THÉORIE HOMOTOPIQUE DES S-SCHÉMAS

par

Joël Riou

Table des matières

Le texte qui suit a pour but premier de comparer la topologie (algébrique) et la géométrie algébrique, c'est-à-dire de mettre en évidence ce qui les rapproche mais aussi ce qui les distingue. Cette comparaison débouche sur la notion de motif qui permet d'aborder mon thème de recherche.

1. Comparaison entre la topologie et la géométrie algébrique

1.1. Cas de la topologie. — Par définition, la topologie algébrique a pour objet principal d'associer à des espaces topologiques des invariants sous forme d'objets algébriques : nombres, groupes (abéliens), algèbres... Le mot « invariant » signifie ici qu'à deux espaces topologiques homéomorphes doivent correspondre les mêmes nombres, des groupes isomorphes...

L'invariant le plus rudimentaire d'un espace topologique est le nombre de ses composantes connexes (par arcs). Un invariant plus raffiné est donné par le groupe fondamental : si (X, x) est un espace topologique pointé, l'ensemble des classes d'homotopie de lacets dans (X, x) est muni d'une structure de groupe, on le note $\pi_1(X, x)$. Plus précisément, un lacet de (X, x) est une application continue $\gamma\colon [0, 1] \to X$ envoyant 0 et 1 sur x, deux lacets γ et γ' sont dits homotopes s'il existe une application continue $H\colon [0, 1] \times [0, 1] \to X$ telle que, si pour tout $t \in [0, 1]$, on note $H_t\colon [0, 1] \to X$ l'application $\tau \longmapsto H(t, \tau)$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, H_t est un lacet de (X, x) et $H_0 = \gamma$, $H_1 = \gamma'$. Autrement dit, on peut déformer γ pour obtenir γ' sans toucher aux extrémités de ces chemins. La concaténation des chemins définit une loi sur l'ensemble des lacets, qui en fait un groupe une fois que l'on quotiente par la relation d'homotopie. Il est clair que toute application continue pointée $(X, x) \to (Y, y)$ entre espaces topologiques pointés induit un morphisme de groupes $\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$: on dit que le groupe fondamental est un foncteur *covariant* de la catégorie des espaces topologiques pointés vers celle des groupes. En particulier, deux espaces topologiques pointés isomorphes (c'est-à-dire que l'on dispose d'un homéomorphisme préservant les points marqués) ont des groupes fondamentaux isomorphes.

La notion d'homotopie se généralise de la manière suivante : on dit de deux applications continues pointées $f, g\colon (X, x) \to (Y, y)$ qu'elles sont homotopes s'il existe une application continue $H\colon [0,1] \times X \to Y$ telle qu'avec les notations précédentes $H_0 = f$, $H_1 = g$ et que, pour tenir compte des points-bases, $H(t, x) = y$ pour tout $t \in [0,1]$.

Une des vertus du groupe fondamental π_1 (et de l'ensemble π_0 des composantes connexes d'un espace topologique) réside dans l'invariance par homotopie : deux applications continues pointées homotopes $f, g\colon (X, x) \to (Y, y)$ entre espaces topologiques pointés induisent le même morphisme $\pi_1(f) = \pi_1(g)\colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, y)$.

1.1.1. Invariants abéliens. — Nous allons nous intéresser de plus près aux invariants abéliens des espaces topologiques, que nous supposerons dorénavant vérifier quelques hypothèses raisonnables (on peut ainsi ne s'intéresser qu'à ces espaces que l'on appelle CW-complexes), et nous appellerons simplement « espaces » de tels espaces topologiques. Pour définir correctement les invariants abéliens, il convient de définir la suspension.

Définition 1.1. — Si X est un espace pointé, on note ΣX la suspension de X : si x et $\star$ sont respectivement les points-bases de X et de S^1, ΣX s'obtient à partir de l'espace topologique $X \times \mathrm{S}^1$ en quotientant par la relation d'équivalence consistant à contracter le sous-ensemble $X \times \{\star\} \cup \{x\} \times \mathrm{S}^1$ en un point : le point-base de ΣX.

On note S^0 un espace topologique pointé discret ayant deux élements. On remarque que la sphère S^n de dimension n est la n-ième suspension de S^0.

Pour simplifier certains énoncés, nous nous limitons aux théories cohomologiques à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels :

Définition 1.2. — Une théorie cohomologique est un foncteur contravariant $\tilde{\mathbf{H}}^\star$ de la catégorie des espaces topologiques pointés à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod :

- **C1 :** Deux applications continues pointées f et g homotopes induisent le même morphisme $\tilde{\mathbf{H}}^\star(f) = \tilde{\mathbf{H}}^\star(g)$;
- **C2 :** On dispose d'un isomorphisme fonctoriel $\tilde{\mathbf{H}}^{\star+1}(\Sigma X) \simeq \tilde{\mathbf{H}}^\star(X)$;
- **C3 :** Pour toute application continue pointée $f\colon X \to Y$ entre espaces, les morphismes canoniques donnent naissance à une suite exacte d'espaces vectoriels gradués :

$$\tilde{\mathbf{H}}^\star(\text{cône}(f)) \xrightarrow{\eta_f} \tilde{\mathbf{H}}^\star(Y) \xrightarrow{f} \tilde{\mathbf{H}}^\star(X)$$

  où cône(f) est l'espace topologique obtenu en quotientant $X \times [0,1] \bigsqcup Y \bigsqcup \{\star\}$ par la relation d'équivalence $\sim$ engendrée par $X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times [0,1] \cup \{y_0\} \sim \star$, où x_0 et y_0 sont les points-bases respectifs de X et de Y, et par $(x, 1) \sim f(x)$ pour tout $x \in X$; η_f désigne l'application évidente $Y \to \text{cône}(f)$;

C4 : Pour toute famille d'espaces pointés $(X_i)_{i\in I}$, l'application canonique

$$\tilde{\mathbf{H}}^{\star}(\vee_{i\in I}X_i) \to \prod_{i\in I}\tilde{\mathbf{H}}^{\star}(X_i)$$

est un isomorphisme où $\vee_{i\in I}X_i$ est le bouquet des espaces pointés X_i (on prend l'union disjointe et on identifie tous les points-bases).

L'axiome C1 est l'invariance par homotopie, l'axiome C2 est appelé axiome de suspension. L'axiome C3 est fondamental, il permet notamment de faire de nombreux calculs explicites. L'axiome C4 résume seulement une compatibilité évidente de la cohomologie avec les sommes directes ; c'est un axiome néanmoins crucial pour la démonstration du théorème de représentabilité de Brown que nous énoncerons plus tard.

On a le théorème d'unicité suivant :

Théorème 1.3 **(Eilenberg-Steenrod)**. — *Il existe (à isomorphisme unique près) une unique théorie cohomologique $\tilde{\mathbf{H}}^{\star}$ sur les espaces pointés telle que l'axiome de dimension suivant soit vérifié :*

C5 : $\tilde{\mathbf{H}}^q(\mathrm{S}^0) = 0$ *si* $q \neq 0$ *et* $\tilde{\mathbf{H}}^0(\mathrm{S}^0)$ *est muni d'un isomorphisme avec le groupe* $\mathbb{Q}$.

La théorie cohomologique en question s'appelle la *cohomologie singulière* que l'on peut définir en utilisant beaucoup d'autres méthodes, nous reviendrons sur ce constat plus loin. Les propriétés suivantes de la cohomologie singulière sont une conséquence assez classique des axiomes :

Lemme 1.4. — *Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$, $\tilde{\mathbf{H}}^q(\mathrm{S}^n)$ est nul si $q \neq n$ et isomorphe à $\mathbb{Q}$ si $q = n$. Pour toute variété différentiable compacte pointée M, les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\tilde{\mathbf{H}}^q(M)$ sont de dimension finie pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et nuls pour presque tout q.*

Remarque 1.5. — On pourrait évidemment définir la cohomologie singulière à valeurs dans un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel V quelconque, non nécessairement de dimension 1, on notera $\mathbf{H}^{\star}(X, V)$ de tels groupes de cohomologie.

1.1.2. Exemple : K-théorie topologique. — Nous allons définir la K-théorie topologique en utilisant les grassmanniennes. Soient $d, r \in \mathbb{N}$. On peut considérer l'espace $V_{d,r} = \mathbb{C}^{d(d+r)}$ que l'on identifie à l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires $\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^{d+r}$. On peut considérer l'ouvert $U_{d,r}$ de $V_{d,r}$ formé des applications linéaires injectives de $\mathbb{C}^d$ dans $\mathbb{C}^{d+r}$. Le groupe $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$ agit naturellement à droite sur V_{d+r} *via* l'action sur $\mathbb{C}^d$, en laissant stable $U_{d,r}$. On note $\mathrm{Gr}_{d,r}$ le quotient $U_{d,r}/\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$ qui est évidemment muni d'une structure de variété différentiable. $\mathrm{Gr}_{d,r}$ s'identifie à l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{d+r}$ de dimension d. On dispose d'immersions fermées canoniques $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d,r+1}$ et $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{1+d,r}$ la première consistant à envoyer un sous-espace vectoriel W de $\mathbb{C}^{d+r}$ sur son image par l'inclusion évidente $\mathbb{C}^{d+r} \to \mathbb{C}^{d+r+1}$ et la seconde consistant à envoyer un tel W sur $\mathbb{C} \oplus W$ grâce à l'identification $\mathbb{C}^{1+d+r} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{d+r}$.

Définition 1.6. — Pour tout entier $d \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{Gr}_{d,\infty}$ la limite inductive des $\mathrm{Gr}_{d,r}$ pour $r \in \mathbb{N}$. Enfin, on note $\mathrm{Gr}_{\infty,\infty}$ la limite inductive des $\mathrm{Gr}_{d,\infty}$ pour $d \in \mathbb{N}$.

On peut faire le même passage à la limite pour les $U_{d,r}$. Ainsi, pour tout $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on a une action libre de $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$ sur $U_{d,\infty}$.

Définition 1.7. — Si X est un espace topologique pointé, on note ΩX l'espace des lacets de X : c'est l'ensemble des applications continues pointées $\mathrm{S}^1 \to X$ muni de la topologie de la convergence compacte.

Dans une catégorie convenable d'espaces topologiques pointés, Ω est le foncteur adjoint à droite de Σ.

Lemme 1.8. — *Pour tout entier $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $U_{d,\infty}$ est contractile. L'espace quotient $\mathrm{Gr}_{d,\infty} = U_{d,\infty}/\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$ est ce que l'on appelle un classifiant du groupe topologique $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$. On peut ainsi poser*

$$\mathrm{B}\mathbf{GL}_d(\mathbb{C}) = \mathrm{Gr}_{d,\infty}$$

et on a alors :

$$\Omega(\mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C})) \simeq \mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C})$$

***Théorème 1.9* (Bott).** — *Il existe une équivalence d'homotopie canonique*

$$\beta \colon \mathbb{Z} \times \mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \Omega^2(\mathbb{Z} \times \mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C}))$$

Définition 1.10. — On pose $\mathsf{K}_n = \mathbb{Z} \times \mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C})$ si n est un entier naturel pair et $\mathsf{K}_{n+1} = \Omega(\mathbb{Z} \times \mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C}))$ si n est un entier naturel impair. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une application continue pointée $\sigma \colon \mathsf{K}_n \to \Omega\mathsf{K}_{n+1}$ de la façon suivante : si n est pair, c'est l'application de Bott β et si n est impair, c'est l'identité.

Définition 1.11. — Un spectre E est une suite d'espaces pointés $(\mathsf{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ munis de morphismes d'assemblage $\sigma \colon \mathsf{E}_n \to \Omega\mathsf{E}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que E est un Ω-spectre si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \colon \mathsf{E}_n \to \Omega\mathsf{E}_{n+1}$ est une équivalence d'homotopie.

Ainsi, K est un spectre, et même un Ω-spectre. Par ailleurs, il existe une manière naturelle d'associer un spectre $\Sigma^\infty X$ (souvent noté abusivement X) à un espace pointé X. En effet, on peut poser $\mathsf{X}_n = \Sigma^n X$ et définir le morphisme d'assemblage $\Sigma^n X = \mathsf{X}_n \to \Omega\mathsf{X}_{n+1} = \Omega\Sigma^{n+1}X$ en prenant le morphisme adjoint de l'identité de $\Sigma^{n+1}X$. On pose alors $\Sigma^\infty X = \mathsf{X}$.

Venons-en maintenant à la théorie cohomologique représentée par un spectre.

Définition 1.12. — Soit E un spectre. Pour tout espace pointé X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on pose $\tilde{\mathsf{E}}^n(X) = [X, \mathrm{colim}_{q \geq 0,n}\, \Omega^{q-n}\mathsf{E}_q]$ où $[A, B]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues pointées $A \to B$ si A et B sont deux espaces pointés. Si X vérifie une certaine propriété de finitude, on a des isomorphismes canoniques

$$\tilde{\mathsf{E}}^n(X) = \mathrm{colim}_{q \geq 0,n} \left[X, \Omega^{q-n}\mathsf{E}_q\right] = \mathrm{colim}_{q \geq 0,n} \left[\Sigma^{q-n}X, \mathsf{E}_q\right]$$

Si X est un espace, on pose $X_+ = X \sqcup \{\star\}$ que l'on pointe par $\star$, et on définit $\mathsf{E}^n(X) = \tilde{\mathsf{E}}^n(X_+)$. On dit que les foncteurs $\tilde{\mathsf{E}}^\star(-)$ forment la théorie cohomologique représentée par le spectre E.

En utilisant les résultats de base de la topologie algébrique, on peut en effet montrer que les foncteurs ainsi construits forment une théorie cohomologique (à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens). L'avantage des Ω-spectres est que dans le système inductif qui calcule la théorie cohomologique associée à un Ω-spectre, les flèches sont des isomorphismes ; par ailleurs, on peut remplacer tout spectre par un Ω-spectre représentant la même théorie cohomologique. On a de plus le théorème suivant, appelé théorème de représentabilité de Brown :

***Théorème 1.13* (Brown).** — *Toute théorie cohomologique (*i.e. *des foncteurs satisfaisant les axiomes* **C1**, **C2**, **C3** *et* **C4** *sus-mentionnés) est isomorphe à la théorie cohomologique représentée par un spectre.*

Définition 1.14. — On définit la K-théorie topologique comme étant la théorie cohomologique représentée par le spectre $\mathbf{K}$, et on pose

$$\mathsf{K}_n(X) = \mathsf{K}^{-n}(X)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout espace X.

Le lemme suivant fait le lien entre cette définition de la K-théorie topologique et le groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels complexes :

Lemme 1.15. — *Si X un espace compact, alors $\mathsf{K}_0(X)$ s'identifie au groupe de Grothendieck des fibrés vectoriels complexes sur X, autrement dit, $\mathsf{K}_0(X)$ est le groupe abélien symétrisé du monoïde (pour la somme directe) des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels complexes sur X.*

L'ingrédient technique principal de la démonstration consiste à montrer que sur un espace compact, tout fibré vectoriel complexe est facteur direct d'un fibré trivial. Le lemme suivant est une conséquence relativement facile du théorème de Bott.

Lemme 1.16. — *Pour tout entier relatif n, $\tilde{\mathsf{K}}_n(\mathrm{S}^0) = 0$ si n est impair et si n est pair, alors $\tilde{\mathsf{K}}_n(\mathrm{S}^0) \simeq \mathbb{Z}$.*

Remarque 1.17. — Comme dans cette introduction on s'intéresse surtout aux théories cohomologiques à coefficients dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels, on admettra qu'il existe un spectre $\mathsf{K} \otimes \mathbb{Q}$ dont la théorie cohomologique associée $\tilde{\mathsf{K}}^\star(-;\mathbb{Q})$ soit à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels et soit telle que pour tout espace pointé X *de type fini* (par exemple une variété différentiable compacte à bord), alors $\tilde{\mathsf{K}}^\star(X;\mathbb{Q}) = \tilde{\mathsf{K}}^\star(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Ainsi, on remarque que la K-théorie topologique ne vérifie certainement pas l'axiome de la dimension : c'est une théorie cohomologique qui n'est pas « ordinaire ».

Remarque 1.18. — Grâce à la décomposition de Cartan du groupe de Lie $\mathbf{GL}_d(\mathbb{C})$, on voit que l'on obtiendrait la même théorie en considérant l'espace $\mathrm{B}\mathbf{U}_\infty$ plutôt que $\mathrm{B}\mathbf{GL}_\infty(\mathbb{C})$, où $\mathbf{U}_d$ désigne le groupe unitaire et $\mathbf{U}_\infty$ la limite inductive de ces groupes topologiques pour les inclusions évidentes.

1.1.3. Décomposition des théories cohomologiques. —

Définition 1.19. — Un morphisme de spectres $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une équivalence stable si le morphisme induit au niveau des théories cohomologiques associées à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ est un isomorphisme.

Remarque 1.20. — Il suffit de « tester » les théories cohomologiques sur la sphère S^0 pour vérifier que l'on a affaire à une équivalence stable. Comme on néglige ici la torsion, on dit qu'un morphisme de spectres $\mathbf{E} \to \mathbf{F}$ est une équivalence stable $\otimes\mathbb{Q}$ si, au niveau des théories cohomologiques représentées par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$, on obtient un isomorphisme après tensorisation avec $\mathbb{Q}$ en les évaluant sur la sphère S^0.

Définition 1.21. — On note $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$ la catégorie obtenue en inversant *formellement* les équivalences stables $\otimes\mathbb{Q}$. On l'appelle la catégorie homotopique stable $\otimes\mathbb{Q}$.

On peut montrer que $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}$ est une catégorie triangulée admettant des sommes directes arbitraires et que si E est un spectre et X un espace pointé de type fini, alors $\tilde{\mathsf{E}}^n(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}}}(\Sigma^\infty X, \mathsf{E}[n])$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $-[1]$ désignant le foncteur de décalage.

***Théorème 1.22* (Atiyah-Hirzebruch).** — *Pour tout spectre* E *et tout espace pointé* X*, il existe un isomorphisme canonique, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*, où l'on note* $\tilde{\mathsf{E}}$ *la théorie cohomologique représentée par* E *:*

$$\tilde{\mathsf{E}}^n(X) = \prod_{q \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathbf{H}}^{n-q}(X, \tilde{\mathsf{E}}^q(\mathrm{S}^0))$$

Remarque 1.23. — Si on n'avait pas négligé la torsion, on aurait seulement obtenu une suite spectrale dite d'Atiyah-Hirzebruch. La moralité de ce théorème est qu'en topologie, à décalage près, il existe essentiellement une unique théorie cohomologique à valeurs dans les $\mathbb{Q}$-vectoriels : la cohomologie singulière. De plus, il n'y a pas plus de morphismes entre théories cohomologiques à coefficients rationnels que ceux que l'on imagine.

En particulier, on a le résultat suivant :

Proposition 1.24. — *Pour tout espace pointé* X*, on a les isomorphismes suivants, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\mathsf{K}_n(X; \mathbb{Q}) = \prod_{q \in \mathbb{Z}} \mathbf{H}^{2q-n}(X; \mathbb{Q})$$

1.2. Cas de la géométrie algébrique. — On fixe un corps de base k. En remplaçant la notion d'espace topologique par celle de faisceau d'ensembles simpliciaux sur le site des schémas lisses sur k pour la topologie de Nisnevich et l'intervalle $[0,1]$ par la droite affine $\mathbb{A}^1$, on peut refaire l'essentiel des constructions de la section précédente : c'est la théorie homotopique des schémas de Fabien Morel et Vladimir Voevodsky (cf. [**Voe**] et [**DEA**]).

Essayons d'abord de mettre en évidence les similitudes et les différences entre les deux théories. La première différence est qu'en géométrie algébrique, il existe plusieurs cercles : le cercle simplicial S^1_s (le même qu'en topologie) et le cercle de Tate $\mathrm{S}^1_t = (\mathbb{G}_m, 1)$. On peut montrer que la droite projective $(\mathbb{P}^1, \infty)$ est le smash-produit de ces deux cercles, confirmant l'intuition selon laquelle $\mathbb{P}^1$ est une sphère de dimension 2.

Ainsi, *a priori*, les théories cohomologiques sont $\mathbb{Z}^2$-graduées et non seulement $\mathbb{Z}$-graduées. Quand on tient compte de cette différence, on peut tout à fait suivre pas à pas la construction de la K-théorie topologique pour construire un spectre représentant la K-théorie algébrique (cf. [**MV**] et [**DEA**, corollaire 7.20]). Le théorème de périodicité de Bott se traduit ici par $\mathsf{K}_n(\mathbb{P}^1 \times X) \simeq \mathsf{K}_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\mathscr{O}(1)]/([\mathscr{O}(1)] - 1)^2$ pour tout schéma X de type fini, séparé et lisse sur k, ce qui est un cas particulier du théorème du fibré projectif de Quillen (cf. [**Qui**]).

Par exemple, si ℓ est un nombre premier différent de l'exposant caractéristique de k, la cohomologie étale ℓ-adique $\mathbf{H}^p_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Z}_\ell(q))$ d'une variété algébrique X sur k est bien une $\mathbb{Z}_\ell$-algèbre bigraduée, où $-(1)$ désigne le twist avec les racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ ; par ailleurs, cette théorie cohomologique est représentée par un spectre (cf. [**DEA**, théorème 8.57]).

Une autre différence notable avec la topologie est que la cohomologie d'une variété algébrique vient avec des structures plus riches qu'en topologie. Ainsi, dans l'exemple de la cohomologie étale ci-dessus les groupes de cohomologie sont munis d'une action évidente du groupe de Galois absolu de k. En outre, si k est de caractéristique 0 et muni d'un plongement complexe

σ, alors on peut considérer la théorie cohomologique $X \longmapsto \mathbf{H}^p(X(\mathbb{C})_\sigma;\mathbb{Z})$. D'après Deligne (cf. [**Del**]), ces groupes de cohomologie sont munis d'une structure de Hodge, pure de poids p si X est projective et lisse (puisqu'alors $X(\mathbb{C})_\sigma$ sera une variété kählérienne compacte).

Par ailleurs, on peut aussi considérer, si k est de caractéristique 0, la cohomologie de de Rham algébrique $X \longmapsto \mathbf{H}^n(X_{\mathrm{Zar}};\Omega^\bullet_{X/k})$. Si $k=\mathbb{Q}$, la cohomologie singulière à coefficients rationnels des points complexes et la cohomologie de de Rham algébrique sont deux théories cohomologiques à valeurs dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-vectoriels de dimension finie sur les schémas de type fini et lisses sur $\mathbb{Q}$, cependant elles ne sont pas isomorphes fonctoriellement, elles ne le deviennent qu'après tensorisation avec $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{Q}$, en vertu d'un théorème de comparaison de Grothendieck qui s'énonce uniquement en termes de géométrie algébrique complexe :

Théorème 1.25 **(Grothendieck, [Grot]).** — *Soit X un schéma de type fini, lisse et séparé sur $\mathbb{C}$. Alors, on a un isomorphisme canonique $\beta_X\colon \mathbf{H}^\star(X_{\mathrm{Zar}};\Omega^\bullet_{X/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^\star(X(\mathbb{C});\mathbb{C})$ où le deuxième groupe désigne la cohomologie singulière à coefficients complexes.*

Démonstration. — On peut montrer sans difficulté que le morphisme β_X est un morphisme de théories cohomologiques provenant d'un morphisme de spectres $\beta\colon \mathsf{H}^{\mathrm{alg}}_{\mathrm{dR}} \to \mathsf{H}^{\mathrm{diff}}_{\mathrm{dR}}$ dans la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}(\mathbb{C})$ de Morel et Voevodsky, analogue en géométrie algébrique de la catégorie homotopique stable $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}$. On sait que dans $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}$, pour vérifier qu'un morphisme entre spectres induit une équivalence au niveau de la théorie cohomologique associée, il suffit de le tester sur les sphères ; en géométrie algébrique, il faut le faire sur toutes les variétés lisses sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire ce que dit précisément le théorème. Néanmoins, grâce à la résolution des singularités de Hironaka et à quelques théorèmes fondamentaux de la théorie homotopique des schémas (triangles distingués de Mayer-Vietoris et de pureté homotopique), on peut montrer qu'il suffit en fait de le vérifier dans le cas où X est une variété projective et lisse sur $\mathbb{C}$, et alors cela résulte du théorème (GAGA) de Serre sur la cohomologie des faisceaux cohérents sur une variété projective sur $\mathbb{C}$. □

Remarque 1.26. — Dans sa démonstration originelle, Grothendieck procédait différemment. Cette méthode a l'avantage de faire découler naturellement ce résultat d'un principe général interne à la théorie homotopique des schémas disant que la catégorie des objets de présentation finie de $\mathbf{SH}(\mathbb{C})$ est engendrée, en un certain sens, par les variétés projectives lisses sur $\mathbb{C}$, de même que la catégorie triangulée des objets de présentation finie de $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}$ est engendrée par S^0.

Ainsi, en géométrie algébrique, il existe de nombreuses manières de « réaliser » la cohomologie d'une variété algébrique : dans ce contexte, le théorème 1.22 devrait être formulé d'une tout autre manière pour avoir une chance d'être vrai. En topologie, on a vu qu'il y avait une équivalence de catégories $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}_{\mathbb{Q}} \simeq (\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}})^{\mathbb{Z}}$ qui provient en fait d'une adjonction entre $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}}$ et $\mathsf{D}(\mathrm{Ab})$ au niveau « entier » où $\mathsf{D}(\mathrm{Ab})$ désigne la catégorie dérivée de la catégorie des groupes abéliens, le foncteur $\mathbf{SH}^{\mathrm{top}} \to \mathsf{D}(\mathrm{Ab})$ étant induit par le foncteur qui à un espace topologique pointé associe le complexe calculant son homologie singulière. La question se pose donc de savoir ce qui peut remplacer la catégorie des groupes abéliens (ou sa catégorie dérivée) en géométrie algébrique.

2. La notion de motif

On fixe toujours un corps k. La notion de motif est originellement due à Alexander Grothendieck : *conjecturalement* la catégorie des motifs *mixtes* serait une catégorie abélienne dans laquelle devrait prendre ses valeurs une certaine théorie cohomologique « universelle ». D'une certaine manière, cette notion devrait être le bon analogue des groupes abéliens intervenant comme coefficients des théories cohomologiques en topologie. Pourvu que l'on considère des coefficients rationnels, les objets de cette catégorie devraient être munis d'une filtration par le poids(1) dont les objets gradués devraient s'identifier à des motifs purs pour l'équivalence numérique tels que définis par Grothendieck.

À l'heure actuelle, il existe des définitions inconditionnelles d'une catégorie triangulée $\mathbf{DM}(k)$, au moins si k est un corps parfait, dont on espère qu'elle admet une t-structure(2) motivique dont le cœur serait la catégorie des motifs mixtes sur k, pour laquelle il existe aussi des candidats si k est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (Nori).

Une des constructions de $\mathbf{DM}(k)$ se trouve dans le livre [**VSF**]. L'idée de base est de partir de la catégorie des variétés lisses sur k que l'on a rendu additive en considérant non pas des morphismes de variétés comme morphismes dans cette nouvelle catégorie, mais des combinaisons linéaires à coefficients entiers de correspondances (cf. [**DEA**, chapitre 8] pour plus de détails sur cette construction).

Considérons les choses d'un point de vue axiomatique. On note $\mathbf{M}$ le foncteur qui à une variété algébrique lisse sur k associe son motif dans $\mathbf{DM}(k)$. On note $\mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}(0)$) le motif du point *i.e.* de $\operatorname{Spec} k$. On peut définir un autre motif $\mathbb{Z}(1)$ comme étant $\tilde{\mathbf{M}}(\mathbb{P}^1)[-2]$ où $\tilde{\mathbf{M}}$ est le foncteur « motif réduit » (analogue de la cohomologie singulière réduite pour les espaces pointés). En effet, pour toute théorie cohomologique raisonnable (par exemple, la cohomologie étale ℓ-adique), la cohomologie de la droite projective est concentrée en degrés 0 et 2, donc si on enlève la partie de degré 0, il ne reste qu'un groupe de cohomologie en degré 2. $\mathbb{Z}(1)$ est appelé le motif de Tate. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ où $\otimes$ est le produit tensoriel dans $\mathbf{DM}(k)$: en effet, on exige l'existence d'une formule de Künneth se traduisant par $\mathbf{M}(X \times Y) = \mathbf{M}(X) \otimes \mathbf{M}(Y)$ pour deux variétés lisses X et Y. Comme $\mathbb{Z}(1)$ est censé être de « dimension 1 », on peut définir $\mathbb{Z}(n) = \mathbb{Z}(1)^{\otimes n}$ même pour $n < 0$.

2.1. Cohomologie motivique.

— On peut alors définir la cohomologie motivique :

Définition 2.1. — Pour toute variété lisse X sur k, on appelle cohomologie motivique de X les groupes suivants :

$$\mathbf{H}^p(X; \mathbb{Z}(q)) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbb{Z}(q)[p])$$

Certaines conjectures de Beilinson visant à définir la cohomologie motivique ont été établies (cf. l'introduction de [**VSF**]) : la cohomologie motivique peut se réaliser comme la cohomologie

(1)Dans l'article [**GS**, Théorème 3], Gillet et Soulé construisent une filtration « par le poids » sur les groupes de cohomologie à support compact à coefficients dans un anneau A quelconque d'une variété X sur le corps des nombres complexes. Cette filtration coïncide avec la filtration par le poids étudiée par Deligne dans [**Del**] dans le cas $A = \mathbb{Q}$.

(2)Rappelons qu'une t-structure sur une catégorie triangulée est essentiellement une manière de « filtrer » les objets de sorte que les objets « centrés » par rapport à la t-structure, c'est-à-dire les objets du cœur, forment une catégorie abélienne. L'exemple le plus trivial de t-structure est la t-structure évidente sur la catégorie dérivée $\mathsf{D}(\mathscr{A})$ d'une catégorie abélienne $\mathscr{A}$. Dans cet exemple, le cœur s'identifie à $\mathscr{A}$ puisqu'il est constitué des complexes n'ayant de la cohomologie qu'en degré 0.

Zariski de X à valeurs dans des complexes de faisceaux que l'on peut encore noter $\mathbb{Z}(q)$, ce qui est conforme aux notations de la définition précédente ! Il convient donc d'essayer de décrire les complexes de faisceaux $\mathbb{Z}(q)$.

Théorème 2.2. — *$\mathbb{Z}(0)$ s'identifie au faisceau Zariski contant $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}(1)$ est quasi-isomorphe à $\mathbb{G}_m[-1]$. De plus, pour $q < 0$, $\mathbb{Z}(q)$ est quasi-isomorphe à 0.*

Ainsi, $\mathbf{H}^p(X; \mathbb{Z}(0))$ est nul pour $p \neq 0$ et isomorphe à $\mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$ si $p = 0$; $\mathbf{H}^p(X; \mathbb{Z}(1)) = \mathscr{O}_X(X)^\times$ si $p = 1$, $\mathrm{Pic}(X)$ si $p = 2$ et 0 pour les autres valeurs de p.

Le bon analogue de la proposition 1.24 découlant de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch consiste en le théorème suivant :

***Théorème 2.3* (Grothendieck-Bloch-Lichtenbaum-Friedlander-Suslin-Levine)**
Soit X une variété projective lisse sur un corps (parfait) k, il existe une suite spectrale

$$\mathrm{E}_2^{pq} = \mathbf{H}^p(X; \mathbb{Z}(q)) \Longrightarrow \mathsf{K}_{2q-p}(X)$$

où les différentielles sur E_r sont de bidegré $(r-1, 2r-1)$. De plus, les différentielles de cette suite spectrale sont de torsion.

2.2. Théorèmes de finitude. — Une des difficultés avec la cohomologie motivique réside dans l'absence de théorèmes de finitude généraux. Une conjecture de Bass affirme cependant que les groupes de K-théorie algébrique des anneaux réguliers de type fini sur $\mathbb{Z}$ sont de type fini. Cette conjecture implique par exemple que si X est une variété lisse sur un corps fini, alors tous les groupes de cohomologie motivique de X à coefficients rationnels sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ grâce à la suite spectrale énoncée à la fin du numéro précédent.

On a néanmoins le théorème suivant qui résulte de travaux de nombreux auteurs (Mordell, Weil, Néron, Severi, Hironaka, Tate, ...) concernant principalement l'étude des variétés abéliennes :

Théorème 2.4. — *Soit X un schéma régulier, de type fini sur $\mathbb{Z}$. Alors, pour $q \in \{0, 1\}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, le groupe $\mathbf{H}^p(X; \mathbb{Z}(q))$ est un groupe abélien de type fini. Plus précisément,* $\mathrm{Pic}(X)$ *et $\mathscr{O}_X(X)^\times$ sont des groupes abéliens de type fini.*

La première formulation est légèrement abusive, compte tenu du fait que l'on n'a introduit ici la cohomologie motivique que sur un corps de base. La démonstration de ce théorème est relativement difficile : on notera qu'il comporte comme cas particulier le théorème de finitude du groupe des classes d'idéaux d'un anneau d'entiers de corps de nombres. Voici un autre théorème allant dans cette direction :

***Théorème 2.5* (Quillen).** — *Soit K un corps de nombres, on note $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le groupe de K-théorie algébrique $\mathsf{K}_n(\mathscr{O}_K)$ est de type fini.*

Par ailleurs, et c'est techniquement et conceptuellement plus difficile, Borel a calculé les rangs de tous ces groupes de K-théorie algébrique en fonction du nombre de places réelles et complexes du corps de nombres envisagé (cf. [**Bor**] et [**DR**]). Plus généralement, la conclusion du théorème de Quillen est vraie pour un schéma régulier, de type fini sur $\mathbb{Z}$ et de dimension de Krull ≤ 1 : les groupes de K-théorie algébrique d'une courbe lisse sur un corps fini sont de type fini (Harder).

Références

[BK] **Spencer Bloch**, **Kazuya Kato**. L-Functions and Tamagama Numbers of Motives *in The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, Volume I, pages 333–400. *Progress in Mathematics*, **86** (1990). *Birkhaüser.*

[Bor] **Armand Borel**. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (4ème série), **7** (1974), pages 235–272.

[DR] **Frédéric Deglise**, **Joël Riou**. K-théorie des anneaux d'entiers. *Notes d'exposés pour le groupe de travail « Motifs » de l'Institut Mathématique de Jussieu.* (2001-2002). `http://www.eleves.ens.fr:8080/home/jriou/maths/dvi/anneaux.entiers.ps.gz`

[Del] **Pierre Deligne**. Théorie de Hodge II et III. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **40** (1971), pages 5–58 et **44** (1974), pages 5–78.

[GS] **Henri Gillet**, **Christophe Soulé**. Descent, motives and K-theory. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **478** (1996), pages 127–176.

[Grot] **Alexander Grothendieck**. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **29** (1966), pages 95–103.

[MV] **Fabien Morel**, **Vladimir Voevodsky**. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **90** (1999), pages 45–143.

[Qui] **Daniel G. Quillen**. Higher Algebraic K-theory I *in Higher* K*-theories.* Volume I. *Lectures Notes in Mathematics*, **341** (1973), pages 85–147. *Springer.*

[DEA] **Joël Riou**. Théorie homotopique des S-schémas. *Mémoire de DEA*. Université de Paris 7. (Janvier 2002). `http://www.eleves.ens.fr:8080/home/jriou/maths/dvi/dea.ps.gz`

[Voe] **Vladimir Voevodsky**. $\mathbb{A}^1$-homotopy theory *in Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin)*, Volume I, pages 579–604. *Documenta Mathematica* (1998). Extra Volume I.

[VSF] **Vladimir Voevodsky**, **Andrei Suslin**, **Eric M. Friedlander**. Cycles, Transfers, and Motivic Homology Theories. *Annals of Mathematics Studies*, **143** (2000). *Princeton University Press.*

Joël Riou