Le problème des moments

Simon Riche
Benjamin Schraen
Exposé proposé par Philippe Biane

Table des matières

Dans cet exposé, nous présentons la résolution du "problème des moments" : étant donné une suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ de réels, existe-t-il une mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ muni de la tribu borélienne (respectivement $[0,+\infty[$, respectivement $[a,b]$) telle que les fonctions $u \to u^n (n \in \mathbb{N})$ soient μ-intégrables et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \int_{\mathbb{R}} u^n d\mu(u) = \gamma_n$$

(respectivement $\int_{[0,+\infty[} u^n d\mu(u) = \gamma_n$, respectivement $\int_{[a,b]} u^n d\mu(u) = \gamma_n$), c'est-à-dire existe-t-il une mesure positive ayant des moments de tout ordre, ces moments étant les γ_n ?

Ces trois problèmes sont appelés respectivement problème de Hamburger, de Stieltjes et de Hausdorff. Le problème sera dit déterminé s'il possède une unique solution, indéterminé s'il en possède plusieurs.

Si on exclut le cas trivial où $\gamma_0 = 0$ (pour lequel il y a une solution si et seulement tous les termes de la suite sont nuls), on peut toujours supposer que $\gamma_0 = 1$ (ce qui sera le cas dans toute la suite). Le problème revient alors à chercher une mesure de probabilité dont les moments d'ordre supérieur ou égal à 1 sont les γ_n.

Il existe principalement deux approches pour ce problème : l'approche "classique", que nous utiliserons tout d'abord pour donner un critère d'existence, et une approche passant par la théorie des opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert, que nous donnerons ensuite. Nous conclurons enfin sur quelques exemples.

1 Un critère d'existence d'une solution

Dans cette partie, nous allons trouver une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une mesure solution du problème de Hamburger. Nous appliquerons ensuite cette théorie pour prouver un théorème concernant la convergence étroite. Puis nous donnerons une première condition "classique" d'unicité.

Pour développer cette théorie, il faut cependant écarter un cas très simple : celui où la mesure est de la forme

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta_{a_k}$$

(où δ_a désigne la mesure de Dirac en a). Les moments correspondants sont les

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k (a_k)^j$$

On verra plus loin un critère simple permettant d'affirmer que la mesure précédente est l'unique mesure dont les moments sont donnés par cette formule. Dans toute la suite de ce rapport, on supposera toujours implicitement que les suites et les mesures considérées ne sont pas de cette forme.

Définition 1 *Une suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ de réels est dite définie positive si chaque forme hermitienne*

$$x \longmapsto \sum_{i,j=0}^{m} \gamma_{i+j} x_i \overline{x_j} \ (m \in \mathbb{N})$$

est définie positive. Par une propriété classique concernant les matrices définies positives, ceci équivaut à dire que $\forall m \in \mathbb{N}, \ det(\gamma_{i+j})_{i,j=0\ldots m} > 0$.

La définie positivité de la suite des moments considérée $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ est nécessaire pour qu'il existe une mesure μ solution du problème de Hamburger associé : en effet, si $\gamma_n = \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x)$, alors si $m \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0\dots m} \in \mathbb{C}^{m+1}$, on a :

$$\sum_{i,j=0}^{m} \gamma_{i+j} x_i \overline{x_j} = \int |\sum_{i=0}^{m} x_i t^i|^2 d\mu(t) \geq 0$$

Cette quantité est même strictement positive, car on a écarté le cas où μ est une somme finie de multiples de masses de Dirac (si P est un polynôme, $\int |P|^2 d\mu = 0$ implique que μ est supportée par les zéros de P).

L'objet de cette partie est de prouver que cette condition est suffisante, et donc d'obtenir le :

Théorème 1 *Soit $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. Alors il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \geq 0, \gamma_n = \int_{\mathbb{R}} t^n d\mu(t)$ si et seulement si la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ est définie positive.*

Dans les trois prochaines sections, $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ désignera une suite définie positive de réels.

1.1 Quelques résultats de convergence faible de mesures

Nous énonçons tout d'abord quelques résultats utiles concernant la convergence des mesures signées.

Nous utiliserons deux théorèmes classiques :

Théorème 2 (Riesz) *Le dual topologique de l'espace $C_0(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tendant vers 0 à l'infini (muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$) est l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ des mesures signées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme : $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$.*

Théorème 3 *Soit E un espace de Banach séparable. Alors la boule unité du dual E^* de E est séquentiellement compacte pour la topologie faible-*. Autrement dit, si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite bornée d'éléments de E^*, alors il existe une extraction ϕ et f dans E^* telles que $f_{\phi(n)} \rightharpoonup_* f$.*

Nous ne nous intéressons ici qu'aux mesures de probabilité, mais il est plus agréable de se placer dans l'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, pour pouvoir utiliser des résultats sur les espaces de Banach. Remarquons tout d'abord que l'espace $C_0(\mathbb{R})$ est séparable : en effet, on vérifie aisément grâce au théorème de Weierstrass que l'espace des fonctions valant un polynôme à coefficients rationnels sur un compact $[-n, n]$, nulles sur $]-\infty, -n-1] \cup [n+1, +\infty[$ et reliées entre ces intervalles par des fonctions affines (n variant dans $\mathbb{N}$) est dénombrable et dense dans $C_0(\mathbb{R})$. Ce qui assure la compacité séquentielle faible-* de la boule unité de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Ainsi, si $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est une suite de mesures positives dont la masse totale est bornée (par exemple s'il s'agit de mesures de probabilité), on peut toujours en extraire une suite convergeant faiblement, c'est-à-dire qu'il existe une extraction ϕ et une mesure signée μ sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\phi(n)} \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$. De plus, on a l'inégalité : $\|\mu\| \leq \limsup \|\mu_n\|$ (par une propriété classique de la convergence faible).

Cette mesure est positive : en effet, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, la fonction caractéristique 1_B de B est une fonction de $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), |\mu|)$, qui peut donc être approchée en norme L^1 par des fonctions continues à support compact f_k. On vérifie alors que $\int_{\mathbb{R}} f_k d\mu \to \int_{\mathbb{R}} 1_B d\mu = \mu(B)$ (en utilisant l'inégalité $|\int_{\mathbb{R}} g d\mu| \leq \int_{\mathbb{R}} |g| d|\mu|$). Comme les intégrales des f_k par rapport à μ sont positives (en tant que limites des intégrales par rapport aux $\mu_{\phi(n)}$, qui sont positives), $\mu(B)$ également.

On a finalement prouvé la :

Proposition 1 *Soit* $(\mu_n)_{n\geq 0}$ *une suite de mesures positives dont la masse totale est bornée. Alors il existe une extraction* ϕ *et une mesure positive* μ *sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall f \in C_0(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\phi(n)} \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

1.2 Résolution du problème tronqué

Pour résoudre le problème des moments, on commence par résoudre le problème "tronqué", c'est-à-dire qu'on cherche une mesure μ_n dont les $2n-1$ premiers moments sont les $\gamma_k,\ k \leq 2n-1$.

On introduit la forme linéaire $\mathcal{S}$ définie sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes par :

$$\mathcal{S}(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \gamma_i$$

(On précisera s'il est besoin en indice par rapport à quelle variable on l'applique). Si on prouve que les γ_n sont les moments d'une mesure μ, cette forme linéaire correspondra à l'intégration par rapport à μ. La forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{C}[X]$ définie par $(P,Q) \to \mathcal{S}(P\overline{Q})$ est un produit hermitien (car la suite considérée est définie positive).

Il existe alors une unique suite $(P_n)_{n\geq 0}$ de polynômes satisfaisant les deux conditions :

(1) P_n est un polynôme de degré n, à coefficients réels, dont le coefficient de x^n est strictement positif.

(2) Si $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\mathcal{S}(P_n\overline{P_m}) = \delta_{n,m}$.

Cette suite peut être obtenue en appliquant la procédé d'orthonormalisation à la base $(X^n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$. On peut également en donner une formule explicite : si on note

$$D_n = \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{2n} \end{vmatrix}$$

(et $D_{-1} = 1$) on a :

$$P_n(X) = \frac{1}{(D_{n-1}D_n)^{1/2}} \begin{vmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^n \end{vmatrix}$$

(il suffit de vérifier que cette suite vérifie la condition (2), ce qui vient en remarquant que $\mathcal{S}(P_n X^m) = 0$ *si* $m < n$, et $\mathcal{S}(P_n X^n) = (\frac{D_{n-1}}{D_n})^{1/2}$)

Proposition 2 *Les polynômes* P_n *vérifient la relation :*

$$XP_n(X) = b_{n-1}P_{n-1}(X) + a_n P_n(X) + b_n P_{n+1}(X) \ \ (n \geq 0)$$

où on a posé : $a_n = \mathcal{S}(X(P_n(X))^2)$ *et* $b_n = \frac{(D_{n-1}D_{n+1})^{1/2}}{D_n},\ b_{-1} = 1$.

Preuve : Le polynôme $XP_n(X)$, qui est de degré $n+1$, s'écrit comme une combinaison linéaire des polynômes P_k pour $k \leq n+1$. Le coefficient de P_k dans cette décomposition est $\mathcal{S}(XP_n(X)P_k(X))$. En considérant les coefficients dominants, on obtient que $\mathcal{S}(XP_n(X)P_{n+1}(X)) = b_n$. Enfin, en remarquant que si Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$, $\mathcal{S}(XP_n(X)Q(X)) = 0$ (car $XQ(X)$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$), on obtient la relation annoncée.

Les polynômes P_n sont donc les solutions de l'équation linéaire : $b_{n-1}y_{n-1} + a_n y_n + b_n y_{n+1} = Xy_n$ (pour $n \geq 1$), avec les conditions initiales $P_{-1}(X) = 0$ et $P_0(X) = 1$. On introduit maintenant une deuxième solution de cette équation linéaire, Q_n, avec les conditions initiales $Q_{-1}(X) = -1$ et $Q_0(X) = 0$. On vérifie aisément, en utilisant l'équation vérifiée par les deux suites, que $Q_k(X) = \mathcal{S}_Y(\frac{P_k(Y)-P_k(X)}{Y-X})$ pour $k \geq 0$.

Pour résoudre le problème tronqué, l'idée est d'utiliser le fait qu'on peut exprimer un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ en fonction de ses valeurs sur les racines de P_n et du polynôme $P_n(X)$. On peut donc exprimer la valeur de $\mathcal{S}$ sur ce polynôme comme son intégrale par rapport à une somme de mesures de Dirac (en utilisant la division euclidienne par rapport à P_n, on peut même le faire pour un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$).

Notons $(\lambda_k^n)_{k=1\dots n}$ les n zéros du polynôme P_n (qui sont simples, car il s'agit de la base othonormalisée de la base canonique pour un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$), avec

$$\lambda_1^n < \lambda_2^n < \cdots < \lambda_n^n.$$

Alors, si $R_{2n-1}(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$, on a :

$$R_{2n-1}(X) = P_n(X)M_{n-1}(X) + N_{n-1}(X),$$

où M_{n-1} et N_{n-1} sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors :

$$N_{n-1}(X) = P_n(X) \sum_{k=1}^{n} \frac{N_{n-1}(\lambda_k^n)}{P_n'(\lambda_k^n)(X-\lambda_k^n)},$$

(ces polynômes coïncident en les λ_k^n), c'est-à-dire

$$N_{n-1}(X) = P_n(X) \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2n-1}(\lambda_k^n)}{P_n'(\lambda_k^n)(X-\lambda_k^n)}.$$

Par ailleurs, on a aussi : $\mathcal{S}(R_{2n-1}) = \mathcal{S}(N_{n-1})$. Donc

$$\mathcal{S}(R_{2n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{2n-1}(\lambda_k^n)}{P_n'(\lambda_k^n)} \mathcal{S}\left(\frac{P_n(X)}{X-\lambda_k^n}\right)$$

(par linéarité de $\mathcal{S}$). Et

$$\mathcal{S}\left(\frac{P_n(X)}{X-\lambda_k^n}\right) = \mathcal{S}\left(\frac{P_n(X)-P_n(\lambda_k^n)}{X-\lambda_k^n}\right) = Q_n(\lambda_k^n)$$

Finalement, on a obtenu que si $R(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$,

$$\mathcal{S}(R(X)) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k^n R(\lambda_k^n)$$

où
$$\tau_k^n = \frac{Q_n(\lambda_k^n)}{P_n'(\lambda_k^n)}.$$
En particulier, pour $R(X) = X^k$,
$$\gamma_k = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^n (\lambda_i^n)^k \ (k = 0 \ldots 2n-1)$$

Pour monter que la mesure obtenue est positive, il faut vérifier que les τ_k^n sont strictement positifs. On utilise pour cela deux formules qui se prouvent aisément par récurrence :
$$\forall m \geq 1,\ P_{m-1}(X)Q_m(X) - P_m(X)Q_{m-1}(X) = \frac{1}{b_{m-1}}$$
$$\forall m \geq 1,\ (Y-X)\sum_{i=0}^{m-1} P_i(X)P_i(Y) = b_{m-1}(P_{m-1}(X)P_m(Y) - P_m(X)P_{m-1}(Y)$$
En appliquant ces formules en les λ_k^n, on obtient :
$$\tau_k^n = \frac{P_{n-1}(\lambda_k^n)Q_n(\lambda_k^n)}{P_{n-1}(\lambda_k^n)P_n'(\lambda_k^n)} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1} P_i(\lambda_k^n)^2} > 0$$

Notons
$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i^n \delta_{\lambda_i^n}.$$
Alors
$$\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_n(t) \ (k = 0 \ldots 2n-1).$$

μ_n est donc une solution du problème des moments “tronqué”.

1.3 Preuve de l'existence

Pour en déduire une solution du problème des moments total, nous allons passer à la limite quand $n \to +\infty$. Comme vu plus haut, il existe une extraction ϕ et une mesure positive μ telles que, pour toute fonction f continue tendant vers 0 à l'infini, on ait : $\int_{\mathbb{R}} f d\mu_{\phi(n)} \to \int_{\mathbb{R}} f d\mu$. Remarquons tout d'abord que la mesure μ possède des moments de tout ordre (il suffit de montrer que les moments d'ordre pair sont finis) : si k est pair, on considère la fonction h_k^A qui coïncide avec x^k sur $[-A, A]$, qui est nulle sur $]-\infty, -A-1] \cup [A+1, +\infty[$ et qui est reliée entre ces intervalles par une fonction affine. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} h_k^A d\mu_{\phi(n)} \leq \gamma_k$$
Donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,
$$\int_{\mathbb{R}} h_k^A d\mu \leq \gamma_k$$
Puis en faisant tendre A vers $+\infty$ et par théorème de convergence monotone,
$$\int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t) \leq \gamma_k$$

On veut prouver que ces moments sont les γ_k (ce qui achèvera la preuve), c'est-à-dire que la propriété de convergence des intégrales est vraie également pour les fonctions $x \longmapsto x^k$. Montrons-le tout d'abord pour les moments d'ordre pair : si $n \geq k+1$, et $A > 0$ on a

$$\int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} t^{2k} d\mu_{\phi(n)}(t) = \int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} \frac{t^{2k+2}}{t^2} d\mu_{\phi(n)}(t).$$

Donc

$$\int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} t^{2k} d\mu_{\phi(n)}(t) \leq \frac{1}{A^2} \int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} t^{2k+2} d\mu_{\phi(n)}(t).$$

$$\int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} t^{2k} d\mu_{\phi(n)}(t) \leq \frac{\gamma_{2k+2}}{A^2}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $A > 0$ tel que $\int_{]-\infty,-A[\cup]A,+\infty[} t^{2k} d\mu(t) < \epsilon$ et $\frac{\gamma_{2k+2}}{A^2} < \epsilon$. Soit $\psi = h_k^A$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ t^{2k} 1_{[-A,A]}(t) \leq \psi(t) \leq t^{2k}$. Donc :

$$|\int_{\mathbb{R}} \psi(t) d\mu(t) - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} d\mu(t)| < \epsilon.$$

De même, si $n \geq k+1$,

$$|\int_{\mathbb{R}} \psi(t) d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} d\mu_n(t)| < \epsilon.$$

D'autre part, il existe $N \geq k+1$ tel que

$$\forall n \geq N,\ |\int_{\mathbb{R}} \psi d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} \psi d\mu| < \epsilon.$$

Alors, si $n \geq N$,

$$|\int_{\mathbb{R}} t^{2k} d\mu_n(t) - \int_{\mathbb{R}} t^{2k} d\mu(t)| < 3\epsilon.$$

Ce qui prouve que

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2k} d\mu(t) = \gamma_{2k}.$$

En ce qui concerne les moments d'ordre impair de μ, on peut prouver le résultat de la même façon en décomposant : $\int_{\mathbb{R}} t^{2k+1} d\mu(t) = \int_{[0,+\infty[} t^{2k+1} d\mu(t) + \int_{]-\infty,0]} t^{2k+1} d\mu(t)$ (pour des raisons de signe).

Finalement, on a bien construit une mesure μ sur $\mathbb{R}$ dont les moments sont les γ_k, c'est-à-dire une solution du problème de Hamburger associé à la suite $(\gamma_n)_{n\geq 0}$.

1.4 Une application à la convergence étroite

Dans cette partie, nous nous proposons de prouver le théorème :

Théorème 4 *Soit μ une mesure déterminée par ses moments. Soit $(\mu_n)_{n\geq 0}$ une suite de mesures de probabilité ayant des moments de tout ordre, et telle que*

$$\forall k \geq 1,\ \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_n(t) \to_n \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t).$$

Alors

$$\mu_n \xrightarrow{(e)} \mu.$$

Pour cela, nous devons tout d'abord étudier un critère concernant la convergence étroite de mesures de probabilité. Revenons à la proposition 1. On a vu que si $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est une suite de mesures de probabilité, on peut en extraire une sous-suite convergeant vers une mesure positive μ. Rien n'assure que μ est une mesure de probabilité. C'est même faux en général, comme le montre l'exemple de la suite des mesures de Dirac $(\delta_n)_{n\geq 0}$, qui converge vers la mesure nulle pour la topologie faible-* sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Ce problème est lié à un phénomène de "masse partant à l'infini". Pour l'éviter, on introduit la notion de suite tendue de mesures de probabilité:

Définition 2 *Une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ est dite tendue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle fini $[a,b]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n([a,b]) \geq 1-\epsilon$.*

On a alors le théorème :

Théorème 5 *Une suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ est tendue si et seulement si de toute sous-suite $(\mu_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ on peut extraire une sous-sous-suite convergeant étroitement vers une mesure de probabilité μ.*

Preuve : Prouvons tout d'abord l'implication directe : d'après le raisonnement précédent, il suffit de vérifier que si $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est une suite tendue de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ qui tend vers une mesure μ (qui est alors positive) pour la topologie faible-* sur $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, alors $\mu(\mathbb{R}) = 1$ (en effet, ceci assurera qu'il y a convergence des intégrales de toutes les fonctions continues bornées). Soient $\epsilon > 0$ et a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \geq 0, \mu_n([a,b]) \geq 1-\epsilon$. Soit f_m la fonction valant 1 sur $[a,b]$, 0 sur $]-\infty, a-1/m] \cup [b+1/m, +\infty[$ et reliée entre ces intervalles par des fonctions affines. Alors $1-\epsilon \leq \int_{\mathbb{R}} f_m d\mu_n \to_n \int_{\mathbb{R}} f_m d\mu$ (les f_m sont continues à support compact). Puis $\int_{\mathbb{R}} f_m d\mu \to_m \mu([a,b])$ (par théorème de convergence dominée). Ce qui prouve que $\mu([a,b]) \geq 1-\epsilon$. Puis que $\mu(\mathbb{R}) \geq 1-\epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, $\mu(\mathbb{R}) \geq 1$. L'inégalité inverse a été vue plus haut.

Prouvons maintenant la réciproque : si la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ n'est pas tendue, il existe un $\epsilon > 0$ tel que pour tout intervalle [a,b], il existe n tel que $\mu_n([a,b]) \leq \epsilon$. Soit $\phi(n) \in \mathbb{N}$ tel que $\mu_{\phi(n)}([-n,n]) \leq 1-\epsilon$. Supposons qu'on puisse extraire de cette sous-suite une sous-sous-suite $\mu_{\phi\circ\psi(n)}$ convergeant étroitement vers une mesure de probabilité μ. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\mu(a) = 0$, $\mu(b) = 0$ et $\mu([a,b]) > 1-\epsilon$. Pour n assez grand, $[a,b] \subset [-\phi\circ\psi(n), \phi\circ\psi(n)]$, et alors $\mu_{\phi\circ\psi(n)}([a,b]) \leq \mu_{\phi\circ\psi(n)}([-\phi\circ\psi(n), \phi\circ\psi(n)]) \leq 1-\epsilon$. Mais la convergence étroite assure que $\mu_{\phi\circ\psi(n)}([a,b]) \to \mu([a,b])$. Donc $\mu([a,b]) \leq 1-\epsilon$, ce qui est absurde.

On peut maintenant prouver le théorème énoncé au début de cette partie :

Montrons tout d'abord que la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ est tendue. La suite $(\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu_n(t))_{n\geq 0}$ est convergente donc bornée, disons par M. Par l'inégalité de Markov, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(]-\infty,-A]\cup[A,+\infty[) \leq \frac{M}{A^2}$. Ce qui permet de conclure.

Montrons maintenant que toute sous-suite extraite de $(\mu_n)_{n\geq 0}$ convergeant étroitement a pour limite μ. Supposons donc que $\mu_{\phi(n)} \to \nu$. Exactement de la même façon que pour le théorème d'existence, on obtient que ν a des moments de tout ordre, et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu_{\phi(n)}(t) \to_n \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t).$$

Donc μ et ν ont mêmes moments, c'est-à-dire que $\mu = \nu$. Ce qui achève la preuve.

1.5 Une première condition simple d'unicité

L'objet de cette partie est d'exposer une condition suffisante simple d'unicité dans le problème de Hamburger. Ce n'est pas une condition nécessaire, mais elle permet de statuer dans de nombreux cas concrets.

Proposition 3 *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ possédant des moments de tout ordre $\gamma_k = \int_{\mathbb{R}} x^k d\mu(x)$ $(k \geq 0)$, tels que la série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \frac{r^k}{k!}$$

ait un rayon de convergence $R > 0$. Alors μ est la seule mesure de probabilité ayant pour moments les γ_k.

Preuve : L'idée de la preuve est assez simple : une mesure de probabilité est caractérisée par sa transformée de Fourier, dont les moments sont les dérivées successives en 0 (à un facteur i^k près). Mais sous les conditions proposées, la transformée de Fourier est déterminée par ses dérivées successives en 0.

Soit donc m une mesure ayant les mêmes moments que μ. $\hat{m}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} d\mu(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Mais si $|\alpha| < R$

$$\int_{\mathbb{R}} \cosh(\alpha x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha x)^{2k}}{(2k)!} dm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\alpha x)^{2k}}{(2k)!} dm(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^{2k} \gamma_{2k}}{(2k)!}$$

Comme $e^{tx} < 2\cosh(tx)$ (si $(t,x) \in \mathbb{R}^2$), on en déduit que $x \longmapsto \exp(i\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (par rapport à m) pour $|\mathrm{Im}(\xi)| < R$. On peut donc prolonger $\hat{m}$ en une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \in]-R, R[\}$. Il en va évidemment de même pour $\hat{\mu}$. Ces deux fonctions ont même développement de Taylor en 0. Donc elles coïncident sur $\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \in]-R, R[\}$, et en particulier sur $\mathbb{R}$. Ce qui prouve que $m = \mu$.

Remarque : ce critère fournit l'unicité de la mesure dont les moments sont les

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k (a_k)^n$$

Cette mesure est

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \delta_{a_k}$$

Il fournit également l'unicité dans le problème de Hausdorff : en effet, si μ est une mesure de probabilité sur $[a,b]$, c'est également une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et on a si $k \in \mathbb{N}$:

$$|\int_{[a,b]} x^k d\mu(x)| \leq \max(|a|,|b|)^k$$

2 Quelques notions sur les opérateurs autoadjoint dans un espace de Hilbert

Nous allons maintenant utiliser la théorie des opérateurs linéaires d'un espace de Hilbert pour démontrer des résultats sur la nature et l'unicité des mesures solutions du problème des moments. Nous commencerons par présenter quelques généralités sur les opérateurs et introduire les mesures spectrales.

2.1 Définitions

On appelle opérateur d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, une application linéaire A d'un sous-espace vectoriel dense dans $\mathbf{H}$, appelé domaine de A et noté $D(A)$, dans $\mathbf{H}$. Si A et B sont deux opérateurs de $\mathbf{H}$, on dit que B prolonge A et on note $A \subset B$ si $D(A) \subset D(B)$ et $\forall u \in D(A)$, $Au = Bu$. C'est une relation d'ordre sur l'ensemble des opérateurs de $\mathbf{H}$.

L'espace $\mathbf{H}\times\mathbf{H}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2)\rangle = \langle u_1, v_1\rangle + \langle u_2, v_2\rangle$. On dit alors que l'opérateur A est fermé si son graphe $\mathcal{G}(A) = \{(u, Au),\ u \in D(A)\}$ est un espace de Hilbert pour $\langle , \rangle_{\mathbf{H}\times\mathbf{H}}$, c'est à dire s'il est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$. A est dit quasi-fermé si l'adhérence de $\mathcal{G}(A)$ dans $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ est le graphe d'une fonction. Dans ce cas cette fonction est un opérateur de $\mathbf{H}$ que l'on note $\overline{A}$ et qui est fermé. On l'appelle clôture de A.

Si f est une application linéaire de $D(A)$ dans $\mathbb{C}$, la densité de $D(A)$ dans $\mathbf{H}$ implique qu'il existe au plus un vecteur u de $\mathbf{H}$ tel que $\forall v \in D(A)$, $f(v) = \langle v, u\rangle$. Cependant, $D(A)$ n'étant pas supposé complet et f continue, l'existence de u n'est pas assurée. Appliqué à $f(v) = \langle Av, u\rangle$ ceci introduit la définition suivante:

Définition 3 *On note $D(A^*)$ l'ensemble des vecteurs u de $\mathbf{H}$ tels qu'il existe $A^*u \in \mathbf{H}$ vérifiant: $\forall v \in D(A)$, $\langle Av, u\rangle = \langle v, A^*u\rangle$. On appelle adjoint de A l'application A^*.*

A^* n'est pas toujours un opérateur: $D(A^*)$ n'est pas nécessairement dense dans $\mathbf{H}$. Le résultat suivant est une condition nécessaire et suffisante pour cela.

Proposition 4 *$D(A^*)$ est dense dans $\mathbf{H}$ si et seulement si A est quasi-fermé. Dans ce cas $A^{**} = \overline{A}$.*

Preuve: On vérifie facilement que $\mathcal{G}(A^*) = \{(-Ax, x),\ x \in D(A)\}^\perp$. Considérons l'opérateur de $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ défini partout par $I(u, v) = (-v, u)$. On a $I^2 = -Id$ et I est isométrique. Comme $\mathcal{G}(A^*) = I(\mathcal{G}(A))^\perp$, si $D(A^*)$ est dense dans $\mathbf{H}$, A^* est un opérateur fermé et

$$\mathcal{G}(A^{**}) = I(I(\mathcal{G}(A))^\perp)^\perp = I^2(\mathcal{G}(A))^{\perp\perp} = \mathcal{G}(A)^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{G}(A)}$$

Ainsi $\overline{\mathcal{G}(A)}$ est le graphe d'un opérateur, donc A est quasi-fermé et $A^{**} = \overline{A}$.
Réciproquement, si $D(A^*)$ n'est pas dense dans $\mathbf{H}$, on peut trouver un élément u de $\mathbf{H}$ qui lui est orthogonal. Ainsi $(0, u) \in I(\mathcal{G}(A^*))^\perp$. Donc $I(\mathcal{G}(A^*))^\perp$ n'est pas le graphe d'une fonction. A étant supposé quasi-fermé, on a $\mathbf{H} \times \mathbf{H} = I(\mathcal{G}(\overline{A})) \oplus_\perp \mathcal{G}(A^*)$ d'où $\mathbf{H} \times \mathbf{H} = \mathcal{G}(\overline{A}) \oplus_\perp I(\mathcal{G}(A^*))$. D'où $I(\mathcal{G}(A^*))^\perp = \mathcal{G}(\overline{A})$ est bien le graphe d'une fonction, et donc $D(A^*)$ est dense dans $\mathbf{H}$.
Remarque: L'expression du graphe de A^* nous montre que $\overline{A}^* = A^*$ et que si $A \subset B$, $B^* \subset A^*$.

Corollaire 1 *Si A est quasi-fermé, on a $A \subset A^{**}$ avec égalité si et seulement si A est fermé.*

Définition 4 *Si pour tous u et v dans $D(A)$, $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, on dit que l'opérateur A est symétrique. On dit qu'il est auto-adjoint si $A = A^*$. Un opérateur dont la clôture est autoadjoint est qualifié d'essentiellement autoadjoint.*

Si A est symétrique, on a $A \subset A^*$, donc A est quasi-fermé.

2.2 Spectre d'un opérateur

Si A est un opérateur, on note $\ker A = \{u \in D(A),\, Au = 0\}$ et $\Delta(A) = \{Au,\, u \in D(A)\}$

Définition 5 *Un vecteur v de $\mathbf{H}$ est un vecteur propre de A si c'est un vecteur non nul de $D(A)$ tel que $Av = \lambda v$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit alors que λ est une valeur propre de A. On appelle sous-espace propre associé à λ, l'espace* $\ker(A - \lambda)$.

Proposition 5 *Si A est un opérateur et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ker(A^* - \lambda) = \Delta(A - \overline{\lambda})^\perp$. Ainsi λ est valeur propre de A^* si et seulement si $\Delta(A - \overline{\lambda})$ n'est pas dense dans $\mathbf{H}$.*

Preuve :

$$\begin{aligned} v \in \ker(A^* - \lambda) &\Leftrightarrow \forall u \in D(A),\, \langle (A^* - \lambda)v, u\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall u \in D(A),\, \langle v, Au\rangle = \langle v, \overline{\lambda} u\rangle \\ &\Leftrightarrow v \in \Delta(A - \overline{\lambda})^\perp \end{aligned}$$

Proposition 6 *Si A est symétrique, alors les valeurs propres de A sont réelles et deux vecteurs de deux sous-espaces propres différents, orthogonaux.*

Preuve : Cette preuve est classique et identique au cas de la dimension finie.

Définition 6 *On dit qu'un complexe λ est une valeur régulière de l'opérateur A si et seulement si $A - \lambda$ est bijective de $D(A)$ sur $\mathbf{H}$ et $(A - \lambda)^{-1}$ est un opérateur continu de $\mathbf{H}$ dans $D(A)$. L'ensemble des valeurs non régulières de A est appelé spectre de A et noté $Spec(A)$.*

La notion de spectre est en fait liée à la résolution d'équation du type $(A - \lambda)u = v$, où u est l'inconnue. C'est pourquoi l'on introduit la notion de résolvant.

Définition 7 *Soit λ une valeur régulière de A. On appelle résolvant de A pour λ l'opérateur continu $R_\lambda = (A - \lambda)^{-1}$ de $\mathbf{H}$ dans $D(A)$.*

Proposition 7 *Soient λ et μ deux valeurs régulières de A. Alors $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu$. En particulier $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.*

Preuve : Il suffit d'écrire $R_\lambda = R_\lambda(A - \mu)R_\mu$ et $R_\mu = R_\lambda(A - \lambda)R_\mu$ et de faire la différence.

Dans la suite, nous allons nous restreindre à l'étude des opérateurs auto-adjoints.

Théorème 6 *Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est un fermé de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Montrons d'abord que $Spec(A) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. On a déjà vu que λ n'est pas valeur propre de A, ainsi que $\overline{\lambda}$, donc $A - \lambda$ est injectif et $\overline{\Delta(A - \lambda)} = \mathbf{H}$ par la proposition 5. Il nous reste donc à montrer que $\Delta(A - \lambda) = \mathbf{H}$. Supposons le contraire et posons $\lambda = a + ib$ avec a et b réels. Si $u \in D(A)$, $\langle (A - \lambda)u, (A - \lambda)u\rangle = ||(A - a)u||^2 + |b|^2||u||^2$, d'où $||u|| \leq \frac{1}{|b|}||(A - \lambda)u||$, $(A - \lambda)^{-1}$ est donc continu et peut se prolonger à $\mathbf{H}$ entier. Ceci est absurde car $A - \lambda$ étant fermé, $(A - \lambda)^{-1}$ l'est aussi.
Montrons maintenant que $Spec(A)$ est fermé : si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash Spec(A)$, il existe $\delta > 0$ tel que $||(A - \lambda)u|| \geq \delta||u||$ pour $u \in D(A)$, donc pour μ suffisament proche de λ, on a $||(A - \mu)u|| \geq \frac{\delta}{2}||u||$. Ceci prouve que $(A - \mu)^{-1}$ est bien définie et continue de $\Delta(A - \mu)$ dans $D(A)$. Comme précédemment on montre, puisque $A - \mu$ est fermé, que $\Delta(A - \mu) = \mathbf{H}$, donc $\mu \notin Spec(A)$.

2.3 Fonctions de Nevanlinna

On notera désormais $\mathcal{H}_+ = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Définition 8 *On appelle fonction de Nevanlinna une application analytique f de $\mathcal{H}_+$ dans lui-même vérifiant la condition de croissance :*

$$M = \sup_{\lambda \in \mathcal{H}_+} \mathrm{Im}(\lambda)|f(\lambda)| < \infty$$

Il s'agit essentiellement dans cette section de démontrer le théorème de représentation de ces fonctions :

Théorème 7 *Soit f une fonction de Nevanlinna. Il existe une mesure finie μ sur $\mathbb{R}$ de masse totale inférieure à M telle que*

$$\forall \xi \in \mathbb{C},\ f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t - \xi}$$

Preuve : Nous ne donnerons ici qu'un schéma de preuve. L'idée est d'abord de montrer (en utilisant le théorème des résidus par exemple), que pour tout $r > 0$ il existe une mesure finie μ_r sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall \xi,\ \mathrm{Im}\xi > r,\ f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_r(t)}{t + ir - \xi}$$

et $\mu_r(\mathbb{R}) \leq M$.
On utilise alors la proposition 1 pour obtenir une mesure μ sur $\mathbb{R}$, limite faible d'une sous suite de $(\mu_r)_{r>0}$. On montre enfin que cette mesure convient.

2.4 Mesures spectrales

Définition 9 *Soit $\mathbf{H}$ un espace de Hilbert. On appelle mesure spectrale sur $\mathbf{H}$, la donnée d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A})$ et d'une application $\mu : \mathcal{A} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}$ telle que*

- *pour toute partie mesurable A, $\mu(A, .)$ est un projecteur orthogonal de $\mathbf{H}$*
- $\mu(X, .) = Id_{\mathbf{H}}$
- *si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$, alors les espaces $(\Delta\mu(A_n, .))_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux orthogonaux et $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, .) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n, .)$.*

Si u et v sont deux éléments de $\mathbf{H}$, on pose $\mu(A, u, v) = \langle \mu(A, u), v\rangle$.

Proposition 8 *Si u et v sont dans $\mathbf{H}$, $\mu(., u, v)$ est une mesure signée sur X et $\mu(., u, u)$ est une mesure positive de masse totale inférieure à $||u||^2$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, on a $|\mu|(A, u, v) \leq \sqrt{\mu(A, u, u)}\sqrt{\mu(A, v, v)} \leq ||u||.||v||$.*

Preuve : On vérifie facilement à partir du troisième point de la définition, que $\mu(., u, u)$ est une mesure. Ensuite si u et v sont dans $\mathbf{H}$, A dans $\mathcal{A}$, on a $\mu(A, u, v) = \langle \mu(A, u), v\rangle = \langle u, \mu(A, v)\rangle = \overline{\mu(A, v, u)}$. De plus, $\mu(A, u, u) = ||\mu(A, u)||^2 \leq ||u||^2$. Ainsi $\mu(A, ., .)$ est une forme sesquilinéaire positive. D'où on a

$$\begin{aligned} \mu(A, u, v) &= \frac{1}{4}\big[\mu(A, u+v, u+v) - \mu(A, u-v, u-v) \\ &\quad -i\mu(A, u-iv, u-iv) + i\mu(A, u+iv, u+iv)\big] \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\mu(., u, v)$ est une mesure signée sur $(X, \mathcal{A})$. Enfin la dernière inégalité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la forme sesquilinéaire positive $\mu(A, ., .)$.

Soit ϕ une application mesurable de X dans $\mathbb{C}$. Si v est tel que $\phi \in L^1(\mu(., v, v))$, on peut alors définir, pour $u \in \mathbf{H}$, $\psi_v(u) = \int_X \phi(t)\, d\mu(t, u, v)$. ψ_v est alors une forme linéaire sur $\mathbf{H}$. Posons $D(\phi, \mu) = \{u \in \mathbf{H}, \int_X |\phi(t)|^2\, d\mu(t, u, u) < \infty\}$.

Lemme 1 *L'application ψ_v est une forme linéaire continue si et seulement si $v \in D(\phi, \mu)$.*

Preuve : Soit donc $v \in D(\phi, \mu)$. Si $u \in \mathbf{H}$, alors

$$
\begin{aligned}
|\psi_v(u)| &\leq \left(\int_X |\phi(t)|^2 d\mu(t, v, v)\right)^{1/2} \left(\int d\mu(t, u, u)\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_X |\phi(t)|^2 d\mu(t, v, v)\right)^{1/2} ||u||
\end{aligned}
$$

On voit que $||\psi_v|| \leq \left(\int_X |\phi(t)|^2 d\mu(t, v, v)\right)^{1/2}$.
Réciproquement si $||\psi_v|| < \infty$, d'après le théorème de Riesz il existe $w \in \mathbf{H}$ tel que $\psi_v(u) = \langle u, w\rangle$ pour tout $u \in \mathbf{H}$. On a alors $||w||^2 = \psi_v(w) = \int_X \phi(t)\, d\mu(t, w, v)$. Or on sait que si $A \in \mathcal{A}$,

$$
\mu(A, w, v) = \overline{\langle \mu(A, v), w\rangle} = \int_X \overline{\phi(t)} d\mu(t, \mu(A, v), v)
$$

$$
\text{Or, si } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu(B, \mu(A, v), v) = \mu(A \cap B, v, v)
$$

Ainsi $\mu(., w, v)$ est la mesure de densité $\overline{\phi}$ par rapport à $\mu(., v, v)$. Donc $\int_X |\phi(t)|^2 d\mu(t, v, v) = ||w||^2 < \infty$. D'où ψ_v est continue si et seulement si $v \in D$, et dans ce cas,

$$
||\psi_v|| = \left(\int_X |\phi(t)|^2 d\mu(t, v, v)\right)^{1/2}
$$

Ainsi si $v \in D(\phi, \mu)$, le théorème de Riesz nous dit qu'il existe un unique vecteur de $\mathbf{H}$, noté $(\int_X \phi\, d\mu).v$ vérifiant

$$
\forall u \in \mathbf{H},\ \langle u, \left(\int_X \phi\, d\mu\right).v\rangle = \int_X \phi(t)\, d\mu(t, u, v)
$$

L'unicité nous prouve que l'application $v \longmapsto (\int_X \phi\, d\mu).v$ est une application linéaire définie sur $D(\phi, \mu)$. En effet l'ensemble des formes linéaires continues étant un espace vectoriel et $v \longmapsto \psi_v$ étant antilinéaire, $D(\phi, \mu)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}$. On note $\int_X \phi\, d\mu$ cette application. Supposons maintenant que $D(\phi, \mu)$ est dense dans $\mathbf{H}$. Soient u et v dans $D(\phi, \mu)$. On a :

$$
\begin{aligned}
\langle u, \left(\int_X \phi\, d\mu\right).v\rangle &= \overline{\int_X \overline{\phi(t)} d\mu(t, v, u)} \\
&= \overline{\langle v, \int_X \overline{\phi}\, d\mu.u\rangle} \\
&= \langle \int_X \overline{\phi}\, d\mu.u, v\rangle
\end{aligned}
$$

Ainsi l'adjoint de $\int_X \phi\, d\mu$ coïncide avec $\int_X \overline{\phi}\, d\mu$ sur $D(\phi, \mu)$.

2.5 Mesure spectrale associée à un autoadjoint

Le but de cette section est de montrer que si A est un opérateur autoadjoint, alors il existe une mesure spectrale telle que A se construise à partir de cette mesure comme dans la section précédente.

Si A est auto-adjoint, on définit une application continue sur le demi-plan complexe supérieur par $\mathcal{R}_u(\lambda) = \langle R_\lambda u, u\rangle$ pour $u \in \mathbf{H}$ et $\lambda \in \mathcal{H}_+$. Comme $\frac{\mathcal{R}_u(\mu)-\mathcal{R}_u(\lambda)}{\mu-\lambda} = \langle R_\mu R_\lambda u, u\rangle$ et que l'application $\mu \longmapsto R_\mu$ est continue sur le demi-plan supérieur, on voit que $\mathcal{R}_u$ est holomorphe sur $\mathcal{H}_+$.
De plus comme $(R_\lambda)^* = R_{\overline{\lambda}}$, $2i\mathrm{Im}\mathcal{R}_u(\lambda) = \langle R_\lambda u, u\rangle - \langle R_{\overline{\lambda}} u, u\rangle = (\lambda - \overline{\lambda})\langle R_\lambda R_{\overline{\lambda}} u, u\rangle$, donc $2i\mathrm{Im}\mathcal{R}_u(\lambda) = 2i\mathrm{Im}(\lambda)\langle R_\lambda u, R_\lambda u\rangle$, d'où $\mathcal{R}_u(\lambda) \in \mathcal{H}_+$.
Enfin, si $\lambda = a + ib$ avec a réel et $b > 0$, $||(A-\lambda)u||^2 = ||(A-a)u||^2 + b^2||u||^2$, donc $\sup_{\lambda\in\mathcal{H}_+} \mathrm{Im}(\lambda)|\mathcal{R}_u(\lambda)| \leq ||u||^2$. Ainsi $\mathcal{R}_u$ est une fonction de Nevanlinna.

On peut appliquer le résultat de la section 3 et obtenir, pour tout $u \in \mathbf{H}$, une mesure positive μ_u sur $\mathbb{R}$ telle que $\mu_u(\mathbb{R}) \leq ||u||^2$ et

$$\mathcal{R}_u(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_u(t)}{t-\lambda}$$

Posons alors, si B est un borélien de $\mathbb{R}$ et u et v dans $\mathbf{H}$:
$\mu(B,u,v) = \frac{1}{4}\left[\mu_{u+v}(B) - \mu_{u-v}(B) - i\mu_{u-iv}(B) + i\mu_{u+iv}(B)\right]$

Proposition 9 *Pour tout couple (u,v) de $\mathbf{H}^2$, $\mu(.,u,v)$ est une mesure signée sur $\mathbb{R}$, et on a, pour* $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t,u,v)}{t-\lambda} = \langle R_\lambda u, v\rangle$$

Ainsi, l'application $\mathbf{H}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ qui associe $\mu(B,u,v)$ à (u,v) est sesquilinéaire positive continue.

Preuve : En effet, $\mu(.,u,v)$ est une combinaison linéaire de mesures positives finies, et est donc une mesure signée. Par sesquilinéarité de $\langle,\rangle$, on a bien $\langle R_\lambda u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t,u,v)}{t-\lambda}$. Pour prouver la sesquilinéarité de $\mu(B,.,.)$, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 2 *Si μ est une mesure signée sur $\mathbb{R}$, alors*

$$\text{si } a \in \mathbb{R}, \quad \mu(\{a\}) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{Im}\left(\epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-(a+i\epsilon)}\right)$$

Si a et b sont dans $\mathbb{R}$, $a < b$, alors

$$\mu(]a,b[) + \mu([a,b]) = \frac{2}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b (\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-(u+i\epsilon)})du$$

Il est clair que le lemme implique la sesquilinéarité de $\mu(B,.,.)$. Par ailleurs, $\mu(B,.,.)$ étant positive, on peut lui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ce qui donne :

$$|\mu(B,u,v)| \leq \sqrt{\mu(B,u,u)}\sqrt{\mu(B,v,v)} \leq \sqrt{\mu(\mathbb{R},u,u)}\sqrt{\mu(\mathbb{R},v,v)} \leq ||u||.||v||$$

Il nous reste donc à démontrer le lemme. C'est un simple calcul :

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-(a+i\epsilon)} &= \epsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{t-a+i\epsilon}{(t-a)^2+\epsilon^2} d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon(t-a)}{(t-a)^2+\epsilon^2}\mu(dt) + i\int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon^2}{(t-a)^2+\epsilon^2} d\mu(t)
\end{aligned}$$

La partie imaginaire de cette quantité tend vers $\mu(\{a\})$ par convergence dominée.
Choisissons maintenant $a < b$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t-(u+i\epsilon)}\right) du &= \int_{\mathbb{R}}\int_a^b \frac{\epsilon}{(t-u)^2+\epsilon^2} du d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[\arctan(\frac{b-t}{\epsilon}) - \arctan(\frac{a-t}{\epsilon})\right] d\mu(t) \\
\lim_{\epsilon\to 0}(\arctan(\frac{t-b}{\epsilon}) - \arctan(\frac{t-a}{\epsilon})) &= \pi \mathbf{1}_{]a,b[}(t) + \frac{\pi}{2}(\mathbf{1}_{\{a\}}(t) + \mathbf{1}_{\{b\}})(t)
\end{aligned}$$

D'où le résultat par convergence dominée.

Ainsi il existe, par le théorème de Riesz, un opérateur E_B continu de $\mathbf{H}$ tel que pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathbf{H}$, on ait $\mu(B, u, v) = \langle E_B u, v\rangle$.

Proposition 10 *Pour tout borélien B, l'opérateur E_B est un opérateur de projection orthogonale.*

Preuve : Soit B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrons d'abord que E_B est hermitien. En effet pour u et v dans $\mathbf{H}$, on a $\langle E_B u, v\rangle = \mu(B, u, v) = \overline{\langle E_B v, u\rangle} = \langle u, E_B v\rangle$. De plus montrons que si u et v sont dans $\mathbf{H}$, $\mu(., E_B u, v)$ est la mesure de densité 1_B par rapport $\mu(., u, v)$. Avant cela montrons que $\mu(., R_\lambda u, v)$ est la mesure de densité $\frac{1}{t-\lambda}$ par rapport à $\mu(., u, v)$. Si $\eta \in \mathcal{H}_+$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\eta} d\mu(t, R_\lambda u, v) &= \langle R_\eta R_\lambda u, v\rangle \\
&= \langle \frac{1}{\eta-\lambda}(R_\eta - R_\lambda)u, v\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta-\lambda}\left(\frac{1}{t-\eta} - \frac{1}{t-\lambda}\right) d\mu(t, u, v) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\eta}\frac{1}{t-\lambda} d\mu(t, u, v)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout η, le lemme 2 nous assure l'égalité des mesures. On montre de même que c'est aussi la mesure $\mu(., u, R_{\overline{\lambda}} v)$.
Pour déterminer $\mu(., E_B u, v)$ il suffit maintenant d'écrire pour $\lambda \in \mathcal{H}_+$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{1_B(t)}{t-\lambda} d\mu(t, u, v) &= \mu(B, R_\lambda u, v) \\
&= \mu(B, u, R_{\overline{\lambda}} v) \\
&= \langle E_B u, R_{\overline{\lambda}} v\rangle \\
&= \langle R_\lambda E_B u, v\rangle
\end{aligned}$$

Ici encore cette égalité valant pour tous les λ, le résultat en découle. Maintenant comme la densité de $\mu(., E_B u, v)$ par rapport à $\mu(., u, v)$ est idempotente, $\langle E_B^2 u, v\rangle = \langle E_B u, v\rangle$ pour tous u et v. Donc E_B est un projecteur. Comme on a déjà vu son hermiticité, c'est un projecteur orthogonal.

Soit (B_n) une suite de boréliens disjoints. Les projecteurs E_{B_n} commutent alors deux à deux et si $n \neq m$, $E_{B_n} E_{B_m} = 0$, ce qui montre que les espaces $\Delta(E_{B_n})$ sont deux à deux orthognaux et comme $1_{\bigcup B_n} = \sum 1_{B_n}$, on a $E_{\bigcup B_n} = \sum E_{B_n}$. On vérifie également que $E_{\mathbb{R}} = Id$. On a donc construit une mesure spectrale μ sur $\mathbb{R}$. Il reste à voir que l'on peut bien récupérer A à partir de μ. Si $u \in D(A)$, $v \in \mathbf{H}$ et $\lambda \in \mathcal{H}_+$, on peut écrire $u = (A-\lambda)^{-1}w$ et alors

$$\int_{\mathbb{R}} (t-\lambda) d\mu(t,u,v) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t,w,v) = \langle w, v\rangle = \langle (A-\lambda)u, v\rangle$$

Donc $A = \int_{\mathbb{R}} t\, d\mu$.

On peut enfin énoncer le théorème annoncé :

Théorème 8 *Si A est un opérateur autoadjoint de $\mathbb{H}$, il existe une mesure spectrale μ sur $\mathbb{R}$ telle que $D = D(A)$ et $\int_{\mathbb{R}} t d\mu.u = Au$ pour $u \in D(A)$. De plus A commute avec tous les E_B.*

Preuve : Il reste seulement à prouver l'égalité $D = D(A)$. Comme $\int_{\mathbb{R}} t^2 d\mu(t,u,u) = ||Au||^2$ pour $u \in D(A)$, on a bien $D(A) \subset D$ et comme $\int_{\mathbb{R}} t\, d\mu$ est une extension symétrique de A qui est autoadjoint, $D = D(A)$. La commutativité de A et des E_B est une simple vérification formelle.

Définition 10 *Si A est un opérateur autoadjoint et Φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable et bornée, μ la mesure spectrale associée à A, on pose $\Phi(A) = \int_{\mathbb{R}} \phi\, d\mu$. C'est un opérateur continu défini sur* $\mathbf{H}$.

Proposition 11 *Si λ est une valeur propre de A et $\Phi = 1_{\{\lambda\}}$, l'opérateur $\phi(A)$ est la projection orthogonale sur* $\ker(A-\lambda)$.

Preuve : On a $\Phi(A) = E_{\{\lambda\}}$, donc $\Phi(A)$ est un projecteur. Cherchons son image : $E_{\{\lambda\}}u = u$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} 1_{\{\lambda\}} d\mu(t,u,u) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t,u,u)$ c'est à dire si et seulement si $\mu(\mathbb{R},u,u) = \mu(\{\lambda\},u,u)$. Ceci nous donne $\langle u, Au\rangle = \lambda||u||^2$ et $||Au||^2 = \lambda^2||u||^2$ d'où $Au = \lambda u$. Ainsi $\Phi(A)$ est la projection orthogonale sur $\ker(A-\lambda)$.

Nous allons maintenant voir comment toutes ces généralités s'appliquent au problème des moments.

3 Retour au problème des moments

3.1 Classification de Von Neumann

Nous noterons désormais, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \mathcal{S}(P\overline{Q})$. L'idée est maintenant de considérer le complété $\mathbf{H}$ de $\mathbb{C}[X]$ pour la norme induite par $\langle , \rangle$. Il est naturellement muni d'une structure d'espace de Hilbert. On note A l'opérateur linéaire de $\mathbf{H}$ défini sur $\mathbb{C}[X]$ par $A.P = XP$. A est symétrique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \langle A^n 1, 1\rangle$. L'existence d'une mesure spectrale représentant A nous donnerait alors une solution au problème. Tout ceci nous invite à chercher une extension autoadjointe de A. C'est ce que nous allons faire, en classifiant les extensions symétriques de A.

Revenons à un espace de Hilbert $\mathbf{H}$ quelconque et à un opérateur symétrique fermé A quelconque de cet espace. On cherche en fait les extensions de A qui sont symétriques. Si B est une telle extension de A, on a nécessairement $A \subset B \subset B^* \subset A^*$. On se ramène donc à chercher B parmi les restrictions de A^* à un sous espace $D(B)$ de $D(A^*)$ contenant $D(A)$. Étudions l'espace $D(A^*)$. Muni du produit scalaire, $\langle \phi, \psi\rangle_{A^*} = \langle \phi, \psi\rangle + \langle A^*\phi, A^*\psi\rangle$, c'est un espace de Hilbert car A^* est fermé. Posons $\mathcal{K}_+ = \ker(A^* - i)$ et $\mathcal{K}_- = \ker(A^* + i)$ et d_+, d_- leurs dimensions respectives.

Proposition 12 *On a $D(A^*) = D(A) \oplus_\perp \mathcal{K}_+ \oplus_\perp \mathcal{K}_-$ (l'orthogonalité étant prise au sens de $\langle .,. \rangle_{A^*}$)*

Preuve : En effet, soit $u \in D(A^*)$. A étant fermé, $\Delta(A+i)$ est fermé (c'est une simple vérification). Donc d'après la proposition 5 : $\mathbf{H} = \ker(A^* - i) \oplus \Delta(A+i)$. On peut alors écrire $(A^*+i)u = 2iv + (A+i)w$ où $A^*v = iv$ et $w \in D(A)$. D'où $(A^*+i)(u-w-v) = 0$. Ainsi $D(A^*) = D(A) + \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-$. Enfin si $u \in \mathcal{K}_+$ et $v \in \mathcal{K}_-$, $\langle u, v\rangle = \langle -iA^*u, iA^*v\rangle = -\langle A^*u, A^*v\rangle$, donc $\mathcal{K}_+ \perp_{A^*} \mathcal{K}_-$. On montre de même que $D(A) \perp_{A^*} \mathcal{K}_\pm$ et donc que la somme est directe.

Si B est une extension symétrique de A, on peut écrire $D(B) = D(A) \oplus_\perp N$ où $N \subset \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$. B est alors symétrique si et seulement si la restriction de A^* à N est symétrique. En effet, si $\phi = \phi_1 + \phi_2$ et $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec ϕ_1 et ψ_1 dans $D(A)$ et ϕ_2 et ψ_2 dans N, on a

$$\langle \phi_1 + \phi_2, A^*(\psi_1 + \psi_2)\rangle - \langle A^*(\phi_1 + \phi_2), \psi_1 + \psi_2\rangle = \langle \phi_2, A^*\psi_2\rangle - \langle A^*\phi_2, \psi_2\rangle$$

Si l'on pose $D(B^*) = D(A) + N'$ avec $N' \subset \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$, les éléments de N' sont alors exactement ceux de $J(N)^\perp$ où J est l'opérateur de $\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$ défini par $J(\phi, \psi) = (\phi, -\psi)$ (l'orthogonal est ici pris pour le produit scalaire défini sur $D(A^*)$).
Enfin on a $\mathcal{K}_\pm(B) = \mathcal{K}_\pm \cap J(N)^\perp = \mathcal{K}_\pm \cap N^\perp$, car pour $\phi \in \mathcal{K}_\pm$, on a $J\phi = \pm\phi$.

Regroupons tous ces résultats :

Proposition 13 *Soit B une extension symétrique de A. Alors on a $D(B) = D(A) \oplus N$ où N est un sous-espace de $\mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$, $D(B^*) = D(A) \oplus J(N)^\perp$ et $\mathcal{K}_\pm(B) = \mathcal{K}_\pm \cap N^\perp$.*

Définition 11 *Soient E et F deux espaces de Hilbert. On appelle isométrie partielle de E dans F, la donnée d'un opérateur U défini sur E et la donnée d'un sous-espace fermé $\mathcal{U}$ de E et d'un sous-espace fermé $\mathcal{V}$ de F, tels que U soit unitaire de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et nulle sur l'orthogonal de $\mathcal{U}$.*

On en déduit maintenant le théorème de classification des extensions symétriques :

Théorème 9 *Si A est un opérateur fermé d'un espace de Hilbert $\mathbf{H}$, les extensions symétriques de A sont en correspondance bijective avec les isométries partielles de $\mathcal{K}_+$ dans $\mathcal{K}_-$.*
Si B correspond à U unitaire de $\mathcal{U}_+$ dans $\mathcal{U}_-$, alors $D(B) = D(A) \oplus \{\phi + U\phi,\ \phi \in \mathcal{U}_+\}$ et $\mathcal{K}_\pm(B) = \mathcal{K}_\pm \cap \mathcal{U}_\pm^\perp$ (l'orthogonalité est cette fois-ci considérée au sens classique dans $\mathbf{H}$).

Preuve : En effet si B est une extension symétrique de A, alors d'après la proposition, $D(B) = D(A) \oplus N$. Si $\phi = \phi_1 + \phi_2 \in N$, on a $\langle \phi, A^*\phi\rangle - \langle A^*\phi, \phi\rangle = 2i(||\phi_2||^2 - ||\phi_1||^2) = 0$, donc $||\phi_1|| = ||\phi_2||$. De plus si $\phi_1 + \phi_2$ et $\phi_1 + \phi_2'$ sont tous deux dans N, alors $\phi_2 - \phi_2'$ y est aussi, donc $||\phi_2 - \phi_2'|| = 0$ et $\phi_2 = \phi_2'$. Ainsi N est bien le graphe d'une isométrie partielle U définie sur $\mathcal{U}_+$ de $\mathcal{K}_+$ dans $\mathcal{K}_-$ et $N = \{\phi + U\phi,\ \phi \in \mathcal{U}_+\}$. Réciproquement, il est facile de voir qu'une isométrie partielle définit bien de cette façon une extension symétrique de A. Enfin pour déterminer $\mathcal{K}_+(B)$, on voit que $\phi \in \mathcal{K}_+$ est dans l'orthogonal de N si et seulement si il est dans celui de $\mathcal{U}_+$, mais alors la condition d'orthogonalité coïncide avec celle de $\mathbf{H}$.

Corollaire 2 *Soit A un opérateur fermé symétrique. A possède des extensions autoadjointes si et seulement si $d_+ = d_-$ et ses extensions autoadjointes sont en correspondance bijective avec les opérateurs unitaires de $\mathcal{K}_+$ dans $\mathcal{K}_-$. En particulier, un opérateur symétrique A est essentiellement autoadjoint si et seulement si $d_+ = d_- = 0$ ce qui est encore équivalent à ce qu'il possède une unique extension autoadjointe.*

Preuve : Comme $D(A^*) = D(A) \oplus \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-$, un opérateur symétrique fermé est autoadjoint si et seulement si $d_+ = d_- = 0$, donc une extension symétrique B de A est autoadjointe si et seulement si $\mathcal{U}_+^\perp \cap \mathcal{K}_+ = \mathcal{U}_-^\perp \cap \mathcal{K}_- = \{0\}$, c'est à dire si et seulement si $\mathcal{U}_+ = \mathcal{K}_+$ et $\mathcal{U}_- = \mathcal{K}_-$. Il suffit enfin de remarquer qu'un opérateur fermé symétrique non autoadjoint possède plusieurs extensions autoadjointes (s'il en possède).

Enfin nous finirons par un résultat sur les opérateurs muni de certaines symétries qui nous sera utile dans l'application au problème des moments.

Définition 12 *On appelle conjugaison d'un espace de Hilbert* $\mathbf{H}$ *une application anti-linéaire, isométrique,* C *de* $\mathbf{H}$ *dans lui-même vérifiant* $C^2 = Id$. *Un opérateur* A *est dit réel pour une conjugaison* C *si* C *stabilise* $D(A)$ *et* $AC = CA$.

Proposition 14 *Soit* C *une conjugaison. Alors tout opérateur symétrique réel possède des extensions autoadjointes.*

Preuve : En effet si $\phi \in \mathcal{K}_+$, $AC\phi = CA\phi = -iC\phi$, donc $C\phi \in \mathcal{K}_-$. Réciproquement $C\mathcal{K}_- \subset \mathcal{K}_+$. Ainsi C est une application anti-unitaire de $\mathcal{K}_+$ dans $\mathcal{K}_-$. D'où $d_+ = d_-$.

3.2 Solutions de Von Neumann

On reprend désormais pour $\mathbf{H}$ l'espace de Hilbert complété de $\mathbb{C}[X]$. La famille (P_n) définie en section 1.2 forme une base hilbertienne de $\mathbf{H}$. Ainsi $\mathbf{H}$ s'identifie à l'espace $l^2(\mathbb{N})$ et on peut le munir naturellement d'une conjugaison $(a_n) \longmapsto (\overline{a_n})$. L'opérateur A est alors réel pour cette conjugaison. Il possède donc des extensions autoadjointes, ce qui au passage nous donne une autre preuve de l'existence de solutions. Ces solutions joueront un grand rôle dans la suite.

Définition 13 *Une solution au problème de moments* (γ_n) *associée à un opérateur autoadjoint prolongeant* A *est appelée une solution de Von Neumann.*

Pour l'instant nous avons uniquement montré qu'il existait toujours des solutions de Von Neumann sous l'hypothèse que la suite de moments est définie positive. Cependant nous verrons dans la suite qu'il peut exister des solutions qui ne sont pas de Von Neumann. Avant cela étudions plus en détail l'opérateur A pour classifier toutes les solutions de Von Neumann du problème. Commençons par chercher l'adjoint de A.

Rappelons que les polynômes (P_n) et (Q_n) vérifient la relation de récurrence : $b_n y_{n+1} + a_n y_n + b_{n-1} y_{n-1} = X y_n$. Définissons alors un opérateur $\mathcal{F}$ de l'espace des suites complexes $\mathbf{H}_{-1} = l^2(\mathbb{N} \cup \{-1\})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ par $\mathcal{F}(u)_n = b_n u_{n+1} + a_n u_n + b_{n-1} u_{n-1}$ (avec la convention $b_{-1} = 1$). On peut alors indentifier $\mathbf{H}$ à l'hyperplan de $\mathbf{H}_{-1}$ d'équation $u_{-1} = 0$. Montrons que dans ce cas, une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dans $D(A^*)$ si et seulement si elle est dans l^2 ainsi que $\mathcal{F} \circ j(u)$ (où j est l'injection de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}_{-1}$ définie ci-dessus), et que dans ce cas A^* agit comme $\mathcal{F} \circ j$. En effet, supposons qu'il existe deux suites u et v dans l^2 telles que pour toute suite finie w, on ait $\langle u, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$. Ceci donne $b_n u_{n+1} + a_n u_n + b_{n-1} u_{n-1} = v_n$, c'est à dire $v = \mathcal{F} \circ ju$.

Remarquons qu'une solution u de l'équation $A^* u = zu$ vérifie une condition de récurrence : $b_n u_{n+1} + (a_n - z) u_n + b_{n-1} u_{n-1} = 0$, donc est entièrement déterminée par le couple (u_{-1}, u_0). Mais comme $u_{-1} = 0$ si $u \in \mathbf{H}$, on voit que $\dim\ker(A^* - z) \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En particulier

$d_+ \leq 1$. On obtient aussi le fait que si $u \in \ker(A^* - z)$, on a $u = 0$ si et seulement si $u_0 = 0$. Fixons ceci dans un lemme pour la suite :

Lemme 3 *Si $z \in \mathbb{C}$, $\ker(A^* - z)$ est de dimension inférieure à 1. Si sa dimension est 1, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \ker(A^* - z) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ u & \longmapsto & u_0 \end{array}$$

est un isomorphisme.

Il est peut-être bon à ce stade d'étudier à quelle condition deux éléments de $\mathbf{H}_{-1}$ vérifient l'identité $\langle \mathcal{F}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{F}v \rangle$ (condition importante pour déterminer les extensions autoadjointes de A). Ceci se traduit par :

$$\sum_{n \geq 0} b_n u_{n+1} v_n + b_{n-1} u_{n-1} v_n - b_{n+1} u_n v_{n+1} - b_{n-1} u_n v_{n-1} = 0$$

C'est à dire

$$\lim_{n \to \infty} W_n(u, v) = 0$$

où W_n est un "wronskien" de u et v : $W_n(u, v) = b_n(u_{n+1} v_n - u_n v_{n+1})$.

Étudions plus en détail le cas où $d_+ = 0$:

Dans ce cas, l'opérateur A est essentiellement autoadjoint et a donc une unique extension autoadjointe, et il y a une unique solution de Von Neumann au problème des moments. Ceci ne nous dit pas qu'il ne peut pas y avoir d'autres solutions qui ne seraient pas de Von Neumann, cependant il est assez satisfaisant que ce soit le cas : il y a unicité du problème des moments. En effet, dans ce cas, $\overline{A}$ est autoadjoint, donc si $\lambda \in \mathcal{H}_+$, $(\overline{A} - \lambda) D(\overline{A})$ est dense dans $\mathbf{H}$, et il en est de même de $(A - \lambda)\mathbb{C}[X]$. Ainsi on peut trouver une suite de polynôme (R_n) telle que $||1 - (X - \lambda) R_n|| \to 0$, c'est à dire, si μ est une solution quelconque du problème :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |1 - (t - \lambda) R_n(t)|^2 d\mu \to 0 \\ \text{d'où} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{t - \lambda} - R_n|^2 d\mu \to 0 \\ \text{et donc} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - \lambda} d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} R_n d\mu \end{array}$$

Or comme R_n est un polynôme, $\int_{\mathbb{R}} R_n d\mu$ ne dépend pas de μ mais uniquement des γ_n. Comme μ est caractérisée de façon unique par ses valeurs sur les $t \longmapsto \frac{1}{t-\lambda}$ d'après le lemme 2, μ est entièrement caractérisée par les γ_n et il y a donc unicité.

Étudions maintenant le cas où A est non essentiellement autoadjoint, c'est à dire $d_+ = 1$.

Lemme 4 *Sous ces hypothèses, pour tout $z \notin \mathbb{R}$,* $\dim \ker(A^* - z) = 1$.

Preuve : On a $(A - \mathrm{Re}(z))^* = A^* - \mathrm{Re}(z)$, ainsi l'opérateur $\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(A - \mathrm{Re}(z))$ n'est pas essentiellement autoadjoint, mais possède une extension autoadjointe donnée par $\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(B - \mathrm{Re}(z))$ où B est une extension autoadjointe de A. Ainsi $\dim \ker(\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(A^* - \mathrm{Re}(z)) - i) = \dim \ker(\frac{1}{\mathrm{Im}(z)}(A^* -$

$\mathrm{Re}(z)) + i)$, c'est à dire $\dim\ker(A^* - z) = \dim\ker(A^* - \overline{z})$. Maintenant si $\ker(A^* - z) = 0$, alors $\Delta(A - \overline{z})$ serait dense dans $\mathbf{H}$, donc $\Delta(\overline{A} - \overline{z}) = \mathbf{H}$ et si $u \in D(A^*)$, $(A^* - \overline{z})u = (\overline{A} - \overline{z})v$ avec $v \in D(\overline{A})$. D'où $(A^* - \overline{z})(u - v) = 0$ et $u = v$. Ainsi $D(A^*) = D(\overline{A})$, ce qui est absurde vu que $\overline{A}$ n'est pas autoadjoint, donc $\dim\ker(A - z) = 1$.

Lemme 5 *Si B et C sont deux extensions autoadjointes de A avec $B \neq C$, alors pour tout $z \notin \mathbb{R}$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_B(t)}{t - z} = \langle P_0, (B - z)^{-1} P_0 \rangle \neq \langle P_0, (C - z)^{-1} P_0 \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_C(t)}{t - z}$$

Preuve : Comme $\ker(A^* - \overline{z}) \neq 0$, il existe $u \neq 0$ dans $\ker(A^* - \overline{z})$. Ainsi $u_0 = \langle P_0, u \rangle \neq 0$ et $P_0 \notin \Delta(\overline{A} - z) = \ker(A^* - \overline{z})^{\perp}$. Donc $(B - z)^{-1} P_0$ et $(C - z)^{-1} P_0$ ne sont pas dans $D(\overline{A})$. S'ils étaient égaux, comme $D(B)/D(\overline{A})$ et $D(C)/D(\overline{A})$ sont de dimension 1, on aurait $D(B) = D(C)$ et $B = C$. Et comme $(B - z)^{-1} P_0 - (C - z)^{-1} P_0 \in \ker(A^* - z)$ et est non nul on a le résultat annoncé par application du lemme 3.

On peut maintenant annoncer notre premier théorème d'unicité :

Théorème 10 *Soit $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de moments définie positive. Le problème des moments associé a une unique solution si et seulement si l'opérateur A associé est essentiellement autoadjoint.*

3.3 Critères d'unicité

Nous allons étudier dans cette section des critères d'unicité plus effectifs que celui de la section précédente.

Introduisons quelques notations. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $\pi(z)$ la suite $(P_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$. On sait que cette suite vérifie une relation de récurrence linéaire $b_n \pi_{n+1}(z) + (a_n - z)\pi_n(z) + b_{n-1}\pi_{n-1}(z) = 0$ avec les conditions initiales $(\pi_{-1}, \pi_0) = (0, 1)$. Ainsi $d_+ = 1$ si et seulement si $\pi(i)$ est dans l^2. On note également $\xi(z)$ la suite $(Q_n(z))_{n \geq 0}$. Elle vérifie la même relation de récurrence linéaire, mais avec les conditions initiales $(\xi_{-1}, \xi_0) = (-1, 0)$. Rappelons que, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$Q_n(z) = \mathcal{S}_X \left(\frac{P_n(X) - P_n(z)}{X - z} \right)$$

Soit μ une solution du problème. On pose $G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} d\mu(t)$ pour $z \in \mathcal{H}_+$. On sait que μ est entièrement déterminée par G_μ d'après le lemme 2.

Théorème 11 *On a*

$$\langle \frac{1}{(x - z)}, P_n(x) \rangle_{L^2(\mu)} = Q_n(z) + G_\mu(z) P_n(z)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |Q_n(z) + G_\mu(z) P_n(z)|^2 \leq \frac{\mathrm{Im} G_\mu(z)}{\mathrm{Im} z}$$

Si μ est une solution de Von Neumann alors il y a égalité.

Preuve : La première égalité résulte de $Q_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{P_n(t) - P_n(z)}{t - z} d\mu(t)$, la seconde de l'inégalité de Bessel et de

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t - z|^2} d\mu(t) = \frac{1}{z - \overline{z}} \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - \overline{z}} \right] d\mu(t)$$

Enfin la dernière affirmation découle du fait que si μ est une solution de Von Neumann, l'espace des polynômes est dense dans $\mathbf{H}$ qui s'identifie alors à $L^2(\mu)$. Ainsi la famille (P_n) est une base hilbertienne de $L^2(\mu)$ et l'égalité est une conséquence de l'égalité de Parseval.

Nous allons maintenant déduire de ce résultat un nouveau critère d'unicité ainsi qu'une vision géométrique des différentes solutions.

Théorème 12 *Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *(i) A n'est pas essentiellement autoadjoint*
- *(ii) la suite $\pi(z)$ est dans l^2*
- *(iii) la suite $\xi(z)$ est dans l^2*
- *(iv) $\pi(z)$ et $\xi(z)$ sont toutes deux dans l^2*

De plus si une de ces conditions est vérifiée, il existe un disque fermé $\mathcal{D}(z)$ contenu dans le même demi-plan que z tel que si μ est une solution du problème des moments, $G_\mu(z)$ soit dans $\mathcal{D}(z)$ et si μ est une solution de Von Neumann, on a de plus $G_\mu(z) \in \partial\mathcal{D}(z)$. En outre tout point de ce disque est un $G_\mu(z)$ pour μ une solution du problème. Ainsi on a unicité au problème si et seulement ce disque est réduit à un point.

Preuve : Si A est essentiellement autoadjoint, alors $\overline{A} = A^*$ et $\ker(A^* - z) = 0$. Réciproquement, on a vu que si A n'est pas essentiellement autoadjoint, $\dim\ker(A^* - z) = 1$. Comme $\ker(A^* - z)$ est réduit à 0 si et seulement si $\pi(z)$ n'est pas dans l^2, on a bien l'équivalence entre (i) et (ii). Posons $\zeta = G_\mu(z)$. L'équivalence entre (ii), (iii) et (iv) vient du fait que $\xi(z) + \zeta\pi(z)$ est toujours dans l^2.
Supposons maintenant une de ces conditions réalisée. En développant l'inégalité du théorème précédent, on arrive à $a|\zeta|^2 + b\zeta + \overline{b\zeta} + c \leq 0$ où $a = ||\pi(z)||_2$, $b = \langle \pi(z), \xi(z)\rangle - \frac{i}{2\mathrm{Im} z}$ et $c = ||\xi(z)||_2$. Il s'agit de l'équation d'un disque, non vide puisqu'il existe des solutions au problème des moments. De plus, les solutions de Von Neumann donnant une égalité, les ζ correspondant à ces solutions sont situés sur le bord du disque. Comme on a vu qu'il existait au moins deux solutions de Von Neumann différentes, le rayon de ce disque est strictement positif.
Soient u et v des bases de $\mathcal{K}_+$ et $\mathcal{K}_-$. Les extensions autoadjointes B de A (donc les solutions de Von Neumann) sont paramétrées par les points θ tels que $u + \theta v$ soit une base de $D(B)$. Ainsi on a une application du cercle dans $\partial\mathcal{D}(z)$ définie par $\theta \longmapsto G_\mu(z)$ où μ est la mesure associée à B_θ.
Montrons que cette application est continue : en posant $(B_1 - z)^{-1}P_0 = w + tu$ où $w \in D(A)$ et $t \in \mathbb{C}$, on a nécessairement $(B_\theta - z)^{-1}P_0 = w + tu + \tau\pi(z)$ d'où si $(B_\theta - z)^{-1}P_0 = w' + t'(u + \theta v)$ et $\pi(z) = w_0 + a_0 u + b_0 v$ avec w', $w_0 \in D(A)$ et a_0, b_0, $t' \in \mathbb{C}$, on a par identification

$$\begin{aligned} w' &= w + \tau w_0 \\ t' &= t + \tau a_0 \\ t'\theta &= \tau b_0 \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application $\theta \longmapsto (B_\theta - z)^{-1}P_0$ est continue.
De plus on a vu que l'application $\theta \longmapsto G_\mu(z) = \langle P_0, (B - z)^{-1}P_0\rangle$ est injective. Il s'agit d'un homéomorphisme du cercle sur son image (incluse dans un cercle), elle est donc surjective dans $\partial\mathcal{D}(z)$ et donc tout point du bord de $\mathcal{D}(z)$ correspond à une solution de Von Neumann. Il nous reste à montrer que tout point du disque correspond à une solution du problème des moments, or si μ et μ' sont deux mesures solutions, $\theta\mu + (1-\theta)\mu'$ l'est aussi pour tout $\theta \in [0, 1]$. Ainsi les points

de toutes les cordes du disque correspondent à des solutions et comme tous les points du cercle correspondent à des solutions de Von Neumann, on en conclut que l'application $\mu \longmapsto G_\mu(z)$ est surjective dans $\mathcal{D}(z)$.

3.4 Solutions de $(\mathcal{F}-z)u=0$ quand $z\in\mathbb{C}$

Nous allons exprimer les solutions de $(\mathcal{F}-z)u=0$ en fonction de celles de $(\mathcal{F}-z_0)u=0$, où z_0 est un nombre complexe fixé. Soit (u_n) une solution de l'équation $(\mathcal{F}-z)u=0$. On cherche à l'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \alpha_n \begin{pmatrix} P_{n+1}(z_0) \\ P_n(z_0) \end{pmatrix} + \beta_n \begin{pmatrix} Q_{n+1}(z_0) \\ Q_n(z_0) \end{pmatrix}$$

Ceci est bien possible car on a $W_n(\pi(z),\xi(z))=-1$, ce qui résulte d'un résultat plus général que voici (qui résulte d'un calcul facile) :

Lemme 6 *Si z et z' sont dans $\mathbb{C}$, on a $W_{n+1}(\pi(z),\xi(z'))=W_{n-1}(\pi(z),\xi(z'))+(z'-z)\pi_n(z)\xi_n(z')$*

Ainsi

$$\alpha_n=b_n(Q_{n+1}(z_0)u_n-Q_n(z_0)u_{n+1}),\quad \beta_n=b_n(u_{n+1}P_n(z_0)-u_nP_{n+1}(z_0))$$

Et du lemme, on obtient les formules de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \alpha_{n-1}+(z-z_0)u_nQ_n(z_0)\\
&= \alpha_{n-1}+(z-z_0)Q_n(z_0)(\alpha_{n-1}P_n(z_0)+\beta_{n-1}Q_n(z_0))\\
\beta_n &= \beta_{n-1}-(z-z_0)P_n(z_0)(\alpha_{n-1}P_n(z_0)+\beta_{n-1}Q_n(z_0))
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = [1+(z-z_0)S_n(z_0)] \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

où

$$S_n(z_0)=\begin{pmatrix} Q_n(z_0)P_n(z_0) & Q_n(z_0)^2 \\ -P_n(z_0)^2 & -P_n(z_0)Q_n(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_n(z_0) \\ -P_n(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_n(z_0) & Q_n(z_0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de trace et de déterminant nuls. De plus, on a $\sum_{n\geq 0}||S_n(z_0)||<\infty$ pour une norme d'algèbre quelconque si $\pi(z_0)$ et $\xi(z_0)$ sont dans l^2 (comme toutes les normes sont équivalentes il suffit de le vérifier pour une norme, par exemple pour la norme d'algèbre induite par $||.||_\infty$). Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème 13 *Soit (γ_n) une famille de moments pour laquelle il existe une solution au problème des moments, et soit A l'opérateur associé. S'il existe $z_0\in\mathbb{C}$ tel que $\pi(z_0)$ et $\xi(z_0)$ soient dans l^2 (et donc toutes les solutions de $\mathcal{F}u=z_0u$), alors pour tout $z\in\mathbb{C}$ les solutions de $\mathcal{F}u=zu$ sont dans l^2 et les applications $z\longmapsto\pi(z)$ et $z\longmapsto\xi(z)$ sont analytiques.*

Preuve : Si on pose $T_n(z,z_0)=(1+(z-z_0)S_n(z_0))...(1+(z-z_0)S_0(z_0))$, on a

$$||T_n(z,z_0)||\leq\prod_{i=0}^{n}(1+||S_i||)\leq\exp(\sum_{i=0}^{n}||S_n||)$$

d'où

$$\sup_{n\geq 0}||T_n(z,z_0)||\leq\exp(|z-z_0|\sum_{n\geq 0}||S_n(z_0)||)<\infty$$

Ainsi si u est une soution de conditions initiales $\begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \beta_{-1} \end{pmatrix}$, on a $\sup_n || \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} ||$ uniformément borné en n par une constante C. Alors $|u_n|^2 \leq C^2(P_n(z_0)^2 + Q_n(z_0)^2)$. Donc u est dans l^2. Enfin l'analycité de $\pi(z)$ et $\xi(z)$ découle de celle des $T_n(z, z_0)$.

L'inégalité $\sum_n ||S_n|| < \infty$ implique également que la suite $(T_n(z, z_0))$ converge uniformément sur tout compact vers un opérateur $T_\infty(z, z_0)$. Ainsi la fonction $z \longmapsto T_\infty(z, z_0)$ est analytique.

Proposition 15 *Si le problème des moments est indéterminé, alors les extensions autoadjointes de A peuvent être classifiées par $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : $D(B_t) = D(\overline{A}) + \mathbb{C}(t\pi(0) + \xi(0))$ et $D(B_\infty) = D(\overline{A}) + \mathbb{C}\pi(0)$.*

Preuve : Montrons d'abord que si $u \notin D(\overline{A})$ est tel que $\langle A^*u, u\rangle = \langle u, A^*u\rangle$, alors la restriction de A^* à $D(\overline{A}) + \mathbb{C}u$ est autoadjointe. Ceci résulte de $\dim D(A^*)/D(A) = 2$. Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A^*(t\pi(z) + \xi(z)) = P_0$, on a bien les deux hypothèses. Réciproquement si B est une extension autoadjointe $D(B)/D(A)$ est de dimension 1. Soit $\ker(B)$ est non nul et $D(B) = D(\overline{A}) + \mathbb{C}\pi(0)$ et $B = B_\infty$, soit $\ker(B) = 0$ et alors $\Delta(B) = \mathbf{H}$. On choisit u dans $D(B)$ tel que $A^*u = P_0$, alors $u \notin D(\overline{A})$, et posons $t = \langle u, \pi(0)\rangle$. Alors $A^*(u - (t\pi(0) + \xi(0))) = 0$ donc appartient à $\ker A^*$. Cependant comme $\langle u - (t\pi(0) + \xi(0)), P_0\rangle = 0$, on a $u = t\pi(0) + \xi(0)$ par le lemme 2. Ainsi toute extension autadjointe de A est de la forme précédente. On obtient ainsi une autre paramétrisation par le cercle des solutions de Von Neumann.

Théorème 14 *Si $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a*

$$\langle P_0, (B_t - z)^{-1}P_0\rangle = -\frac{D(z)t - B(z)}{C(z)t - A(z)}$$

où

$$T_\infty(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix}$$

et les fonctions A, B, C et D sont entières.

Preuve : Un élément u solution de $(A^* - z)u = 0$ est dans $D(B_t)$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} W_n(u, t\pi(0) + \xi(0)) = 0$$

ce qui se traduit par $-\alpha_n + \beta_n t \to 0$. Si l'on pose $\begin{pmatrix} \alpha_\infty \\ \beta_\infty \end{pmatrix} = T_\infty(z) \begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \beta_{-1} \end{pmatrix}$, la condition devient $\alpha_\infty = t\beta_\infty$. De plus remarquons que comme les matrices S_n sont nilpotentes, $\det(T_n(z)) = 1$ et par continuité, $\det(T_\infty(z)) = 1$. Donc $T_\infty(z)$ est inversible, on peut poser

$$\begin{pmatrix} \alpha_{-1} \\ \beta_{-1} \end{pmatrix} = T_\infty(z)^{-1} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors u l'élément de $\mathbf{H}_{-1}$ solution de $(\mathcal{F} - z)u = 0$ de conditions initiales $(u_{-1}, u_0) = (-\beta_{-1}, \alpha_{-1})$. Alors d'après ce qui précède, $u \in D(B_t)$, et $(A^* - z)u = -u_{-1}P_0$ (en oubliant le terme d'indice -1, on peut projeter u dans $l^2(\mathbb{N})$). On a donc :

$$\langle P_0, (B_t - z)^{-1}P_0\rangle = -\frac{u_0}{u_{-1}} = \frac{\alpha_{-1}}{\beta_{-1}}$$

Ceci nous donne le résultat.

3.5 Solutions de Von Neumann dans le cas indéterminé et densité dans L^2

Nous supposerons désormais que nous étudions une suite de moments pour lesquels le problème des moments est indéterminé.

Théorème 15 *Si μ est une solution de Von Neumann (associée à B_t), alors μ est portée par les valeurs propres de B_t. De plus si x est valeur propre de B_t, alors x n'est pas valeur propre de $B_{t'}$ pour $t' \neq t$ et $\mu_t(\{x\}) = \frac{1}{\sum_{n\geq 0}|P_n(x)|^2}$ (μ_t désigne la mesure associée à l'opérateur B_t).*

Preuve: L'application $z \longmapsto -\frac{D(z)t-B(z)}{C(z)t-A(z)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et prend des valeurs réelles sur $\mathbb{R}$. Ainsi μ est portée par les pôles de cette fonction qui correspondent aux valeurs propres de B_t. De plus si x est valeur propre de B_t, on a vu que cette valeur propre est simple. Soit u le vecteur propre associé. L'opérateur $1_{\{x\}}(B_t)$ est la projection orthgonale sur u. D'où

$$\mu_t(\{x\}) = \langle P_0, 1_{\{x\}}(B_t)P_0\rangle = \langle P_0, u\rangle^2$$

En normalisant $\pi(z)$ on obtient

$$\mu_t(\{x\}) = \frac{1}{\sum_{n\geq 0}|P_n(z)|^2}$$

Nous allons maintenant achever cette partie par une caractérisation des mesures μ solutions telles que les polynômes soient denses dans $L^2(\mu)$.

Théorème 16 *Soit μ une solution au problème des moments. Les polynômes sont denses dans $L^2(\mu)$ si et seulement si μ est une solution de Von Neumann.*

Preuve: Notons $F(z)$ l'homographie définie par la matrice $\begin{pmatrix} D(z) & -B(z) \\ -C(z) & A(z) \end{pmatrix}$. Nous avons vu qu'elle envoie bijectivement $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur le bord du disque $\mathcal{D}(z)$. Donc elle envoie soit le demi-plan supérieur soit le demi plan inférieur sur l'intérieur du disque (on pourrait montrer que c'est le demi-plan supérieur en étudiant plus précisément A, B, C et D mais ceci n'intervient pas vraiment). Notons Ω le demi plan envoyé sur l'intérieur du disque. Si μ est une solution au problème des moments, la fonction $F(z)^{-1}(G_\mu(z))$ est holomorphe de $\mathcal{H}_+$ dans Ω. Par le théorème de l'application ouverte, son image est soit un singleton soit un ouvert de Ω. Ainsi si μ n'est pas une solution de Von Neumann, son image n'intersecte pas $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (sinon elle serait constante égale à t et alors $G_\mu = G_{\mu_t}$ d'où $\mu = \mu_t$). Ceci implique que pour tout $z \in \mathcal{H}_+$, $G_\mu(z)$ est dans l'intérieur de $\mathcal{D}(z)$. Ainsi l'égalité de Parseval n'est pas vérifiée et donc $\frac{1}{t-z}$ n'est pas dans l'adhérence des polynômes pour tout $z \in \mathcal{H}_+$. On a déjà montré précédemment la réciproque.

4 Quelques exemples

Nous présentons ici quelques exemples de suites qui sont ou non des suites de moments. Nous supposons toujours que $\gamma_0 = 1$.

4.1 La suite $\gamma_n = \lambda$

Le critère simple assure que s'il y a une solution, elle est unique.

Cette suite n'est pas définie positive ($D_3 = 0$). La seule possibilité est donc que la mesure correspondante soit une somme finie de mesures de Dirac. Le problème revient donc à chercher s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $(\alpha_k)_{k=1\ldots m} \in (\mathbb{R}^+)^m$ tels que $\sum_{k=1}^m \alpha_k = 1$ et $(a_k)_{k=1\ldots m} \in (\mathbb{R})^m$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (a_k)^n = \lambda.$$

Par exemple en regardant la comportement à l'infini, on voit que la seule possibilité est

$$\mu = (1 - \lambda)\delta_0 + \lambda\delta_1$$

(ce qui impose $\lambda \leq 1$ pour que cette mesure soit une mesure de probabilités).

4.2 La suite $\gamma_n = \frac{1}{n+1}$

Une solution est la mesure uniforme sur $[0, 1]$

Le critère simple assure encore une fois l'unicité de cette solution.

4.3 La suite $\gamma_n = n!$

Une solution est la loi exponentielle, de densité $\exp(-x)1_{\mathbb{R}^+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^+} u^n e^{-u} du = \Gamma(n + 1) = n!$$

Le critère simple assure encore une fois l'unicité de cette solution.

4.4 La loi gaussienne

Considérons la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

par rapport à la mesure de Lebesgue, et calculons ses moments. Cette mesure étant symétrique, $\gamma_n = 0$ si n est impair. Et si $n = 2k$:

$$\gamma_n = \int_{\mathbb{R}} u^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}) du = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} t^{k-1/2} \exp(-\frac{t}{2}) dt$$

(changement de variables $t = u^2$). Donc

$$\gamma_n = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \ldots \frac{3}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \ldots \frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{n!}{2^{n+1/2}(n/2)!}.$$

Le critère simple assure l'unicité.

4.5 Un exemple de non-unicité

Voici un exemple de non unicité pour le problème des moments, exemple dû à Stieljes. Considérons la loi "log-normale", c'est à dire la loi de $\exp(N)$ quand N suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, de densité $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{t}\exp(-\frac{(\ln t)^2}{2})1_{]0,\infty[}(t)$. Le changement de variable $x = \ln(t) - k$ nous donne :

$$\int_0^\infty t^k \sin(2\pi\ln(t)) f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{k^2}{2})\int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2})\sin(2\pi x)\, dx = 0$$

Ainsi les mesures de densités $f(t)(1+\theta\sin(2\pi\ln(t)))$ pour $\theta \in]-1,1[$ ont les mêmes moments. Ces moments sont :

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{k^2}{2})\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{x^2}{2})\, dx \\ &= \exp(\frac{k^2}{2})\end{aligned}$$

Au passage, remarquons que ces mesures sont diffuses. Ce ne sont donc pas des solutions de Von Neumann. Ainsi l'espace des polynômes n'est pas dense dans L^2 pour ces mesures.

Références

[1] N. I. Akhiezer : *The classical moment problem*, Oliver & Boyd 1961

[2] N. I. Akhiezer, I. M. Glazman : *Theory of linear operators in Hilbert space*, 1961 - 1963

[3] B. Simon : *The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator*, 1999

[4] P. Billingsley : *Probability and measure*, John Wiley & sons 1986:

[5] M. Reed, B. Simon : *Methods of modern mathematical physics*, Academic Press 1975

[6] P. R. Halmos : *Introduction to Hilbert space*, Chelsea publishing company 1951