mid \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)\}$ . Clairement  $K_1$  est fermée et on a l'inclusion  $U_1 \subset K_1$ ; on veut montrer que  $U_1$  est ouvert.

Soit  $S^1 \setminus \{x_1, x'_1\} =: \alpha \coprod \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont arc ouverts, c'est à dire sans extrémités, de  $S^1$ . Si  $t \in U_1$ , on a  $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$  et, donc, la restriction de  $f_t$  à la clôture  $\bar{\alpha}$  de  $\alpha$  est une courbe fermée dans  $A_t$  qui est homotope, dans  $A_t$  même, à une constante.

Pour le lemme 5.2.1, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $s \in (t - \delta, t + \delta)$ ,  $f_s|_{\bar{\alpha}}$  est fermée et homotope à une constante dans  $A_s$ , c'est à dire que  $\hat{f}_s|_{\bar{\alpha}}$  est une courbe fermée dans  $\hat{A}_s$ ; cela entraîne directement que  $s \in U_1$ . Donc,  $U_1$  est ouvert.

Notons, maintenant, qu'il y a seulement une des trois possibilités suivantes :

1. *Il existe  $\delta > 0$  tel que  $[0, \delta] \cap U_1 = \emptyset$  :*

Dans ce cas, quitte à restreindre  $F$  à  $[0, \delta] \times S^1$ , on obtient  $\hat{n}_t < n_0 = k$ .

On procède, alors, par récurrence avec  $U_2 := \{t \in (0, \delta] \mid \hat{f}_t(x_2) = \hat{f}_t(x'_2)\}$ .

2. *Il existe  $\delta > 0$  tel que  $[0, \delta] \subset U_1$  :*

Dans ce cas,  $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$  pour  $t \in (0, \delta]$  et, donc,  $f_t(x_1) = f_t(x'_1)$  pour  $t \in [0, \delta]$ . On peut, donc, considérer  $g_0 = f_0|_{\bar{\alpha}}$  et  $\hat{g}_0 = f_0|_{\bar{\beta}}$  comme applications de  $S^1$  vers  $A_0$ . Comme  $f_0$  n'est pas homotope à un point dans  $A_0$ , on peut supposer, par exemple, que  $g_0$  ne le soit pas non plus. Posons, alors,  $G = F|_{[0, \delta] \times \bar{\alpha}}$  et  $g_t(x) = G(t, x)$ . Comme  $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$  pour  $t \in (0, \delta]$ ,  $g_t$  est homotope à une constante dans  $A_t$ , pour tout  $t \in (0, \delta]$ . Donc, si  $\hat{n}_t^1 := \text{card}(\{p \mid \hat{g}_t(x) = \hat{g}_t(x'), x \neq x' \text{ dans } \bar{\alpha}\})$ , on a  $\hat{n}_t^1 < \hat{n}_t \leq k$ .

3. *Il existe une suite  $\tau_m^1 \rightarrow 0$  telle que  $\tau_m^1 \in (\bar{U}_1 \setminus U_1) \subset K_1$  :*

Dans ce cas, on peut supposer que pour chaque  $m \geq 1$  il existe  $\epsilon_m > 0$  tel que  $(\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \subset U_1$ . Comme dans le cas 2, on a  $f_t(x_1) = f_t(x'_1)$ , mais pour  $t \in [\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m]$ . Dès que  $\tau_m^1 \in K_1 \setminus U_1$ , les restrictions  $f_{\tau_m^1}|_{\bar{\alpha}}$  et  $f_{\tau_m^1}|_{\bar{\beta}}$  ne sont pas homotopes à des points dans  $A_{\tau_m^1}$ ; par contre, comme  $(\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \subset U_1$ , pour  $\tau_m^1 < t \leq \tau_m^1 + \epsilon_m$  les courbes  $f_t|_{\bar{\alpha}}$  et  $f_t|_{\bar{\beta}}$  sont homotopes à des points dans  $A_t$ . Donc, pour chaque  $m \geq 1$ ,  $f_{\tau_m^1}|_{\bar{\alpha}}$  est un vanishing cycle positif de  $A_{\tau_m^1}$  et  $F|_{[\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m]}$  est une extension cohérente positive et normale de  $f_{\tau_m^1}|_{\bar{\alpha}}$ . Alors, si  $\hat{n}_t^m := \text{card}(\{p \in \hat{f}_t(\bar{\alpha}) \mid \hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(x'), \{x, x'\} \neq \{x_1, x'_1\} \text{ et } x \neq x' \text{ dans } \bar{\alpha}\})$ , on a  $\hat{n}_t^m < \hat{n}_t \leq k$ .

Notons que, dans tous les cas, on a obtenu une suite  $\tau_m^1 \rightarrow 0$  telle que, pour chaque  $m \geq 1$ , la feuille  $A_{\tau_m^1}$  contient un vanishing cycle  $g_m$  qui a un extension cohérente positive et normale  $G_m^1 : [\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \times S^1 \rightarrow M$  telle que le nombre d'auto-intersections de  $\hat{g}_{m,t}^1$ , un relèvement de  $g_{m,t}^1 := G_m^1(t, \cdot)$ , est  $\hat{n}_{m,t}^1 \leq \min\{k - 1, \hat{n}_t - 1\}$ . En effet, dans les cas 1 et 2, il suffit de choisir  $\tau_m^1 = 0$  pour chaque  $m \geq 1$ ; dans le cas 3, la suite  $\tau_m^1$  est déjà donnée et il suffit de identifier les extrémités de  $\bar{\alpha}$  pour obtenir un cercle  $S^1$  et on a la propriété voulue.

Le même argument montre qu'on a une suite  $\tau_{m,n}^2 \rightarrow \tau_m^1$  telle que le nombre d'auto-intersections de  $\hat{g}_{m,n,t}^2$  est  $\hat{n}_{m,n,t}^2 \leq \min\{k-2, \hat{n}_t-2\}$ . En extrayant une sous-suite  $\tau_m^2 := \tau_{m,n(m)}^2 \rightarrow 0$ , on obtient un vanishing cycle  $g_m^2$  qui a une extension cohérente positive et normale  $\hat{G}_m^2$  telle que le nombre d'auto-intersections de  $\hat{g}_{m,t}^2$  est  $\hat{n}_{m,t}^2 \leq \min\{k-2, \hat{n}_t-2\}$ . En itérant cet argument au plus  $k-2$  fois, on obtient une suite  $\tau_m \rightarrow 0$  telle que, pour chaque  $m \geq 1$ , la feuille  $A_{\tau_m}$  contient un vanishing cycle qui admet une extension cohérente positive, normale et simple.  $\square$

### 6.2.4 Existence d'une feuille compacte

Voici la proposition qui nous intéresse pour terminer la preuve du théorème de Novikov.

**Théorème 6.2.11.** *Soit  $A_0$  une feuille de  $\mathcal{F}$  qui admet un vanishing cycle ayant une extension cohérente positive, normale et simple. Alors  $A_0$  est une feuille compacte.*

Ce théorème suit de nombreuses propositions.

**Proposition 6.2.12.** *Si  $A$  est une feuille non-compacte d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  de codimension 1 sur une variété compacte, alors pour chaque  $p \in A$  il existe une courbe fermée  $\gamma$  transverse à  $\mathcal{F}$  et passante par  $p$ .*

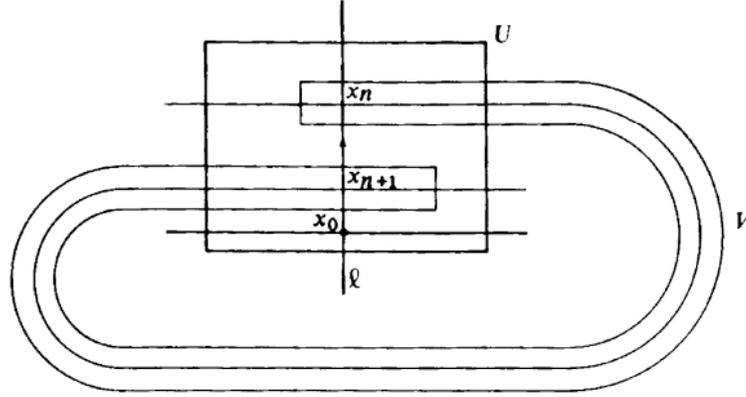
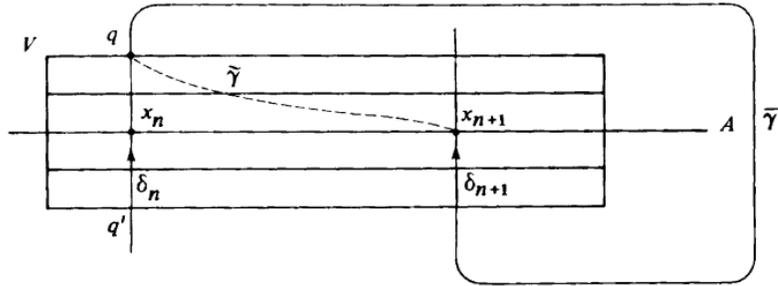
*Démonstration.* Comme  $M$  est compacte et  $A$  ne l'est pas, on a  $\bar{A} \setminus A \neq \emptyset$ . Considérons un point  $x_0 \in \bar{A} \setminus A$  et une carte distinguée  $(U, \phi)$  avec  $x_0 \in U$ . Soit  $\ell \subset U$  un arc normal à  $\mathcal{F}$  passant par  $x_0$ . Comme  $x_0 \in \bar{A} \setminus A$ , il existe une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de points tels que  $x_n \in \ell \cap A$ .

Soit  $\alpha : [0, 1] \rightarrow A$  une courbe différentiable sans auto-intersections telle que  $\alpha(0) = x_n \neq \alpha(1) = x_{n+1}$ . Pour le lemme 5.1.4 de trivialisations globale, il existe un voisinage  $V$  de  $\alpha([0, 1])$  tel que  $\mathcal{F}|_V$  soit équivalent à  $\mathcal{F}'$  de  $D^{n-1} \times (-\rho, \rho)$  qui a comme feuilles les  $D^{n-1} \times \{t\}$ , pour  $t \in (-\rho, \rho)$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que la situation soit comme dans la figure 6.6.

Traitons, d'abord, le cas où  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable.

Dans ce cas, on peut supposer que l'orientation de  $\ell$  soit compatible avec l'orientation transverse de  $\mathcal{F}|_V$ , de façon que  $\ell$  coupe  $V$  comme on a représenté dans la figure 6.6.

Soient, maintenant,  $\delta_n$  et  $\delta_{n+1}$  les composantes connexes de  $\ell \cap V$  qui contiennent, respectivement,  $x_n$  et  $x_{n+1}$  et  $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \ell$  l'arc reliant  $x_n$  à  $x_{n+1}$ . Alors  $\partial V \cap \delta_n = \{q, q'\}$ , avec  $q < q'$  dans  $\ell$ , où  $<$  est l'ordre naturellement induit par l'orientation de  $\ell$  choisie. En travaillant avec le feuilletage  $\mathcal{F}'$  sur  $D^{n-1} \times (-\rho, \rho)$ , on peut facilement trouver un arc  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow V$  transverse à  $\mathcal{F}|_V$ , compatible avec l'orientation positive de  $\mathcal{F}|_V$  et tel que  $\tilde{\gamma}(0) = x_{n+1}$  et  $\tilde{\gamma}(1) = q$ . On peut, clairement, supposer que les vecteurs tangents de  $\bar{\gamma}$  et  $\tilde{\gamma}$  en  $x_{n+1}$  et  $q$  coïncident, de façon qu'ils se recollent en une courbe différentiable  $\gamma : S^1 \rightarrow M$ . Toute la construction est représentée en figure 6.7. Donc, ce qu'on a obtenu jusqu'alors est une courbe fermée différentiable qui coupe la feuille  $A$  donnée. Maintenant, on

FIGURE 6.6 – Disposition de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ FIGURE 6.7 – Cas  $\mathcal{F}$  transversalement orientable : construction de  $\gamma$ 

va modifier  $\gamma$  de façon qu'elle va passer par un point  $x \in A$  donné : cela nous permet de conclure la preuve, dans le cas où  $\mathcal{F}$  est transversalement orientable. On répète, ici, la construction faite avant avec le lemme 5.1.4, pour travailler dans un feuilletage dont on connaît très bien les feuilles. Soit, alors,  $x$  un point arbitraire de  $A$ . Soit  $\beta : [0, 1] \rightarrow A$  un arc différentiable sans auto-intersections avec  $\beta(0) = x_{n+1}$  et  $\beta(1) = x$ . Le lemme 5.1.4 nous donne un voisinage  $W$  de  $\beta([0, 1])$  tel que  $\mathcal{F}|_W$  est équivalent à le feuilletage de  $D^{n-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$  de feuilles  $D^{n-1} \times \{t\}$  avec  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Comme  $\gamma \cap W$  est composé par deux points  $q, q'$ , disons avec  $q > q'$  dans  $\gamma$ , on peut définir un arc différentiable  $\tilde{\mu} : [0, 1] \rightarrow W$  transverse à  $\mathcal{F}$ , avec  $\tilde{\mu}(0) = q'$ ,  $\tilde{\mu}(1) = q$ ,  $\tilde{\mu}(\frac{1}{2}) = x$  et tel que les vecteurs tangents de  $\gamma$  et  $\tilde{\mu}$  en  $q$  et  $q'$  coïncident. Alors, en joignant  $\tilde{\mu}$  avec la partie de  $\gamma$  qui est dehors de  $W$ , on obtient une courbe fermée différentiable  $\mu$  passant par  $x$  et

transverse à  $\mathcal{F}$ ; voir la figure 6.8 pour une représentation.

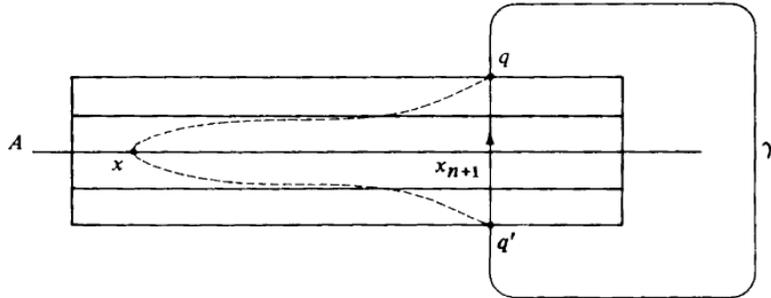


FIGURE 6.8 – Cas  $\mathcal{F}$  transversalement orientable : construction de  $\mu$

On omet ici les détails pour le cas  $\mathcal{F}$  non transversalement orientable : en effet, l'argument est exactement le même, sauf pour le fait que, afin que tout marche bien, on doit appliquer le lemme 5.1.4 à un arc qui passe par *trois* points successifs de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ ; on serait, alors, dans un des deux cas représentés dans la figure 6.9 et, dans tous les deux, on peut procéder comme avant pour arriver jusqu'à la conclusion.  $\square$

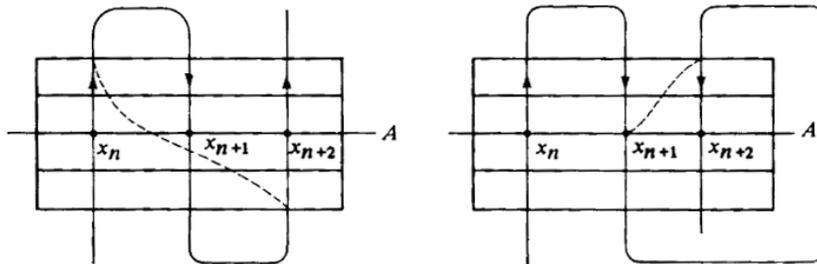


FIGURE 6.9 – Cas  $\mathcal{F}$  non transversalement orientable : cas possibles de disposition de  $\ell$  par rapport à trois points successifs de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$

Pour la proposition suivante, on travaille dans les hypothèses du théorème 6.2.11, c'est à dire  $A_0$  est une feuille de  $\mathcal{F}$  avec un vanishing cycle  $f_0$  qui admet une extension  $F : [0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$  cohérente, positive, normale et simple. On a, alors :

**Proposition 6.2.13.** *Il existe une immersion différentiable  $H : (0, \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. pour chaque  $x \in D^2$ , les arcs  $t \mapsto H(t, x)$  sont positifs et normales ;
2. pour chaque  $t \in (0, \epsilon]$ ,  $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$  ;
3. la restriction de  $H$  à  $(0, \epsilon] \times S^1$  coïncide avec  $F|_{(0, \epsilon] \times S^1}$ .

*Démonstration.* Premièrement, remarquons qu'on peut supposer que chaque feuille  $A$  de  $\mathcal{F}$  ait comme revêtement universel le plan  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, on peut supposer d'abord que notre feuille  $A$  soit orientable, quitte à considérer le revêtement d'orientation à deux feuillets. Maintenant, toute surface orientable admet une structure de surface de Riemann, et les revêtements universels des surfaces de Riemann sont, à homéomorphisme près, seulement  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{S}^2$ . Si l'on était dans le cas de  $\mathbb{S}^2$ , notre feuille  $A$  serait déjà compacte : rien à démontrer. Donc, forcément,  $\hat{A} \simeq \mathbb{R}^2$ .

En particulier, alors,  $\hat{A}_\epsilon \simeq \mathbb{R}^2$ . Comme  $F$  est une extension cohérente et simple de  $f_0$ , la courbe  $\hat{f}_\epsilon : S^1 \rightarrow \hat{A}_\epsilon$  est simple : alors, pour le théorème de la courbe fermée de Jourdan, il existe  $h_\epsilon : D^2 \rightarrow A_\epsilon$  telle que  $\hat{h}_\epsilon|_{\partial D^2} = \hat{f}_\epsilon$ . Comme  $\hat{f}_\epsilon(S^1)$  est une courbe simple plongée, on peut, de plus, supposer que  $\hat{h}_\epsilon$  est un difféomorphisme sur  $\hat{h}_\epsilon(D^2)$ , qui serait, alors, un disque. Donc, on a que  $f_\epsilon = \pi_{A_\epsilon} \circ \hat{f}_\epsilon$  s'étend, de façon naturelle, à une immersion  $h_\epsilon = \pi_{A_\epsilon} \circ \hat{h}_\epsilon : D^2 \rightarrow A_\epsilon$ . De plus, par le lemme 5.2.1,  $h_\epsilon$  s'étend en une immersion  $H : (\epsilon_0, \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$  telle que les arcs  $t \mapsto H(t, x)$  sont positifs et normales et telle que, pour chaque  $t \in (\epsilon_0, \epsilon]$ ,  $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$ .

Soit, maintenant,  $\tilde{F}$  la restriction de  $H$  à  $(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1$ . On a, alors,  $\tilde{F}(\epsilon, x) = h_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) = F(\epsilon, x)$ . Les arcs  $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$  et  $t \mapsto F(t, x)$  sont deux paramétrages d'une orbite du champ de vecteurs normal, fixé au début de cette section, au feuilletage  $\mathcal{F}$ . Donc, quitte à changer le paramétrage de  $(\epsilon_0, \epsilon]$ , on peut supposer que  $F(t, x) = \tilde{F}(t, x)$ , c'est à dire que  $H|_{(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1} = F|_{(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1}$ . En résumant, on a obtenu  $H : (\epsilon_0, \epsilon] \times S^1 \rightarrow M$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour chaque  $x \in D^2$ , les arcs  $t \mapsto H(t, x)$  sont positifs et normales ;
2. pour chaque  $t \in (\epsilon_0, \epsilon]$ ,  $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$  ;
3. la restriction de  $H$  à  $(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1$  coïncide avec  $F|_{(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1}$ .

En particulier, si  $\epsilon_0 = 0$ , on a déjà conclut la preuve.

Supposons, donc, d'être dans le cas malheureux où  $\epsilon_0 > 0$ . On va, alors, prouver que, pour chaque  $x \in D^2$ ,  $\lim_{t \rightarrow \epsilon_0^+} H(t, x)$  existe.

La courbe fermée  $\hat{f}_{\epsilon_0}$  est le bord d'un disque dans  $\hat{A}_{\epsilon_0}$  et, donc, en utilisant le même argument que tout à l'heure, il existe  $\delta > 0$  et une extension  $H' : (\epsilon_0 - \delta, \epsilon_0 + \delta) \times D^2 \rightarrow M$  satisfaisant encore les propriétés 1, 2 et 3, avec domaine opportunément changé.

Si  $\epsilon_0 < t_0 < \epsilon_0 + \delta$ , la restriction  $h'_{t_0} = H'|_{\{t_0\} \times D^2}$  est homotopiquement triviale dans  $A_{t_0}$  et, donc, elle se relève à  $\hat{h}'_{t_0} : D^2 \rightarrow \hat{A}_{t_0}$ . Par construction, on a  $\partial(\hat{h}'_{t_0}(D^2)) = \hat{f}'_{t_0}(S^1) = \partial(\hat{h}_{t_0}(D^2))$ , comme  $H' = H = F$  sur  $\{t_0\} \times S^1$ . De plus, dès que  $\hat{A}_{t_0} = \mathbb{R}^2$  et que  $\hat{h}_{t_0}$  et  $\hat{h}'_{t_0}$  sont deux immersions, cela entraîne que  $\hat{h}_{t_0}(D^2) = \hat{h}'_{t_0}(D^2)$ , c'est à dire que pour chaque  $x \in D^2$  il existe  $y \in D^2$  tel que  $\hat{h}_{t_0}(x) = \hat{h}'_{t_0}(y)$ . Or, par l'unicité des trajectoires du champ normal au feuilletage,

on a  $H(t, x) = H'(t, y)$  pour chaque  $t \in (\epsilon_0, \epsilon_0 + \delta)$ . Donc,  $\lim_{t \rightarrow \epsilon_0^+} H(t, x)$  existe et vaut  $H'(\epsilon_0, y)$ .

Maintenant, on peut facilement étendre  $H$  à  $(\epsilon_0 - \delta, \epsilon) \times D^2$ , comme  $f_{\epsilon_0}$  est homotope à une constante dans  $A_{\epsilon_0}$  et  $\hat{f}_{\epsilon_0}$  est une courbe simple dans  $\hat{A}_{\epsilon_0}$ . Par la connexité de  $(0, \epsilon]$ , on en conclut facilement que  $H$  peut être étendue à  $(0, \epsilon] \times D^2$  tout. Cette  $H$  vérifie, par construction, toutes les propriétés voulues; la seule chose qui reste à vérifier est le fait qu'elle soit une immersion, mais, effectivement, cela suit directement du fait qu'on l'a construite à partir des orbites du champ normal à  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Un autre résultat technique nous donne des propriétés de l'immersion  $H$  qu'on vient de construire :

**Proposition 6.2.14.** *Soit  $H : (0, \epsilon] \times D^2 \rightarrow M$  donnée par la proposition 6.2.13 et soient  $h_t = H|_{\{t\} \times D^2}$  et  $D_t = h_t(D^2)$ . Alors il existe une suite décroissante  $\tau_n \rightarrow 0$  satisfaisant les propriétés suivantes :*

1.  $A_{\tau_n} = A_{\tau_{n+1}} = A$  pour  $n \geq 1$  ;
2.  $D_{\tau_n} \subset D_{\tau_{n+1}}$  pour  $n \geq 1$  ;
3. pour chaque  $n \geq 1$ , il existe une application  $g_n : D^2 \rightarrow D^2$  telle que  $g_n : D^2 \rightarrow g_n(D^2)$  soit un difféomorphisme et  $h_{\tau_n} = h_{\tau_{n+1}} \circ g_n$ .

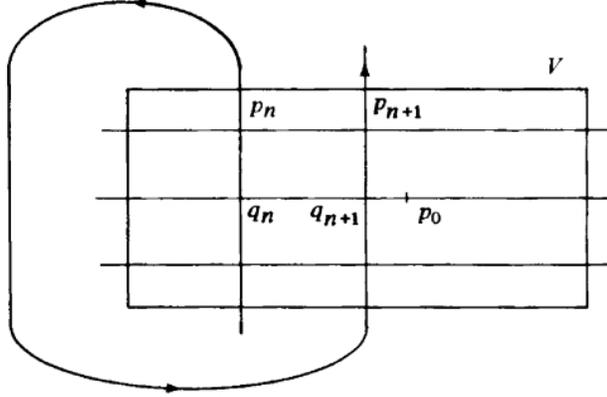
*Démonstration.* Soit  $U = \{x \in D^2 \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t, x) \text{ existe}\}$ . On va montrer que  $U$  est un sous-ensemble propre et ouvert de  $D^2$ , contenant  $S^1$ .

En effet,  $U$  est ouvert puisque les arcs  $t \mapsto H(t, x)$  sont des paramétrages des orbites du champ de vecteurs normale à  $\mathcal{F}$ ; donc, le théorème d'existence locale du flot nous assure que, si  $x \in U$ , alors  $U$  contient tout un voisinage de  $x$ , c'est à dire que  $U$  est ouvert. De plus,  $S^1 \subset U$  car la restriction de  $H$  à  $(0, \epsilon] \times S^1$  coïncide avec  $F$ . Enfin, si, par absurde,  $U = D^2$  tout,  $H$  s'étendrait de façon continue à  $\{0\} \times D^2$ , c'est à dire  $f_0$  serait homotope à une constante dans  $A_0$ , ce qui est absurde.

Considérons, maintenant, un  $x_0 \in D^2 \setminus U$ . Comme  $M$  est compacte, il existe une suite décroissante  $s_n \rightarrow 0$  telle que, si on note  $p_n = H(s_n, x_0)$ , il existe  $p_0 \in M$  avec  $p_n \rightarrow p_0$ ; notons  $A$  la feuille passant par  $p_0$ . Soit  $(V, \psi)$  une carte distinguée avec  $p_0 \in V$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $p_n \in V$  pour chaque  $n \geq 1$ .

Comme l'arc  $\gamma(t) = H(t, x_0)$  est normal à  $\mathcal{F}$ , pour chaque  $n \geq 1$ , il existe  $t_n > 0$  tel que  $q_n = H(t_n, x_0)$  soit dans  $A$  et le sous-arc de  $\gamma$  qui lie  $p_n$  et  $q_n$  soit contenu dans  $V$ ; la figure 6.10 représente le cas où  $s_{n-1} < t_n < s_n$ , mais il se peut bien qu'on ait la situation symétrique où  $s_n < t_n < s_{n+1}$ . En tout cas, on a clairement que  $t_n \rightarrow 0$  et qu'elle est une suite décroissante satisfaisant  $A_{t_n} = A$ , c'est à dire que  $(t_n)_{n \geq 1}$  vérifie la propriété 1 de l'énoncé. On va, maintenant, extraire une sous-suite de  $(t_n)_{n \geq 1}$  qui vérifie toutes les propriétés de la proposition.

Notons, d'abord, que  $p_0 \in D_{t_n}$  pour  $n$  assez grand. En effet, si c'était pas le cas, on aurait qu'il existe  $b_n \in \partial D_{t_n}$  avec  $b_n \rightarrow p_0$ , dès

FIGURE 6.10 – Cas  $s_{n-1} < t_n < s_n$ , c'est à dire  $q_n < p_n$  dans  $\gamma$ 

que  $q_n$  est dans l'intérieur de  $D_{t_n}$ . Or, on a aussi  $\partial D_{t_n} \subset f_{t_n}(S^1)$ , qui converge uniformément vers  $f_0(S^1)$ ; on aurait, alors,  $p_0 \in f_0(S^1) \not\subset A$ , ce qui est absurde.

Choisissons, maintenant,  $\hat{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$  et des voisinages  $W, \hat{W}$  de  $p_0, \hat{p}_0$  dans  $A, \hat{A}$ , respectivement, tels que  $\pi : \hat{W} \rightarrow W$  soit un difféomorphisme. Considérons une suite  $\hat{q}_n \in \hat{W}$  avec  $\hat{q}_n \rightarrow \hat{p}_0$  et  $\pi_A(\hat{q}_n) = q_n = h_{t_n}(x_0)$ . Soit, pour chaque  $n \geq 1$ ,  $\hat{h}_{t_n} : D^2 \rightarrow A$  le seul relèvement de  $h_{t_n}$  tel que  $\hat{h}_{t_n}(x_0) = \hat{q}_n$  et soit  $\hat{D}_{t_n} = \hat{h}_{t_n}(D^2)$ .

Notons que si  $m \neq n$  sont des entiers positifs, les courbes  $h_{t_m}(S^1) = f_{t_m}(S^1)$  et  $h_{t_n}(S^1) = f_{t_n}(S^1)$  sont courbes fermées disjointes de  $A$ ; de même, les  $\hat{h}_{t_m}(S^1), \hat{h}_{t_n}(S^1)$  sont courbes fermées et simples dans  $\hat{A}$  et, en particulier,  $\hat{D}_{t_n} \subset \hat{D}_{t_m}$  ou  $\hat{D}_{t_m} \subset \hat{D}_{t_n}$ , dès que ces disques s'intersectent au moins sur le point  $p_0$ . Alors, on a aussi  $D_{t_n} \subset D_{t_m}$  ou  $D_{t_m} \subset D_{t_n}$ .

On rappelle que avec la topologie des feuilles sur  $M$  les feuilles globales résultent des sous-variétés immergées; en particulier, elles sont des espaces topologiques métrisables pour cette topologie. Donc on peut bien fixer une métrique  $d_A$  sur  $A$  qui donne la topologie des feuilles sur  $A$  même.

Maintenant, comme la suite de courbes  $h_{t_n}(S^1)$  converge vers  $f_0(S^1)$ , on a que  $f_0(S^1) \subset \bar{A} \setminus A$ ; donc,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_A(p_0, h_{t_n}(S^1)) = +\infty$ . On peut, alors, extraire une suite décroissante  $\tau_k = t_{n_k}$  de  $(t_n)_{n \geq 1}$  telle que  $d_A(p_0, h_{\tau_k}(S^1))$  soit croissante et divergeant vers  $+\infty$ . Cette suite décroissante  $(\tau_n)_{n \geq 1}$ , clairement convergeant vers 0, satisfait alors les propriétés 1 et 2 de la proposition.

Posons, maintenant,  $D_n = h_{\tau_n}(D^2)$  et  $\hat{D}_n = \hat{h}_{\tau_n}(D^2)$ . Notons, alors, que, pour chaque  $n \geq 1$ ,  $\hat{h}_{\tau_n} : D^2 \rightarrow \hat{D}_n$  est un difféomorphisme et que  $\hat{D}_n \subset \hat{D}_{n+1}$ . Enfin, on définit  $g_n : D^2 \rightarrow D^2$  en posant  $g_n = (\hat{h}_{\tau_{n+1}})^{-1} \circ \hat{h}_{\tau_n}$ : ces difféomorphismes  $g_n$  satisfont, alors, toutes les propriétés voulues.  $\square$

Considérons maintenant la variété topologique quotient  $K_n$  obtenu à partir de la variété à bord  $[\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2$  en identifiant les points  $(\tau_n, x)$  avec  $\tau_{n+1}, g_n(x)$  pour tout  $x \in D^2$  (voir figure 6.11).

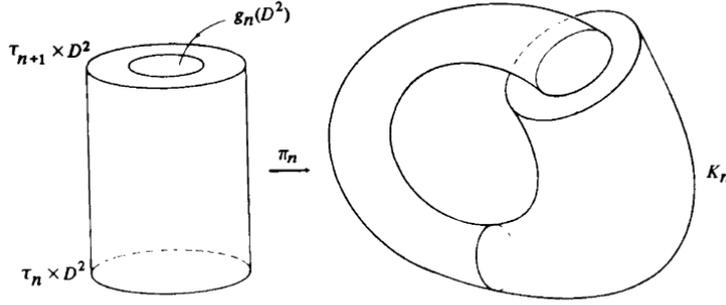


FIGURE 6.11 – Construction de  $K_n$

Soit  $\pi_n : [\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2 \rightarrow K_n$  la projection canonique au quotient. Remarquons que pour tout  $x \in D^2$  on a  $h_{\tau_{n+1}}(g_n(x)) = h_{\tau_n}(x)$ . Donc il existe une application  $\overline{H}_n : K_n \rightarrow M$  telle que  $H_n = \overline{H}_n \circ \pi_n$ . En particulier,  $\overline{H}_n$  est une immersion.

Cette construction contient l'idée fondamentale de la preuve du théorème de Novikov.

Avec tout ce qu'on a dit jusqu'alors, on peut finalement prouver le théorème 6.2.11 :

*Démonstration (théorème 6.2.11).* Supposons par l'absurde que  $A_0$  ne soit pas compacte. Fixons  $x_0 \in S^1$ , et soit  $q_0 = f_0(x_0)$ .

D'après la proposition 6.2.12, il existe une courbe fermée positive  $\gamma$  transverse à  $\mathcal{F}$  passant par  $q_0$ . Quitte à considérer une courbe homotope à  $\gamma$ , on peut supposer que :

1.  $\tilde{\gamma}$  rencontre  $F([0, \varepsilon] \times S^1)$  le long du segment normal  $\{f_t(x_0) | t \in [0, \alpha]\}$ , où  $0 < \alpha \leq \varepsilon$ ;
2.  $\tilde{\gamma}$  ne rencontre pas le segment normal  $\{f_t(x) | t \in [0, \alpha]\}$ , pour tout  $x \neq x_0$ .

À un reparamétrage près, on peut supposer que  $\tilde{\gamma}(t) = f_t(x_0)$ , pour  $t \in [0, \alpha]$ . Considérons maintenant la suite  $\tau_n$  comme dans la proposition 6.2.14, et soit  $n$  assez grand de façon que  $\tau_n < \alpha$ , et soit  $\overline{H}_n : K_n \rightarrow M$  comme dans la dernière remarque.

Pour tout  $x \in D^2$  considérons la courbe  $\beta_x(t) := \pi_n(t, x)$ . Par construction, on a  $\overline{H}_n(\beta_x(t)) = H(t, x)$ , et donc la courbe  $t \mapsto \beta_x(t)$  est envoyée par  $\overline{H}_n$  dans une orbite du champ de vecteurs normal. En particulier  $\tilde{\gamma}(t) = \overline{H}_n(\beta_{x_0}(t))$ , pour  $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$ .

On va tirer en arrière la partie de  $\tilde{\gamma}$  contenue dans  $\overline{H}_n(K_n)$  en une courbe  $\bar{\gamma}$  dans  $K_n$  telle que  $\overline{H}_n \circ \bar{\gamma} = \tilde{\gamma}$ .

Posons  $\bar{\gamma}(t) := \beta_{x_0}(t)$  pour  $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$ . Comme  $\tilde{\gamma}(t)$  est contenu dans l'intérieur de  $\overline{H}_n(K_n)$  pour  $\tau_n < t < \tau_n + \mu$  (où  $\mu > 0$  est choisi suffisamment petit), on peut relever  $\tilde{\gamma}$  dans l'intervalle  $[\tau_{n+1}, \tau_n + \mu]$  (voir figure 6.12).

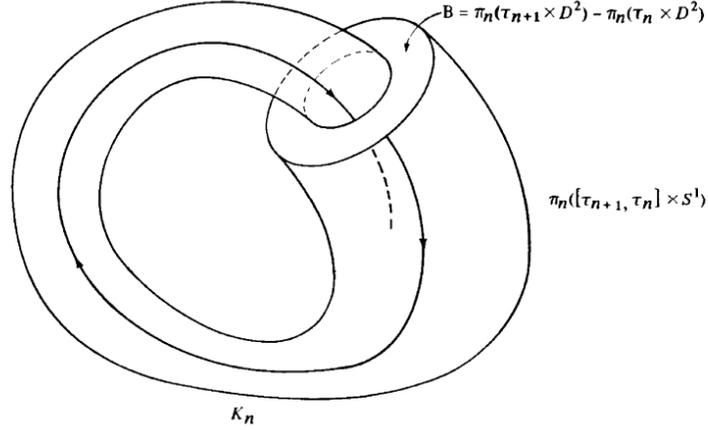


FIGURE 6.12 – Construction de  $\bar{\gamma}$

Comme  $\overline{H}_n$  est un difféomorphisme local, on peut continuer à tirer en arrière  $\tilde{\gamma}$  jusqu'à ce que  $\bar{\gamma}$  reste dans l'intérieur de  $K_n$ . A priori on sera obligé à s'arrêter quand on rencontrera  $\partial K_n$ . D'autre part, on doit le rencontrer puisque  $\tilde{\gamma}$  est une courbe fermée et le tiré en arrière part du bord.

Il y a donc seulement deux possibilités afin que  $\bar{\gamma}$  rencontre  $\partial K_n$  :

1. en  $\pi_n([\tau_{n+1}, \tau_n] \times S^1)$ ;
2. en  $B := \pi_n(\{\tau_{n+1}\} \times D^2) \setminus \pi_n(\{\tau_n\} \times D^2)$ .

Or, les deux sont absurdes.

La première possibilité est exclue car  $\tilde{\gamma}$  coupe  $H_n([\tau_{n+1}, \tau_n] \times S^1)$  seulement le long du segment normal  $t \mapsto f_t(x_0) = \tilde{\gamma}(t)$ , pour  $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$ .

La seconde est aussi impossible. En effet comme  $\overline{H}_n(B) \subset A = A_{\tau_n}$ , si  $\bar{\gamma}$  touchait le bord de  $K_n$  en un point  $z \in B$  alors son vecteur vitesse en ce point sortirait de  $K_n$ . Donc le vecteur tangent à  $\tilde{\gamma}$  en  $\overline{H}_n(z)$  serait dans la direction négative. Cela contredit la positivité de  $\tilde{\gamma}$ .

On a obtenu une contradiction, supposant que la feuille  $A_0$  n'était pas compacte. Cela achève la preuve de la proposition.  $\square$

**Remarque.** Pour raisonner sur un exemple plus visuel, on peut encore une fois considérer le feuilletage orientable de Reeb  $\mathcal{F}$  de  $S^3$ , présenté en 2.7. On considère ce qui se passe au voisinage de la feuille compacte, qui sépare les tores solides recollés en  $S^3$ .

Regardons la figure 6.13 : elle représente la feuille compacte  $A_0$ , qu'on sait être homéomorphe à un tore bidimensionnel  $S^1 \times S^1$ . De plus, on y voit un vanishing cycle  $f_0$  pour  $A_0$  qui admet une extension cohérente positive, normale et simple, dessinée avec des nuances. Cette extension indique la direction transverse au feuilletage.

A l'intérieur on peut identifier l'immersion de la variété à coin  $K_n$  qu'on vient de construire.

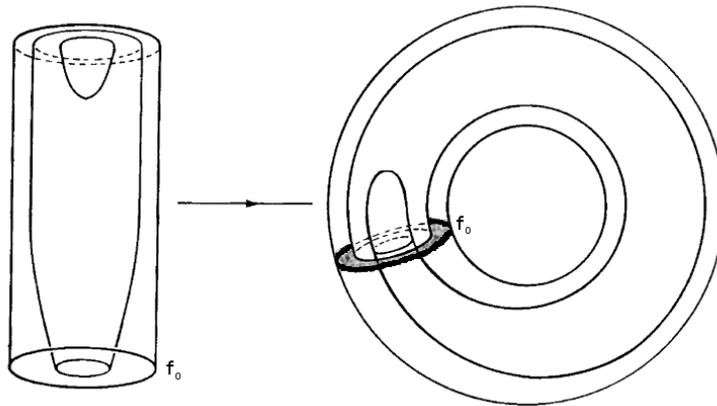


FIGURE 6.13 – Situation autour de la feuille compacte  $S^1 \times S^1$

Supposons maintenant d'avoir une courbe  $\gamma$  transverse à  $\mathcal{F}$  qui traverse  $A_0$ . Si elle entre aussi à l'intérieur de l'immersion de  $K_n$ , elle ne pourra jamais y sortir : cela est l'idée sur laquelle repose la démonstration de la dernière proposition. En effet, on peut supposer que la courbe soit positive. Si à un certain point elle sortait de  $K_n$ , on aurait forcément un instant où la positivité a été perdue ; alors, par continuité, on aurait aussi un point où la courbe n'était plus transverse à  $\mathcal{F}$ . La situation serait comme dans la figure 6.14, où l'on voit notre courbe qui est censée rester à l'intérieur de  $K_n$ .

Cela entraîne en particulier qu'on ne peut pas avoir une courbe *fermée* transverse à  $\mathcal{F}$  qui traversent  $K_n$ . Comme on peut construire des immersion de  $K_n$  qui soient arbitrairement proches à  $A_0$ , on conclut que le même est vrai pour les courbes qui traversent  $A_0$ .

### 6.2.5 Conclusion de la preuve

Comme conséquence des résultats des sections précédents, on obtient une preuve très concise du théorème de Novikov, dont on répète l'énoncé :

**Théorème 6.2.15.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^2$  de codimension 1, défini sur une*

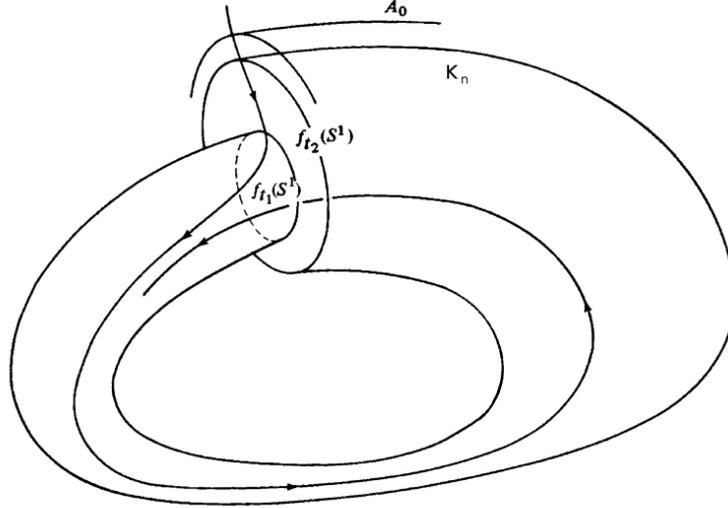


FIGURE 6.14 – La courbe piégée

3-variété compacte ayant groupe fondamental fini.  
Alors  $\mathcal{F}$  a une feuille compacte.

*Démonstration.* Supposons d'abord  $\mathcal{F}$  transversalement orientable. D'après la proposition 6.2.4, il existe un vanishing cycle pour  $\mathcal{F}$ . D'après la proposition 6.2.9,  $\mathcal{F}$  a une feuille  $A_0$  contenant un vanishing cycle, qui admet une extension cohérente positive, normale et simple. D'après le théorème 6.2.11, la feuille  $A_0$  est compacte.

Dans le cas général, on fixe une métrique riemannienne sur  $M$  et un champ de droites  $L$  orthonormal à  $\mathcal{F}$  en tout point. Considérons maintenant le revêtement double d'orientation  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  de  $L$ , comme dans la proposition 1.4.1.

. On peut utiliser l'argument précédent pour conclure que  $\pi^*(\mathcal{F})$  admet une feuille compacte  $\tilde{A}_0$ . Alors la feuille  $A_0 := \pi(\tilde{A}_0)$  de  $\mathcal{F}$  est compact, en tant qu'image continue d'un compact.  $\square$

**Remarque 6.2.16.** On peut se demander si le résultat est encore valide en dimension  $n \geq 4$ . La réponse est négative : il existe des variétés lisses de dimension  $n \geq 4$  compactes ayant groupe fondamental fini qui admettent des feuilletages de codimension 1 sans feuilles compactes. Voir, par exemple, l'article [4] en bibliographie.

# Appendices

# Annexe A

## Feuilletages du disque et construction de Hæfliger

### A.1 Singularités d'applications à valeurs réels

Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n$  et soit  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^t$ , avec  $2 \leq t \leq s$ .

On appelle *singularité de  $g$*  chaque point  $p \in M$  tel que  $dg(p) = 0$ .

**Rappel.** Si  $(U, \phi)$  est une carte au voisinage d'un point  $p$  singulier pour  $g$ , on peut considérer la forme quadratique  $Q_\phi^p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $Q_\phi^p(u, v) = \text{Hess}_p(f \circ \phi^{-1})(d_p \phi(u), d_p \phi(v))$ .

Si  $(V, \psi)$  est une autre carte au voisinage de  $p$ ,  $Q_\phi^p = Q_\psi^p$  comme formes quadratiques ; donc, on a une forme quadratique  $Q^p$  en  $p$  associée à  $g$  indépendante du choix de la carte, qui est appelée *Hessien de  $g$  en  $p$* , et notée souvent  $\text{Hess}_p(g)$ .

Si  $p$  est une singularité de  $g$ , on dit que  $p$  est *non dégénérée* si  $\text{Hess}_p(g)$  est non dégénérée comme forme quadratique.

On dit aussi que  $\text{Hess}_p(g)$  est *positive* (resp. *négative*) si  $\text{Hess}_p(g)(v) > 0$  ( resp.  $\text{Hess}_p(g)(v) < 0$ ) pour chaque  $v \in T_p M$  ; on appelle enfin *indice de  $f$  en  $p$*  la valeur

$$\text{ind}(g, p) = \max \{ \dim(E) \mid E \text{ sous espace de } T_p M \text{ avec } \text{Hess}_p(g)|_{E \times E} \text{ négative} \}.$$

Rappelons, sans preuve, quelque résultat classique sur les "formes canoniques" au voisinage des points singuliers non dégénérés :

**Théorème A.1.1** (Lemme de Morse). *Soit  $p \in M$  un point singulier non dégénéré pour  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\text{ind}(f, p) = k$ . Alors il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans  $M$ , un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  contenant 0 et un difféomorphisme  $\rho : (U, p) \rightarrow (\Omega, 0)$  tels que*

$$g \circ \rho(x_1, \dots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 + \dots - x_k^2 + x_{k+1} + \dots + x_n^2.$$

Ce lemme nous dit qu'on peut identifier une classe très agréable de fonctions de  $M$  vers  $\mathbb{R}$  : on dit que  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une *fonction de Morse* si tous ses points singuliers sont non dégénérés.

**Remarque.** Dans le cas de dimension  $n = 2$ , ce qui nous intéressera dans la suite, les formes canoniques possibles sont les suivantes :

1.  $g \circ \rho(x, y) = -x^2 - y^2$  ;
2.  $g \circ \rho(x, y) = +x^2 + y^2$  ;
3.  $g \circ \rho(x, y) = +x^2 - y^2$  ;

Dans les cas 1 (respectivement 2)  $p$  est un maximum (respectivement minimum) local, et les courbes de niveau sont difféomorphes à des cercles : dans ces cas, on dit que  $p$  est un *centre* pour  $g$  ; par contre, dans le cas 3,  $p$  est un point de selle et les courbes de niveau sont difféomorphes à des selles avec 4 séparatrices.

Enfin, on énonce, sans preuve, un lemme technique qui sera très utile dans la suite :

**Lemme A.1.2.** *Soient  $U, V$  et  $W$  des ouverts dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset W$  et  $W$  une boule ouverte et soit  $h : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^t$ ,  $t \geq 2$ . Alors, pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe  $g : \bar{W} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^t$ , telle que  $\|g - h\|_{C^t} < \epsilon$ ,  $g|_{W \setminus V} = h|_{W \setminus V}$  et  $g|_U$  est une fonction de Morse.*

## A.2 Feuilletages singuliers du disque

### A.2.1 Définitions

Dans cette section, on va introduire le concept de "feuilletage singulier" ; on utilisera, pour éviter de rentrer dans les détails techniques de la théorie des feuilletages singuliers, des définitions "non-standard", adaptées au cas du disque unitaire  $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ , comme c'est le seul cas qui nous intéresse.

Soit  $M$  une variété  $C^s$  de dimension  $n \geq 3$ , feuilletée par  $\mathcal{F}$  de classe  $C^r$  et codimension 1.

Soit, maintenant,  $g : D^2 \rightarrow M$  une application  $C^\infty$ . Comme le feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $M$  donne, de façon naturelle, une partition de  $M$  même, on peut considérer la partition  $g^*(\mathcal{F})$ , qu'on indiquera parfois plus simplement  $\mathcal{F}^*$ , induite sur  $D^2$  via l'image réciproque selon  $g$  de la partition  $\mathcal{F}$  de  $M$ .

**Définition A.2.1.** On appelle chaque partition  $\mathcal{F}^*$  de  $D^2$ , construite comme ci-dessus, *feuilletage singulier* sur  $D^2$ .

**Remarque.** En général, on peut pas définir, via le tiré en arrière de  $\mathcal{F}$ , un feuilletage sur  $D^2$  selon la définition qu'on avait donné dans le chapitre 1.

En effet, la difficulté ne consiste pas seulement en le fait que  $D^2$  est une variété à bord, mais aussi en le fait que  $g^*(\mathcal{F})$  peut avoir des "singularités" (voir la figure A.1). Il existe aussi une théorie des feuilletages singuliers, qui permet de traiter formellement ces cas-là, mais on ne va pas entrer dans les détails ; ici, on se contentera de traiter la question de façon plus élémentaire.

Notons, que si  $p \in D^2 \setminus \partial D^2$  n'est pas un point de tangence de  $g$  avec  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}^*$  définit bien un feuilletage, au sens du chapitre 1, au voisinage de  $p$ .  $\mathcal{F}_p$  est bien une sous variété (à bord) de  $M$ , au voisinage de  $p$ .

De plus, si  $g|_{S^1} : S^1 \rightarrow M$  est transverse à  $\mathcal{F}$ , la partition  $\mathcal{F}^*$  de  $D^2$  satisfait la propriété suivante : si  $E \in \mathcal{F}^*$  est tel que  $E \cap \partial D^2 \neq \emptyset$ , alors  $E$  est un sous variété (à bord) de  $D^2$  au voisinage de chaque  $p \in E \cap \partial D^2$  et  $y$  est transverse, en tant que sous variété, à  $\partial D^2$ .

Dans ce cas-là, on dit simplement que  $\mathcal{F}^*$  est transverse à  $\partial D^2$ .

Par contre, si  $p \in D^2$  est un point de tangence de  $g$  avec  $\mathcal{F}$  et si  $(U, \phi)$  est une carte distinguée au voisinage de  $p$ , on a que  $\mathcal{F}^*$  n'est pas "régulier" au voisinage de  $p$ ; on dit, alors, que :

1.  $p$  est un *centre* pour  $\mathcal{F}^*$  si  $\hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$  a une singularité non dégénérée de type centre (au sens des fonctions de Morse) en  $p$ ;
2.  $p$  est une *selle* pour  $\mathcal{F}^*$  si  $\hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \rightarrow \mathbb{R}$  a une singularité non dégénérée de type selle (au sens des fonctions de Morse) en  $p$ .

La figure A.1 représente ce qui se passe dans le cas où  $M$  est de dimension  $n = 3$ , mais, en effet, l'aspect des singularités pour  $\mathcal{F}^*$  sur  $D^2$  est celui-là, aussi dans le cas  $M$  de dimension  $n \geq 3$  générique.

Enfin, on dit que  $\mathcal{F}^*$  admet des connections entre deux selles distinctes s'il existe  $p, q \in D^2$  point de selle pour  $\mathcal{F}^*$  et un élément  $E$  de  $\mathcal{F}^*$  tel que  $\bar{E}$  est un arc lisse de  $p$  vers  $q$ .

## A.2.2 Feuilletages singuliers du disque et champs de vecteurs

Avec toutes ces notations, on peut, maintenant, énoncer quelque résultat qui nous sera utile dans la suite.

Pour cette section, on notera  $\mathcal{F}^*$  un feuilletage singulier sur  $D^2$ , transverse au bord  $\partial D^2$  et avec un nombre fini de singularité; on notera aussi l'ensemble des singularités par  $T$ .

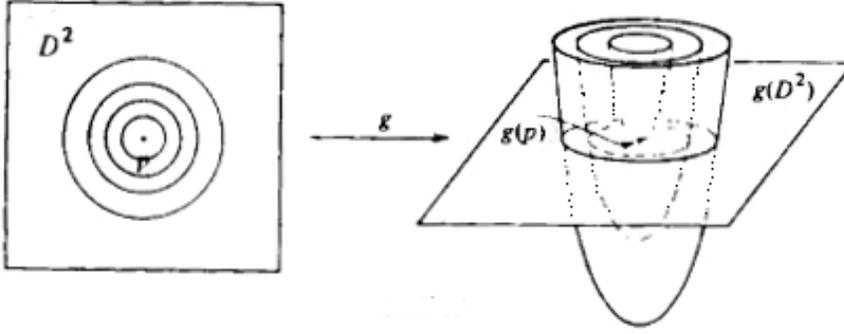
On dit que  $\mathcal{F}^*$  est  $C^r$  localement orientable si pour chaque point  $p \in D^2$  il existe un voisinage  $U$  de  $p$  et un champ de vecteurs  $Y$  sur  $U$  tel que :

1. si  $q \in T$  on a  $Y(q) = 0$ ;
2. si  $q \in U \setminus T$  on a  $Y(q) \neq 0$  est tangent à l'ensemble  $E_q \in \mathcal{F}^*$  passant par  $q$ .

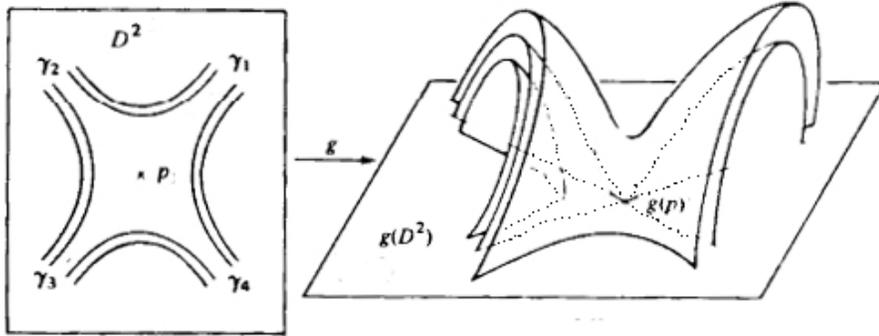
**Remarque.** Notons que, pour ce qu'on a dit dans la section précédente, si  $q \in U \setminus T$ , la direction tangent à  $E_q$  est toujours bien définie; donc, la propriété 2 est bien formulée.

On dit aussi que  $\mathcal{F}^*$  est  $C^r$  orientable s'il existe un champ  $Y$  comme ci-dessus défini sur tout  $D^2$ .

FIGURE A.1 – Petite dessin des types de singularité, cas  $n = 3$  : dans le dessin, les surfaces sont les feuilles de  $\mathcal{F}$ .



(a) Cas du centre



(b) Cas de la selle

**Proposition A.2.2.** *Si  $\mathcal{F}^*$  est un feuilletage singulier de  $D^2$   $C^r$  localement orientable, il est  $C^r$  orientable.*

*Démonstration.* Pour chaque  $p \in D^2$  il existe un champ de vecteurs  $Y$  de classe  $C^r$ , défini sur un voisinage  $U$  de  $p$ , tel que  $Y$  soit tangent à  $\mathcal{F}^*$  et  $Y(q) = 0$  si et seulement si  $q$  est une singularité de  $\mathcal{F}^*$ . Par compacité de  $D^2$ , on en peut trouver un nombre fini  $U_1, \dots, U_k$  qui recouvrent  $D^2$ ; notons  $Y_1, \dots, Y_k$  leurs respectives champs de vecteurs.

On affirme, maintenant, que trouver un champ de vecteurs  $Y$  global équivaut à orienter convenablement les  $Y_i$ .

En effet, supposons pour l'instant de pouvoir obtenir des  $\tilde{Y}_i$  sur  $U_i$ , en posant simplement  $\tilde{Y}_i = Y_i$  ou  $-Y_i$ , de façon telle que, pour  $i \neq j$ ,  $\tilde{Y}_i(q)$  et  $\tilde{Y}_j(q)$  ont "même orientation" si  $q \in (U_i \cap U_j) \setminus T$ . Cela signifie qu'il existe  $\lambda_q > 0$  telle que  $\tilde{Y}_i(q) = \lambda_q \tilde{Y}_j(q)$ . Alors, si  $(\rho_i)_{i=1}^k$  est une partition de l'unité subordonnée au

recouvrement  $(U_i)_{i=1}^k$  de  $D^2$ , on a que

$$Y = \sum_{i=1}^k \rho_i \tilde{Y}_i$$

est le champs de vecteurs de classe  $C^r$  voulu, comme il est défini sur tout  $D^2$ , il est bien tangent à  $\mathcal{F}^*$  et, dès que les  $\tilde{Y}_i$  sont orientés convenablement,  $Y(q) = 0$  si et seulement si  $q$  est une singularité de  $\mathcal{F}^*$ .

Donc, il suffit de montrer qu'on peut obtenir des  $\tilde{Y}_i$  comme ci-dessus.

On note, premièrement, que, quitte à diviser les  $U_i$ , on peut supposer que les  $U_i$  sont connexes et que, si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $U_i \cap U_j$  est connexe. Donc, sur  $(U_i \cap U_j) \setminus T$ , on peut écrire  $Y_i = \lambda_{ij} Y_j$ , où  $\lambda_{ij} : (U_i \cap U_j) \setminus T \rightarrow \mathbb{R}$  est continu et jamais nulle; en particulier, par connexité de  $U_i \cap U_j$ , et donc de  $(U_i \cap U_j) \setminus T$ , comme  $T$  est fini, on a que le signe de  $\lambda_{ij}$  est constant.

Si  $\lambda_{ij} > 0$ , on dit, comme ci-dessus, que  $Y_i$  et  $Y_j$  ont *même orientation*; sinon, on dit qu'ils ont *orientation opposée*.

Notons que clairement on peut choisir les  $\tilde{Y}_i$  de façon qu'ils ont même orientation "le long d'un arc quelconque", c'est à dire que si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow D^2$  est tel que  $\gamma(0) = p_1 \in U_1$  et  $\gamma(1) = p_j \in U_j$  on peut aisément trouver un recouvrement  $(U_{i_1} = U_1, U_{i_2}, \dots, U_{i_{l-1}}, U_{i_l} = U_j)$  de  $\gamma([0, 1])$  et des  $\tilde{Y}_{i_1} = \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{i_2}, \dots, \tilde{Y}_{i_{l-1}}, \tilde{Y}_{i_l} = \tilde{Y}_j$  correspondants qui ont orientation cohérente, selon la définition qu'on a donnée tout à l'heure. On omet ici les détails, comme ceci est un argument classique de géométrie différentielle.

Or, c'est aussi facile de vérifier que si  $\delta, \gamma : [0, 1] \rightarrow D^2$  sont deux arcs homotopes, choisir un orientation "le long de  $\gamma$ " ou "le long de  $\delta$ ", au sens de ci-dessus, donne le même résultat : si on note  $\tilde{Y}_{k_1} = \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{k_2}, \dots, \tilde{Y}_{k_{m-1}}, \tilde{Y}_{k_m}$  la chaîne de champs obtenue à partir de  $\delta$ , on aura simplement,  $\tilde{Y}_{k_m} = \tilde{Y}_{i_l}$ , où  $\tilde{Y}_{i_l}$  était obtenu à partir de  $\gamma$ , comme noté ci-dessus. On omet, encore une fois, les détails, comme ceci est aussi un argument très classique.

Enfin, comme  $D^2$  est simplement connexe, tous les arcs qui lient deux points donnés sont homotopes à extrémités fixés : cela montre qu'on peut définir  $Y$  sur  $D^2$  en utilisant la construction "le long des arcs", comme cela ne dépend pas de l'arc choisi.  $\square$

On a un corollaire immédiat de cette proposition :

**Corollaire A.2.3.** *Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , de codimension 1, sur  $M$  et soit  $g : D^2 \rightarrow M$  une application  $C^r$  avec point de tangence non dégénérés avec  $\mathcal{F}$ , c'est à dire soit des centres soit des selles. Alors  $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$  est  $C^{r-1}$  orientable.*

*Démonstration.* Pour la proposition A.2.2, il suffit de vérifier que  $\mathcal{F}^*$  est  $C^{r-1}$  localement orientable.

Soient, donc,  $p \in D^2$  et  $(U, \phi)$  une carte distinguée pour  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $g(p)$ . Notons, comme on avait fait dans la section 4.1 du chapitre 4,  $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)$  la projection sur le dernière facteur et posons  $h := \hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \rightarrow (-1, 1)$ .

On a, alors, que les ensembles de la partition  $\mathcal{F}^* \cap U$  coïncident avec les courbes de niveau de  $h$  et que, si on note par  $(x, y)$  les fonctions coordonnées sur  $U \subset D^2 \subset \mathbb{R}^2$ , le champ  $Y(q) := (\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x})$ , pour chaque  $q \in U$ , est bien un champ de vecteurs tangent à  $\mathcal{F}^* \cap U$ .  
Donc,  $\mathcal{F}^*$  est  $C^{r-1}$  localement orientable.  $\square$

Remarquons que, en particulier, le corollaire énoncé tout à l'heure nous dit que chaque feuilletage singulier  $\mathcal{F}^*$  sur  $D^2$  de codimension 1 est donné par les courbes intégrales d'un certain champ de vecteurs  $Y$  sur  $D^2$ .

Maintenant, on veut étudier comment certaines propriétés de  $\mathcal{F}^*$  se traduisent en propriété du flot du champ  $Y$  ainsi obtenu ; on va voir, ici, les feuilletages singuliers de  $D^2$  sous un point de vue de la dynamique des flots qui les définissent.

Supposons, dorénavant, que  $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{F}^*$  est transverse à  $\partial D^2$  ;
2. les singularités de  $\mathcal{F}^*$  sont non dégénérées, donc des centres ou des selles ;
3.  $\mathcal{F}^*$  n'a pas de connexions entre selles distinctes.

Soit  $p \in D^2$  un point singulier de  $Y$  avec  $p \in W := g^{-1}(U)$ , où  $(U, \phi)$  est une carte distinguée de  $\mathcal{F}$  qui contient  $g(p)$  ; soit aussi  $\pi := \hat{\pi} \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors  $p$  est une singularité non dégénérée pour  $f := \pi \circ g : W \rightarrow \mathbb{R}$  et les orbites de  $Y$  sont contenus dans les courbes de niveau de  $f$ .

Pour le théorème A.1.1, il existe un difféomorphisme  $\alpha : U \rightarrow V$ , où  $V \subset W$  est un voisinage ouvert de  $p$  et  $\alpha(0) = p$ , tel que  $f \circ \alpha(x, y) = f(p) + q(x, y)$ , où on a  $q(x, y) = x^2 + y^2$  ou  $q(x, y) = -(x^2 + y^2)$  ou  $q(x, y) = x^2 - y^2$ .

Dans les premiers deux cas,  $p$  est un *centre pour*  $Y$ , c'est à dire que les trajectoires non dégénérées de  $Y$  dans  $W$  sont tous fermées et difféomorphes à  $S^1$ . Par contre, dans le troisième cas,  $p$  est une *selle pour*  $Y$ , c'est à dire que  $f^{-1}(f(p))$  est constitué par deux courbes lisses  $\delta_1, \delta_2$  qui s'intersectent transversalement en  $p$  de façon que  $\delta_1 \cup \delta_2 \setminus p$  contient 4 différentes trajectoires régulières de  $Y|_V$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et  $\alpha_4$ , telles que  $\alpha_1 \cup \alpha_3 \cup \{p\} = \delta_1$  et  $\alpha_2 \cup \alpha_4 \cup \{p\} = \delta_2$ .

Les  $\alpha_i$ , pour  $1 \leq i \leq 4$ , sont les séparatrices locales de la selle  $p$  de  $Y$ . Si on dénote par  $t \mapsto Y_t(q)$  la courbe intégrale de  $Y$  qui passe par  $q$  pour  $t = 0$ , on a que deux entre ces  $\alpha_i$ , disons  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$ , sont caractérisés par la propriété  $\lim_{t \rightarrow \infty} Y_t(q) = p$ , pour chaque  $q \in \alpha_1 \cup \alpha_3$ , et les autres deux, disons  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$ , par  $\lim_{t \rightarrow -\infty} Y_t(q) = p$ , pour chaque  $q \in \alpha_2 \cup \alpha_4$ . On appelle *stables* les trajectoires du premier type et *instables* celles du deuxième type.

De plus, par construction de  $Y$ , le fait que  $\mathcal{F}^*$  est transverse à  $\partial D^2$  équivaut au fait que  $Y$  soit transverse à  $\partial D^2 = S^1$ .

Si  $\gamma(t) := Y_t(q)$  est une trajectoire, pour  $q \in D^2$  quelconque, on pose

$$\omega(\gamma) := \{x \in D^2 \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n), \text{ où } t_n \rightarrow \infty \text{ pour } n \rightarrow \infty\}$$

et

$$\alpha(\gamma) := \{x \in D^2 \mid x = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n), \text{ où } t_n \rightarrow -\infty \text{ pour } n \rightarrow \infty\}.$$

Notons que, pour le théorème B.0.1 dans l'appendice B, les ensembles  $\omega(\gamma)$  et  $\alpha(\gamma)$  doivent coïncider avec :

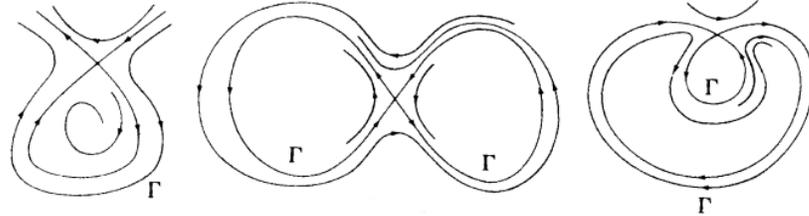
1.  $\emptyset$ , si  $\gamma$  coupe  $\partial D^2$  pour  $t \rightarrow +\infty, -\infty$ ;
2. une *singularité* pour  $Y$ , c'est à dire un point fixe pour  $Y$ ;
3. une *orbite fermée* de  $Y$ ;
4. un *graphe* de  $Y$ , c'est à dire un ensemble connexe  $\Lambda$  constitué par des selles et des séparatrices, de façon que si  $p \in \Lambda$  est un selle de  $Y$ ,  $\Lambda$  contient au moins une séparatrice stable et une instable pour  $p$ .

Notons que, comme  $Y$  est transverse à  $S^1$ , on peut supposer que  $Y|_{\partial D^2}$  soit entrant dans  $D^2$ , quitte à remplacer  $Y$  par  $-Y$ ; on a, alors, que  $\omega(\gamma) \neq \emptyset$ , pour chaque orbite  $\gamma$  de  $Y$ .

**Définition A.2.4.** On dit que le sous ensemble  $\Gamma \subset D^2$  est un *cycle limite* pour  $Y$  si  $\Gamma$  n'est pas une seule singularité et s'il existe une orbite  $\gamma$  de  $Y$ , avec  $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$ , telle que  $\Gamma = \omega(\gamma)$  ou  $\Gamma = \alpha(\gamma)$ .

De ce qu'on a dit ci-dessus, un cycle limite non vide  $\Gamma$  de  $Y$  est soit une orbite fermée soit un graphe de  $Y$ . De plus, c'est facile de vérifier que  $\Gamma$  est toujours connexe et que  $D^2 \setminus \Gamma$  a au moins deux composantes connexes, dont une contient entièrement  $\partial D^2$ , comme  $\Gamma \cap \partial D^2 = \emptyset$ , pour ce qu'on a dit tout à l'heure. Dans la figure A.2, on a représentés quelques  $\Gamma$  possibles dans le cas où ils sont des graphes de  $Y$ .

FIGURE A.2 – Cas de cycle limite qui est un graphe



Or, dans notre cas, effectivement, les cas représentés dans la figure A.2 sont les *seuls cas possibles* dans lesquels  $\Gamma$  est un graphe de  $Y$ , car on est dans l'hypothèse de  $\mathcal{F}^*$  sans connexions entre selles distinctes.

Soit, maintenant,  $\Sigma$  l'ensemble de tous les cycles limites. Étant donné un  $\Gamma \in \Sigma$ , on note  $R(\Gamma)$  la réunion des clôtures des composantes connexes de  $D^2 \setminus \Gamma$  qui ne contiennent pas  $\partial D^2$ . Sur  $\Sigma$ , on définit aussi un ordre partiel  $\leq$  en disant que  $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$  si  $R(\Gamma_1) \subseteq R(\Gamma_2)$ .

Notons, enfin, que, comme  $\Gamma$  est invariant par  $Y$ ,  $R(\Gamma)$  l'est aussi.

**Proposition A.2.5.** Soit  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de cycles limites et soit  $\Gamma_\infty$  le bord de l'ensemble  $\bigcap_{n \geq 1} R(\Gamma_n)$ . Alors  $\Gamma_\infty$  est soit une orbite fermée soit un graphe de  $Y$ .

*Démonstration.* Comme si la suite se stabilise la preuve devient triviale, on peut supposer qu'elle ne se stabilise pas; donc, quitte à extraire une sous-suite, on a que  $\Gamma_n \neq \Gamma_m$  pour chaque  $n \neq m$ . De plus, comme le nombre de selles de  $Y$  est fini,  $Y$  admet un nombre fini de graphes et, quitte à extraire une autre sous-suite, on peut supposer que chaque  $\Gamma_n$  soit une orbite fermée. On s'est, donc, ramené au cas où une suite strictement décroissante, au sens de  $\leq$ , d'orbites fermées s'accumule sur  $\Gamma_\infty$ .

En particulier, chaque  $R(\Gamma_n)$  est un ensemble, homéomorphe à un disque, invariant pour  $Y$  et on a que  $R(\Gamma_n) \subset R(\Gamma_{n+1})$ . Donc,  $\bigcap_{n \geq 1} R(\Gamma_n)$  et  $\Gamma_\infty$  sont non-vides et invariants pour  $Y$ . De plus,  $\Gamma_\infty$  contient au moins un point  $p$  tel que  $Y(p) \neq 0$ : en effet, on n'a pas de centres dans  $\Gamma_\infty$ , car les centres ne peuvent pas être points d'accumulation de cycles limites, dès que, au voisinage de chaque centre de  $Y$ , les orbites sont toutes fermées, c'est à dire périodiques, et coïncident, donc, avec leurs points d'accumulation. Par contre,  $\Gamma_\infty$  peut contenir une selle, mais, dans ce cas, il doit contenir aussi deux ses séparatrices.

Supposons, alors, que  $\Gamma_\infty$  ne soit pas une orbite fermée; on veut montrer qu'il est un graphe de  $Y$ .

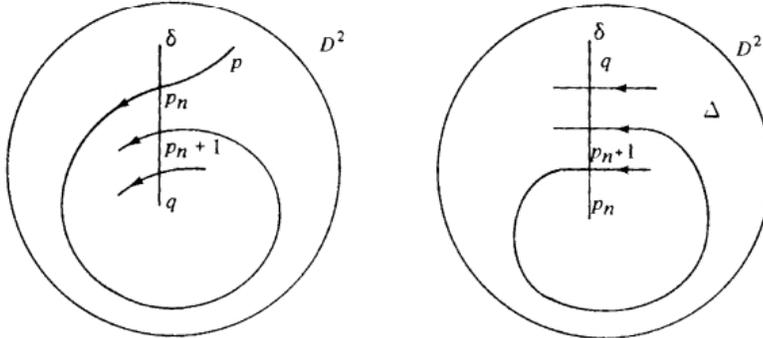
Prenons  $p \in \Gamma_\infty$  un point tel que  $Y(p) \neq 0$ , qu'il existe pour ce qu'on a dit tout à l'heure, et posons, pour simplicité de notations,  $\omega(p) := \omega(\gamma)$ , où  $\gamma$  est l'orbite de  $Y$  qui passe par  $p$  au temps  $t = 0$ .

On veut montrer que, alors,  $\omega(p)$  doit être une selle contenue dans  $\Gamma_\infty$ .

En effet,  $\omega(p)$  ne peut pas contenir un centre de  $Y$ , pour ce qu'on a dit ci-dessus. Mais si, par absurde,  $\omega(p)$  n'était pas une selle, forcément on aurait  $q \in \omega(p)$  tel que  $Y(q) \neq 0$ , comme  $\omega(p)$  est connexe: on veut déduire de cela une contradiction.

Notons que  $q \notin \mathcal{O}(p) := \{Y_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ , comme  $\Gamma_\infty$  n'est pas une orbite fermée de  $Y$ . Fixons, donc,  $\delta$  un segment transverse à  $Y$  passant par  $p$ . Alors,  $\mathcal{O}(p)$  rencontre  $\delta$  en une suite de points  $p_n := Y_{t_n}(p)$ , où  $t_n$  croît (strictement) vers  $+\infty$  pour  $n \rightarrow \infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = q$ : les deux dispositions possibles pour ces points  $p_n$  sont représentées en figure A.3. Soit, maintenant,  $\eta$  la courbe fermée

FIGURE A.3 – Seules façons possibles pour que la suite  $p_n$  converge vers  $q$



de  $D^2$  qui est réunion de l'arc contenu dans  $\delta$  et joignant  $p_n$  à  $p_{n+1}$ , qu'on note

$[p_n, p_{n+1}]$ , et de l'arc  $\mu := \{Y_t(p) \mid t_n \leq t \leq t_{n+1}\} \subset \mathcal{O}(p)$ ; soit aussi  $\Delta$  la composante connexe de  $D^2 \setminus \eta$  qui contient  $q$ .

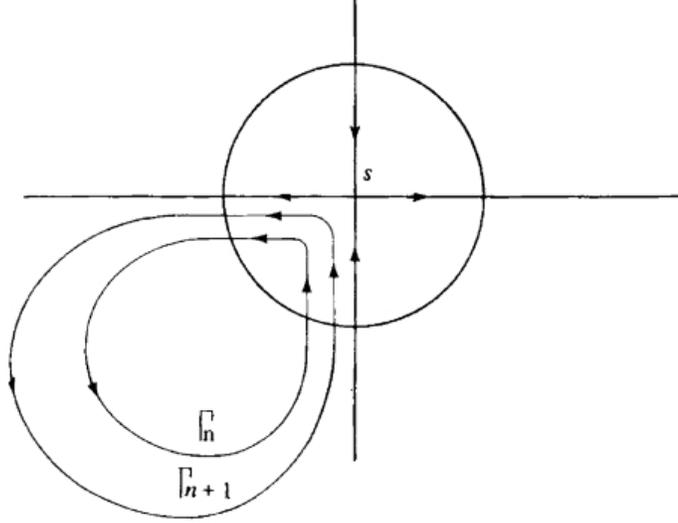
Or, une orbite qui coupe l'arc  $[p_n, p_{n+1}]$  ne peut pas être fermée, car elle doit rentrer dans  $\Delta$ , de laquelle elle ne pourra plus sortir; donc,  $p_n$  ne peut pas être un point d'accumulation d'orbites fermées de  $Y$ , mais c'est une contradiction avec le fait que  $p_n \in \Gamma_\infty$ .

On a, finalement, prouvé que  $\omega(p)$  est un point de selle dans  $\Gamma_\infty$ .

De même, on a que  $\alpha(p)$  est aussi un point de selle contenu dans  $\Gamma_\infty$ .

Enfin, comme une selle dans  $\Gamma_\infty$  est un point d'accumulation d'orbites fermées de  $Y$ ,  $\Gamma_\infty$  doit contenir au moins une séparatrice stable et une instable (figure A.4), c'est à dire que  $\Gamma_\infty$  doit être un graphe de  $Y$ .  $\square$

FIGURE A.4 – Si  $\Gamma_\infty$  contient une selle, il contient au moins deux séparatrices



### A.3 Construction de Hæfliger

Dans cette section, on notera avec  $\mathcal{F}$  un feuilletage de classe  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , et de codimension 1 sur une variété  $M$  de classe  $C^s$  et de dimension  $n \geq 3$ .

Étant donnée une application  $h : D^2 \rightarrow M$ , de classe  $C^\infty$ , où  $D^2$  est le disque unitaire de  $\mathbb{R}^2$ , on dit que  $p \in D^2$  est un *point de tangence* de  $h$  avec  $\mathcal{F}$  si  $d_p(h)(\mathbb{R}^2) \subset T_{h(p)}\mathcal{F}$ .

On a, alors, la proposition suivante :

**Proposition A.3.1.** *Soit  $A : D^2 \rightarrow M$  une application  $C^\infty$  telle que  $A|_{\partial D^2}$  soit transverse à  $\mathcal{F}$ . Alors, pour chaque  $\epsilon > 0$ , il existe  $g : D^2 \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1.  $\|g - A\|_{C^r} < \epsilon$ ;
2.  $g|_{\partial D^2}$  est transverse à  $\mathcal{F}$ ;
3. pour chaque point  $p$  de tangence de  $g$  avec  $\mathcal{F}$ , il existe une carte distinguée  $(U, \phi)$  au voisinage de  $g(p)$  telle que  $p$  soit une singularité non dégénérée pour  $\pi \circ g : g^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ , où on a noté  $\pi := \hat{\pi} \circ \phi$ ; en particulier,  $g$  a seulement un nombre fini de points de tangence avec  $\mathcal{F}$ ;
4. si  $T = \{p_1, \dots, p_l\}$  est l'ensemble des points de tangence de  $g$  avec  $\mathcal{F}$ ,  $g(p_i)$  et  $g(p_j)$  sont contenus dans feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$ , pour  $i \neq j$ ; en particulier,  $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$  n'a pas de connexions entre selles distinctes.

*Démonstration.* Soient  $(Q_1, \phi_1), \dots, (Q_k, \phi_k)$  des cartes distinguées pour  $\mathcal{F}$  dont la réunion recouvre  $A(D^2)$  et puis  $\pi_i := \hat{\pi} \circ \phi_i : Q_i \rightarrow \mathbb{R}$  la composition des cartes distinguées avec la projection le long de la composante transverse, pour chaque  $i = 1, \dots, k$ ; avec ces notations, on peut écrire  $\phi_i = (\phi_1^i, \dots, \phi_{n-1}^i, \pi_i)$  et que  $\pi_i^{-1}(t)$  est une plaque de  $\mathcal{F}$  dans  $Q_i$ .

On écrit aussi  $\phi_i \circ A = (A_1^i, \dots, A_{n-1}^i, \pi_i \circ A)$  et on remarque que  $A$  est transverse à  $\mathcal{F}$  en  $p \in A^{-1}(Q_i)$  si et seulement si  $d_p(\pi_i \circ A) \neq 0$ . On pose, enfin,  $W_i := A^{-1}(Q_i)$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Clairement on a  $\cup_{i=1}^k W_i = D^2$  et, comme  $D^2$  est compact, on peut trouver des recouvrements ouverts plus fins  $(V_i)_{i=1}^k, (U_i)_{i=1}^k$  tels que  $\overline{U_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset W_i$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Soit  $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \inf\{d(A(x), y) \mid x \in \overline{V_i} \text{ et } y \in \partial Q_i\}$ , où  $d$  est une métrique riemannienne fixée sur  $M$ . Si  $f : D^2 \rightarrow M$  est telle que  $\|f - A\|_{C^0} < \delta$ , alors  $f(\overline{V_i}) \subset Q_i$ . Donc, les composées  $\pi_i \circ f : \overline{V_i} \rightarrow \mathbb{R}$  sont bien définies; toutes les applications qu'on considérera dorénavant satisferont cette propriété.

Notons qu'un point  $p \in \overline{V_i}$  est un point de tangence de  $A$  avec  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $d_p(\pi_i \circ A) = 0$ , comme cela équivaut au fait que  $d_p(A)(T_p D^2) \subset T_{A_p} \mathcal{F}_p$ .

On va construire  $g$  satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 en modifiant récursivement la restriction  $A|_{\cup_{i=1}^j W_i}$  pour tout  $j = 1, \dots, k$ .

Soit  $j = 1$ . Pour le lemme A.1.2 il existe  $f_1 : W_1 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_1|_{U_1}$  est une fonction de Morse,  $f_1|_{W_1 \setminus V_1} = (\pi_1 \circ A)|_{W_1 \setminus V_1}$  et  $\|f_1 - \pi_1 \circ A\|_{C^r} < \delta_1$ .

Maintenant on définit  $g_1 : D^2 \rightarrow M$  en posant  $g_1|_{D^2 \setminus V_1} = A|_{D^2 \setminus V_1}$  et  $g_1|_{W_1} = \phi_1^{-1} \circ (A_1^1, \dots, A_{n-1}^1, f_1)$ . Comme  $\pi_1 \circ A = f_1$  sur  $W_1 \setminus V_1$ ,  $g_1$  est bien définie et  $\pi_1 \circ g_1|_{U_1} = f_1|_{U_1}$  et, donc,  $g_1$  est de Morse sur  $U_1$ . Or, si on choisit  $\delta_1$  suffisamment petit, on a aussi que  $\|g_1 - A\|_{C^r} < \frac{\epsilon}{k}$ .

Supposons, par récurrence, d'avoir défini  $g_j : D^2 \rightarrow M$ , pour un indice  $1 \leq j \leq k-1$ , telle que  $\|g_j - A\|_{C^r} < \frac{j\epsilon}{k}$ ,  $g_j|_{D^2 \setminus \cup_{i=1}^j V_i} = A|_{D^2 \setminus \cup_{i=1}^j V_i}$  et  $\pi_i \circ g_j|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  est de Morse, pour chaque  $i = 1, \dots, j$ .

Pour le lemme A.1.2, il existe  $f_{j+1} : W_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f_{j+1}|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}} = (\pi_{j+1} \circ g_j)|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}}$ ,  $f_{j+1}|_{U_{j+1}}$  est de Morse et  $\|f_{j+1} - \pi_{j+1} \circ g_j\|_{C^r} < \delta_{j+1}$ .

On pose alors  $g_{j+1} : D^2 \rightarrow M$  avec  $g_{j+1}|_{D^2 \setminus V_{j+1}} = g_j|_{D^2 \setminus V_{j+1}}$  et  $g_{j+1}|_{W_{j+1}} = \phi_{j+1}^{-1} \circ (g_1^j, \dots, g_{n-1}^j, f_{j+1})$ , où on a écrit  $\phi_{j+1} \circ g_j = (g_1^j, \dots, g_{n-1}^j, \pi_{j+1} \circ g_j)$ . C'est clair que  $g_{j+1}$  est bien définie car  $f_{j+1}|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}} = \pi_{j+1} \circ g_j|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}}$ . De plus, si l'on choisit  $\delta_{j+1}$  suffisamment petit on aura que  $\|g_{j+1} - g_j\|_{C^r} < \frac{\epsilon}{k}$  et que  $\pi_i \circ g_{j+1}|_{U_i}$  est de Morse sur  $U_i$  pour chaque  $i = 1, \dots, j+1$ , car l'ensemble

des fonctions de Morse est un ouvert selon la topologie  $C^r$ .

Récursivement, on obtient une fonction  $g_k : D^2 \rightarrow M$  telle que  $\pi_i \circ g_k|_{U_i}$  est de Morse, pour chaque  $i = 1, \dots, k$  et  $\|g_k - A\|_{C^r} < \epsilon$ . Donc,  $g_k$  satisfait les propriétés 1 et 3.

De plus, si  $\epsilon$  est suffisamment petit,  $g_k|_{\partial D^2}$  est encore transverse à  $\mathcal{F}$ .

Du fait que, si  $\pi$  est comme dans 2 de l'énoncé, les singularités de  $\pi \circ g_k$  sont non dégénérées, le théorème A.1.1 entraîne qu'ils sont isolées, donc, par compacité de  $D^2$ , finies. On a, donc, que les points de tangence de  $g_k$  avec  $\mathcal{F}$  sont finis, comme ils coïncident avec les singularités dégénérées de  $\pi \circ g_k$ .

Soit  $T := \{p_1, \dots, p_l\}$  l'ensemble des points de tangence de  $g_k$  avec  $\mathcal{F}$ . On modifiera  $g_k$  pour obtenir une  $g$ , avec les mêmes points de tangence, satisfaisant la propriété 4.

Supposons, par exemple, que  $g(p_1), g(p_2)$  soient contenus dans la même feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ , avec  $p_1 \in U_i$ . Posons  $f_i := \pi_i \circ g_k|_{V_i} : V_i \rightarrow \mathbb{R}$  et  $t_1 = f_i(p_1)$ . Fixons des voisinages  $U \subset V$  de  $p_1$  avec  $\bar{U} \subset V \subset \bar{V} \subset V_i$  et  $p_1$  soit la seule singularité de  $f_i$  dans  $V$ .

Soit  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , non négative et telle que  $\alpha|_U = 1$  et  $\alpha|_{V_i \setminus V} = 0$ .

Posons  $\tilde{f}_i := f_i + \delta\alpha$ , avec  $\delta > 0$ . Comme  $d\tilde{f}_i = df_i + \delta d\alpha$ , si  $\delta$  est suffisamment petit,  $p_1$  est l'unique singularité de  $\tilde{f}_i$  dans  $V$  et elle est encore non dégénérée. De plus, les singularités de  $\tilde{f}_i$  et de  $f_i$ , dans  $V_i$ , sont les mêmes, car  $(\tilde{f}_i - f_i)|_{V_i \setminus V} = 0$ . Définissons  $\tilde{g}_k : D^2 \rightarrow M$  en posant  $\tilde{g}_k|_{D^2 \setminus V} = g_k|_{D^2 \setminus V}$  et  $\tilde{g}_k|_{V_i} = \phi_i^{-1} \circ (g_1^k, \dots, g_{n-1}^k, \tilde{f}_i)$ . On peut facilement vérifier que  $\tilde{g}_k$  satisfait les propriétés 1, 2, 3 et que l'ensemble des points de tangence de  $\tilde{g}_k$  avec  $\mathcal{F}$  est  $T$ .

Notons que  $F \cap Q_i$  contient au plus une infinité dénombrable de feuilles locales de  $F$  et, donc, il existe  $\delta \geq 0$ , arbitrairement petit, tel que  $\pi_i^{-1}(t_1 + \delta) = \pi_i^{-1}(\tilde{f}_i(p_1)) \not\subset F$ , c'est à dire  $\tilde{g}_k(p_1)$  et  $\tilde{g}_k(p_2)$  sont contenus dans feuilles distinctes de  $\mathcal{F}$ .

En itérant le procédé un nombre fini de fois, on peut obtenir une  $g : D^2 \rightarrow M$  satisfaisant les propriétés 1, 2, 3 et 4.  $\square$

On énonce, maintenant, un corollaire presque immédiat de la proposition ci-dessus :

**Corollaire A.3.2** (Construction d'Hæfliger). *Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  une courbe  $C^\infty$  transverse à  $\mathcal{F}$  et homotope à une constante. Alors il existe une application  $g : D^2 \rightarrow M$  de classe  $C^\infty$  telle que  $\mathcal{F}^* := g^*(\mathcal{F})$  est un feuilletage de  $D^2$  avec singularités, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1.  $g|_{\partial D^2}$  est homotope à  $\gamma$  et  $\mathcal{F}^*$  transverse à  $\partial D^2$  ;
2. les singularités de  $\mathcal{F}^*$  sont selles ou centres ;
3.  $\mathcal{F}^*$  n'a pas de connexions entre selles distinctes.

*Démonstration.* Comme  $\gamma$  est homotope à une constante dans  $M$ , on peut obtenir, par approximation de l'homotopie, une application  $C^\infty$   $A : D^2 \rightarrow M$  telle que  $A|_{\partial D^2} = \gamma$ . Il suffit, maintenant, de choisir  $g$  comme dans A.3.1, avec  $\epsilon$  suffisamment petit.  $\square$

## A.4 Construction de la région $R$ d'holonomie triviale

Avec tous ce qu'on à fait dans l'appendice A jusqu'à ici, on peut, finalement, construire la région  $R$  utilisée dans la preuve de la proposition 6.2.4 du chapitre 6.

Considérons, maintenant, une variété  $M$  de classe  $C^s$ ,  $s \geq 2$ , et dimension  $n \geq 3$  et supposons qu'elle soit feuilletée par  $\mathcal{F}$  de classe  $C^2$  et de codimension 1 tel qu'il existe une courbe lisse fermée  $\gamma : S^1 \rightarrow M$  transverse à  $\mathcal{F}$ .

Pour le corollaire A.3.2 il existe une application  $C^\infty$   $g : D^2 \rightarrow M$  telle que  $\mathcal{F}^* := g^*(\mathcal{F})$  soit un feuilletage singulier sur  $D^2$ .

De plus, le corollaire A.2.3 entraîne qu'il existe un champ de vecteurs  $Y$  de classe  $C^1$ , tel que :

1.  $Y$  est tangent à  $\mathcal{F}^*$  ;
2.  $Y$  est transverse à  $\partial D^2$  et y entrant dans  $D^2$  ;
3.  $Y$  a singularités coïncidents avec celles de  $\mathcal{F}^*$  et elles sont toutes non dégénérées ; en particulier, elles sont en nombre fini et soit de type centre soit de type selle ;
4. il n'existe pas de connexions entre deux singularités de type selle distinctes.

Soit  $\bar{\Sigma}$  l'ensemble constitué par les cycles limites de  $Y$ , et par les orbites fermées et les graphes de  $Y$  qui sont obtenus comme dans la proposition A.2.5, c'est à dire ces qui sont le bord de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} R(\Gamma_n)$  où  $\Gamma_n$  sont des cycles limites avec  $R(\Gamma_{n+1}) \subseteq R(\Gamma_n)$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

Notons que  $\bar{\Sigma} \neq \emptyset$ , comme si  $p \in D^2$  quelconque,  $\omega(p)$  est un cycle limite.

Maintenant, comme on l'avait déjà fait pour  $\Sigma$  dans la section A.2.2, on définit sur  $\bar{\Sigma}$  une relation d'ordre partiel comme suit : si  $\Gamma \in \bar{\Sigma}$ , on note, par  $R(\Gamma)$  la réunion des clôtures des composantes connexes de  $D^2 \setminus \Gamma$  qui ne contiennent pas  $\partial D^2$  et on pose  $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$  si  $R(\Gamma_2) \subseteq R(\Gamma_1)$ .

Pour la proposition A.2.5, on a que si  $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante dans  $\bar{\Sigma}$ , au sens de  $\leq$ , c'est à dire telle que  $R(\Gamma_{n+1}) \subseteq R(\Gamma_n)$ , alors il existe  $\Gamma_\infty$  dans  $\bar{\Sigma}$  tel que  $\Gamma_\infty \leq \Gamma_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  : cela veut dire exactement que  $(\bar{\Sigma}, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné inductif.

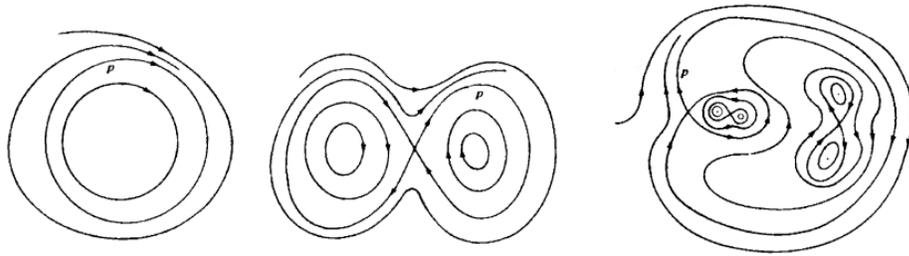
Donc, pour le lemme de Zorn, il existe dans  $\bar{\Sigma}$  un élément minimal  $\Gamma$ . Donc, par construction, ce  $\Gamma$  est le bord d'une région ouverte  $R(\Gamma)$  qui ne contient pas de cycles limites, c'est à dire que pour chaque  $p \in R(\Gamma)$  on a que  $\mathcal{O}(p)$  est soit une singularité, soit une orbite périodique soit contenu dans un graphe.

C'est, alors, facile de vérifier que  $R(\Gamma)$  vérifie les propriétés suivantes :

1. si  $p \in R(\Gamma)$  est régulier pour  $Y$ ,  $\mathcal{O}(p)$  a holonomie triviale, vue comme feuille de  $\mathcal{F}^*$ , qui est bien un feuilletage hors de  $\partial D^2$  et des point singuliers de  $Y$  ;
2. si  $p \in \partial R(\Gamma) = \Gamma$ ,  $\mathcal{O}(p)$  n'a pas "holonomie" triviale, c'est à dire qu'elle est un cycle limite.

Donc,  $R(\Gamma)$  est bien la région cherchée. La figure A.5 résume quelque typologies de  $R(\Gamma)$  possibles.

FIGURE A.5 – Quelques exemples de régions  $R(\Gamma)$  possibles



## Annexe B

# Théorème de Poincaré-Bendixson

On va, dans cette brève appendice, rappeler un résultat très connu sur la dynamique des flots des champs de vecteurs sur le plan.

Soit, pour fixer des notations,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert et soit  $Y$  un champ de vecteurs  $C^1$  défini sur  $\Omega$ .

On considère le problème de Cauchy associé

$$y'(t) = Y(y(t)), x(0) = x_0.$$

Comme le champ  $Y$  est  $C^1$ , il existe pour chaque  $x_0 \in \Omega$  un  $\epsilon > 0$  et une solution  $x = x(t)$ , définie sur  $(-\epsilon, \epsilon)$ , pour le problème de Cauchy considéré.

On appelle alors, comme on avait déjà fait dans l'appendice A, *ensemble  $\omega$ -limite de  $x(t)$* , et on le note  $\omega(x)$ , l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite  $\chi := \{x(t) \mid t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ , c'est à dire l'ensemble  $\bar{\chi} \setminus \chi$ .

On appelle, enfin, *graphe de  $Y$*  une réunion quelconque de points singuliers et de séparatrices pour  $Y$ .

Avec toutes ces notations, on peut finalement énoncer le résultat qui nous intéresse :

**Théorème B.0.1** (Poincaré-Bendixson). *Étant donné un problème de Cauchy défini par un champ de vecteurs  $C^1$  sur un ouvert du plan  $\mathbb{R}^2$ , chaque orbite admet comme  $\omega$ -limite soit un point fixe de  $Y$ , soit une orbite périodique, soit un graphe de  $Y$ .*

*Démonstration.* Pour la preuve de ce théorème, on renvoie à des références classiques, par exemple la preuve due à Bendixson qui apparait dans [1].  $\square$

# Bibliographie

- [1] Ivar Bendixson. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24(1) :1–88, 1901.
- [2] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Birkhauser, 1985.
- [3] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliations I*. Graduate Studies in Mathematics, vol 23. American Mathematical Society, 2000.
- [4] S.J. Paul A. Schweitzer. Codimension one foliations without compact leaves. *Comment. Math. Helvetici*, 70 :171–209, 1995.
- [5] Frédéric Paulin. Géométrie différentielle élémentaire : polycopie du cours à l'ens, 2007.
- [6] Itiro Tamura. *Topology of foliations*. American Mathematical Society, 1991.