Equation de Continuité dans le tore $\mathbb{T}^d$ et Problème de Cauchy pour le champ de vecteur non-lisse

Ruoci Sun Shengquan Xiang

Résumé

Le but de ce texte est d'étudier le problème de Cauchy pour l'équation de continuité dans $\mathbb{T}^d$. On peut la résoudre à l'aide de la solution du système planaire qui possède le même champ de vecteur que l'équation de continuité précédente. De plus, l'unicité des solutions pour cette équation de continuité est équivalente à l'unicité des solutions pour le système correspondant. La partie essentielle pour prouver ce théorème (posé par L.Ambrosio) est le principe de superposition qui explique que toute la solution est une solution de superposition. Et la définition de la solution de superposition dépend de l'ensemble des solutions du système qui correspond à notre équation de continuité.

1 Introduction

Le problème de Cauchy pour l'équation de continuité homogène $\frac{d}{dt}\phi + \nabla_x \cdot (\mathbf{b_t}\phi) = 0$ vient du domaine de physique. Supposons que $v = v(t, x, y, z)$ et $\rho = \rho(t, x, y, z)$ sont respectivement la vitesse et la densité d'un fluide. On considère un espace de volume V_0. Alors la masse du fluide dans V_0 est $\int_{V_0} \rho dV$ et la masse de fluide qui s'épanche de l'espace V_0 par une unité de temps est $\oint_{\partial V_0} \rho \overrightarrow{v} d\overrightarrow{S}$.
Par la conservation des matières, on a

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = \oint_{\partial V_0} \rho \overrightarrow{v} d\overrightarrow{S}$$
$$\Leftrightarrow \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{V_0} \mathrm{d}iv(\rho v) dV = 0 \quad \text{pour tout espace de volume} \quad V_0$$

Et notre équation est sa forme locale.

En général, l'équation de continuité n'a pas de solution classique si aucunne régularité sur le champ de vecteur b n'est assurée. La méthode de l'équation différentielle ordinaire caractéristique peut l'impliquer. Les détailles peuvent être trouver dans le chapitre 3 du livre de L.Evans (cf. la référence [**4**]).

Dans ce texte, on étudie les solutions à valeurs des mesures boréliennes signées pour l'équation de continuité (PDE) dans la tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{d}$, où S^1 est la cercle d'unité dans $\mathbb{C}$. C'est un cas spécial pour les solutions faibles parce que chaque mesure peut être considérée comme une distribution. Ici on introduit aussi un système planaire (ODE) qui est relié à la (PDE) précédente parce qu'ils ont le même champ de vecteur. Alors on pense à trouver le lien entre eux.

$$\begin{array}{lll} \text{(PDE)} & \dfrac{d}{dt}\mu_t + \nabla_x \cdot (\mathbf{b_t}\mu_t) = 0 & \text{avec } t \in I \\ \text{(ODE)} & \begin{cases} x'(t) = \mathbf{b}(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} & \text{avec } x_0 \in \mathbb{T}^d \end{array}$$

où $\mathbf{b}$ est un champ de vecteur $I \times \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, qui dépend du temps.

$$\mathbf{b_t} : x \longmapsto \mathbf{b}(t, x) \in \mathbb{R}^d \quad \forall x \in \mathbb{T}^d \tag{1}$$

μ_t est une mesure complexe pour tout $t \in I$ et I est un segment fixé dans $\mathbb{R}$.

Le résultat de cet article est le théorème suivant :

Théorème 1.1. $\forall A \subset \mathbb{T}^d$ *un borélien, alors les propositions suivantes sont équivalentes*
(a) *La solution de (ODE) est unique pour tous* $x \in A$ *.*
(b) *La solution de (PDE) à valeur des mesures boréliennes positives est unique pour toute valeur initiale* $\bar{\mu} = \mu_0$ *qui est concentrée sur* A *(c'est-à-dire* $\bar{\mu}(\mathbb{T}^d \backslash A) = 0$ *).*

Remarque 1.1. *Comme* μ_t *est une solution faible du (PDE), alors on considère que toutes ces mesures sont de masses finies. (c'est-à-dire* $\mu_t(\mathbb{T}^d) < \infty$*).*

En comparant avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce théorème nous donne un lien entre ces 2 équations différentielles dans la situation générale (il n'y pas de condition de régularité sur le champ de vecteur commun).

Dans la section suivante, on introduit d'abord les préliminaires sur $\mathbb{T}^d$ et les solutions faibles à valeurs des mesures signées.

Dans la section 3, on étudie le problème de Cauchy de ces 2 équations dans le cas où $\mathbf{b}$ est lipchitzienne. On peut obtenir la formule explicite de la solution de (PDE) en fonction de sa valeur initiale et de la solution de (ODE).

Ensuite, on passe au cas général. Avant de montrer le théorème 1.1, on va introduire un autre théorème important, qui est utilisé pour montrer ce théorème. C'est le principe de superposition. Et on met la preuve du théorème 1.1 à la fin du texte.

2 Préliminaires

On commence par introduire le groupe compact $\mathbb{T}^d$. Une solution du (PDE) sur $\mathbb{T}^d$ représente une solution $\mathbb{Z}^d$-périodique sur $\mathbb{R}^d$.

2.1 $\mathbb{T}^d$: Groupe compact

Définition 2.1. *Un groupe topologique est un groupe G muni une topologie telle que l'opération de ce groupe est continue, c'est-à-dire que l'application*

$$\begin{aligned} \phi : \quad & G \times G \to G \\ & (x, y) \longmapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

est continue

Alors pour chaque $a \in G$, les applications $x \longmapsto ax$, $x \longmapsto xa$ et $x \longmapsto x^{-1}$ sont continues. Donc la topologie de G est déterminéé localement par une base de voisinage de son élément neutre e.

Soit f une fonction à valeurs dans G, on peut définir sa translation à gauche $L_s f$ et sa translation à droite $R_s f$, pour tout $s \in G$, par

$$L_s f : x \longmapsto f(sx), \quad R_s f : x \longmapsto f(xs) \quad (x \in G)$$

Si le groupe topologique G est de plus compact, alors $C(G)$, l'ensemble des fonctions complexes continues définies sur G, est un espace de Banach, avec la norme usuelle.

Théorème 2.1. *Tout groupe compact G admet une mesure de probabilité m borélienne et régulière, qui est invariante par la translation à gauche et à droite et par l'inversion, c'est-à-dire que*

$$\int_G f dm = \int_G (L_s f) dm = \int_G (R_s f) dm \qquad [\forall s \in G, \forall f \in C(G)]$$

et

$$\int_G f(x) dm(x) = \int_G f(x^{-1}) dm(x) \qquad [\forall f \in C(G)]$$

On appelle m la mesure de Haar sur G.

La mesure de Haar sur un groupe compact joue un rôle similaire que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour montrer ce théorème, on a besoin le théorème suivant (Théorème de point fixé de Kakutani) pour construire une forme linéaire positive sur $C(G)$, ensuite on applique le théorème de représentation de Riesz pour obtenir la mesure que l'on désire.

Théorème 2.2. *(Kakutani) Supposons que K est une partie nonvide convexe compacte d'un espace vectoriel topologique locallement convex X. Soit G est un groupe équicontinue des applications affines de K dans K. Alors G possède un point fixé commun dans K.*

Remarque 2.1. *Une fonction affine est un composé d'une application linéaire et une translation.*

Ce théorème se généralise le théorème de point fixé de Schauder et de plus, il s'agit de l'existence d'un point qui est fixé par tous les éléments de G. Leurs preuves peuvent être trouvés dans le livre "Functional Analysis" par W.Rudin (cf le théorème 5.11 et 5.14 de la référence [**10**]).

$\mathbb{T}^d$ est un groupe compact métrisable spécial. On sait que $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle d'unité $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ par l'application :

$$s \longmapsto (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s)$$

Donc on prend la structure de $\mathbb{T}^d$ comme

$$\underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{d}$$

dans $\mathbb{R}^{2d}$. Donc c'est groupe abélien compact.

On peut représenter la mesure de Haar pour $\mathbb{T}$ comme la mesure de $[0, 1[$ à densité

$$\theta \longmapsto \exp(2\pi i\theta)$$

c'est-à-dire que $dm^1 = e^{2\pi i\theta} d\theta, \quad \forall \theta \in [0, 1[$.
On peut donc prendre la mesure de Haar pour $\mathbb{T}^d$ comme la mesure produit

$$m = \underbrace{m^1 \otimes m^1 \otimes \cdots \otimes m^1}_{d}$$

On peut aussi définir la convolution par 2 fonctions intégrables sur $\mathbb{T}^d$ par la méthode similaire que la situation $\mathbb{R}^d$. En fait, soient $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, alors

$$\int_{\mathbb{T}^d} |f(x - y)g(y)| dm(y) < +\infty$$

pour m-presque partout $x \in \mathbb{T}^d$. Donc on peut définir

$$f * g := \int_{\mathbb{T}^d} f(x - y)g(y) dm(y)$$

De plus, on a $f * g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$. La démonstration est pareille que la convolution dans $\mathbb{R}^d$.

Si $f \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{T}^d$. On peut définir leur convolution par

$$f * \mu(x) := \int_{\mathbb{T}^d} f(x - y) d\mu(y) \tag{2}$$

qui est aussi lisse.

2.2 Mollification

Cas $\mathbb{R}^d$

Soit U ouvert dans $\mathbb{R}^d$, $\forall \epsilon > 0$, on note $U_\epsilon := \{x \in U | dist(x, \partial U) < \epsilon\}$. Définissons $h(x) := C \cdot \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) 1_{|x|<1}$, on choisit la constante C pour que $\int_{\mathbb{R}^d} h = 1$. $h_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^d} h(x/\epsilon)$. Donc $\int_{\mathbb{R}^d} h_\epsilon = 1$ et $supp(h_\epsilon) \subset B(O, \epsilon)$. Soit une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable, on définit sa mollification comme

$$f^\epsilon(x) := h_\epsilon * f(x) = \int_U h_\epsilon(x-y) f(y) dy = \int_{B(O,\epsilon)} h_\epsilon(y) f(x-y) dy$$

pour tout $x \in U_\epsilon$. Alors on a (cf la section C.4 de la référence [**4**]) :
1. $f^\epsilon \in C^\infty(U_\epsilon)$ et $\sup_{x \in U_\epsilon} |f^\epsilon(x)| \leq \sup_{x \in U} |f(x)|$
2. $f^\epsilon \longrightarrow f$ presque partout lorsque $\epsilon \downarrow 0$
3. Si f est continue sur U, alors $f^\epsilon \longrightarrow f$ uniformément sur tout compact de U
4. Si $1 \leq p < \infty$, alors $f^\epsilon \longrightarrow f$ dans $L^p_{loc}(U)$.

Cas $\mathbb{T}^d$

Sur le point de vue de topologie algébrique, on peut relever $\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{R}^d$ par l'application de quotient

$$\begin{aligned} p : \quad & \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \\ & (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_d) \longmapsto (\exp(2\pi i \theta_1), \exp(2\pi i \theta_2), \cdots, \exp(2\pi i \theta_d)) \end{aligned} \tag{3}$$

Remarque 2.2. *La restriction $p_{|[0,1[^d}$ est bijective de $[0,1[^d$ dans $\mathbb{T}^d$ par la définition du revêtement, on note $q : \mathbb{T}^d \to [0,1[^d$ comme son inverse.*

Soit une fonction $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ mesurable, soit μ une mesure borélienne de $\mathbb{T}^d$ et $\nu = q_\sharp \mu$. Alors on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu = \int_{[0,1[^d} (\varphi \circ p) d\nu$$

ν est borélienne sur $[0,1[^d$. Ensuite on peut définir une mesure $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbb{R}^d$, qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique, telle que

$$\widetilde{\mu}(A) = \nu(A)$$

pour tout A borélien dans $[0,1[^d$. $\widetilde{\mu}$ est borélienne et $\widetilde{\mu}(E) = \widetilde{\mu}(E + (a_1, a_2, \cdots, a_d))$ pour tout E borélien et tout a_i entier. Et on appelle que $\widetilde{\mu}$ est le relèvement de μ. Et on a

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu = \int_K (\varphi \circ p) d\widetilde{\mu}$$

pour tout K boîte unitaire de $\mathbb{R}^d$.

En relevant $\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{R}^d$, on peut mollifier les mesures boréliennes sur $\mathbb{Z}^d$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction de plateau. Alors la fonction $\chi * \widetilde{\mu}$ est une fonction lisse $\mathbb{Z}^d$-périodique parce que

$$\begin{aligned}\chi * \widetilde{\mu}(x+a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x+a-y) d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y) d\widetilde{\mu}(y+a) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-y) d\widetilde{\mu}(y) \\ &= \chi * \widetilde{\mu}(x)\end{aligned}$$

pour tout $a \in \mathbb{Z}^d$.

De plus, si μ est une mesure de probabilité, alors $\chi * \widetilde{\mu}$ est aussi une mesure de probabilité sur $[0,1[^d$ si $\int_{\mathbb{R}^d} \chi = 1$ parce que $\widetilde{\mu}$ est $\mathbb{Z}^d$-périodique.

Nous mollifons μ_t et $\mathbf{b}_t$ par la convolution avec les fonctions gaussiennes $\rho_\epsilon(x) = C \cdot \epsilon^{-d} \exp(-|x|^2/\epsilon^2)$ (qui sont lisses et on choisit C pour que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$).

Comme $supp(\rho) = \mathbb{R}^d$, alors pour toute mesure μ positive, la convolution $\rho * \mu$ est à valeurs dans les réelles strictement positives.

On note $\mu_{l,t}$ le relèvement de la mesure μ_t et $\mathbf{b}_{l,t} = \mathbf{b}_t \circ p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Ensuite,

$$\mu_{l,t}^\epsilon := \mu_{l,t} * \rho_\epsilon, \qquad \mathbf{b}_{l,t}^\epsilon := \frac{\mathbf{b}_{l,t}\mu_{l,t} * \rho_\epsilon}{\mu_{l,t}^\epsilon} \tag{4}$$

Alors $\mu_{l,t}^\epsilon$ et $\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon$ sont 2 fonctions lisse définies sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{Z}^d$-périodiques. Donc on peut choisir les fonctions définies sur $\mathbb{T}^d$: μ_t^ϵ et $\mathbf{b}_t^\epsilon$ telles que

$$\mu_{l,t}^\epsilon = \mu_t^\epsilon \circ p, \quad \mathbf{b}_{l,t}^\epsilon = \mathbf{b}_t^\epsilon \circ p \tag{5}$$

On note $\mu_t^\epsilon = \mu_{l,t|\mathbb{T}^d}^\epsilon$ et $\mathbf{b}_t^\epsilon = \mathbf{b}_{l,t|\mathbb{T}^d}^\epsilon$. Alors $\mathbf{b}^\epsilon \in L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d))$ et $\mathbf{b}_t^\epsilon$, μ_t^ϵ sont lisses. En fait, $\forall K$ compact dans $\mathbb{R}^d$, comme $\mu_{l,t}^\epsilon$ est lisse et à valeurs des réelles strictement positives, $\exists B_{K,\epsilon} > 0$ telle que $\mu_{l,t}^\epsilon \geq B_{K,\epsilon}$ sur K et $\rho_\epsilon \leq C/\epsilon^d$, donc

$$|\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(x)| \leq \frac{C}{B_{K,\epsilon}\epsilon^d} \int_K |\mathbf{b}_{l,t}| d\mu_{l,t} \qquad \forall x \in K. \tag{6}$$

Alors

$$\int_0^T ||\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(x)||_{W^{1,\infty}} dt \leq M_{K,\epsilon} \int_0^T \int_K |\mathbf{b}_{l,t}| d\mu_{l,t} dt < +\infty$$

De manière équivalente, on transfère la fonction gaussienne ρ_ϵ comme une fonction $\mathbb{Z}^d$-périodique $\widetilde{\chi}_\epsilon$:

$$\widetilde{\chi}_\epsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \rho_\epsilon(x-n) = C\cdot\epsilon^{-d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} e^{(-|x-n|^2/\epsilon^2)} \quad x\in\mathbb{R}^d \tag{7}$$

pour tout $\epsilon\in]0,1[$. Alors il existe des fonctions lisses χ_ϵ définies sur $\mathbb{T}^d$ telles que

$$\widetilde{\chi}_\epsilon = \chi_\epsilon\circ p$$

et de plus, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d}\chi_\epsilon\varphi \longrightarrow \varphi(e_{\mathbb{T}^d}), \qquad lorsque \qquad \epsilon\downarrow 0 \tag{8}$$

pour toute fonction de teste φ, où $e_{\mathbb{T}^d}$ est l'élément neutre de $\mathbb{T}^d$. On note δ la masse de dirac concentrée en $e_{\mathbb{T}^d}$. Donc $\chi_\epsilon\longrightarrow\delta$ étroitement si $\epsilon\downarrow 0$.

Lemme 2.1. *f_j est une distribution sur $\mathbb{T}^d$. $f_j\longrightarrow\delta$ au sens de distribution si et seulement si $f_j*\varphi\longrightarrow\varphi$ ponctuellement si $j\longrightarrow+\infty$, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$.*

Démonstration.

$$f_j*\varphi(x) = \langle f_j,\tau_x\breve{\varphi}\rangle, \quad \langle\delta,\tau_x\breve{\varphi}\rangle = \varphi(x) \tag{9}$$

où $\tau_x\breve{\varphi}: y\longmapsto\varphi(x-y)$ homéomorphe de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. $\square$

Soit μ une mesure sur $\mathbb{T}^d$, $\mu^\epsilon := \chi_\epsilon*\mu$. Comme $supp(\chi_\epsilon)=\mathbb{T}^d$, on a $\mu^\epsilon>0$.

$$\int_{\mathbb{T}^d}\mu^\epsilon dm = \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d}\chi_\epsilon(x-y)d\mu(y)dm(x) = \int_{\mathbb{T}^d}\chi_\epsilon(x-y)dm(x)d\mu(y) = 1 \tag{10}$$

parce que $\int_{\mathbb{T}}^d \chi_\epsilon dm = \int_{[0,1[^d}\widetilde{\chi}_\epsilon = 1$.

On rappelle que la convolution peut être définie entre 2 distributions à supports compacts. (cf 6.36 de la référence [**10**]) Alors, soient $u\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$, $v\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$, on définit

$$u*v:\varphi\longmapsto u((v*\breve{\varphi})^\vee) \tag{11}$$

Donc pour $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{T}^d)$, on a

$$(u*v)*\varphi = u*(v*\varphi)$$

Et on a $\mu_t^\epsilon\longrightarrow\mu_t$ au sens de distribution, si $\epsilon\downarrow 0$. (cf le théorème 6.32 de la référence [**10**])

2.3 Identité de distribution pour le (PDE)

En relevant $\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{R}^d$, chaque solution de (PDE) dans $\mathbb{T}^d$ est une solution de $\mathbb{R}^d$. Donc on regarde le cas dans $\mathbb{R}^d$ d'abord.

(PDE) dans $\mathbb{R}^d$

Définition 2.2. *μ_t est une solution du (PDE $\mathbb{R}^d$) à valeurs des mesures si*

$$\int_I \int_A |\mathbf{b_t}| d|\mu_t| dt < +\infty, \qquad \sup_{t \in I} \mu_t(A) < +\infty \tag{12}$$

et

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{b_t} \cdot \nabla \varphi d\mu_t \tag{13}$$

pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec où $\langle \mu_t, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu_t$.

En fait,

$$\begin{aligned} &\frac{d\mu_t}{dt} + D_x \cdot (\mathbf{b_t}\mu_t) = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle + \langle D_x \cdot (\mathbf{b_t}\mu_t), \varphi \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle = \langle \mu_t, \mathbf{b_t} \cdot \nabla \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

parce que

$$\langle D_x \cdot (\mathbf{b_t}\mu_t), \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{d} \langle D^j ({\mathbf{b_t}}^j \mu_t), \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \varphi \cdot \mathbf{b_t} d\mu_t$$

D'autre part, comme $\langle \mu_t, \varphi \rangle \in D'(I)$, on a encore

$$\int_I \psi'(t) (\int_{\mathbb{R}^d} \phi d\mu_t) dt + \int_I \psi(t) (\int_{\mathbb{R}^d} \nabla \phi \cdot \mathbf{b_t} d\mu_t) dt = 0 \quad \forall \psi \in D(I), \forall \phi \in D(\mathbb{R}^d) \tag{14}$$

et l'application $t \to \langle \mu_t, \varphi \rangle \in W^{(1,1)}(I)$ parce que

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{b_t} \cdot \nabla \varphi d\mu_t \in L^1(I) \tag{15}$$

(PDE) dans $\mathbb{T}^d$

On passe au cas $\mathbb{T}^d$: à chaque $t \in I$, μ_t et $\mathbf{b_t}$ sont définies sur $\mathbb{T}^d$, alors il existe une mesure $\widetilde{\mu_t}$ et une fonction $\widetilde{\mathbf{b_t}}$ définies sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{Z}^d$-périodiques. Une fonction de teste $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ se relève à une fonction lisse $\widetilde{\varphi}$ qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique. En définissant

$$\langle \mu_t, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu_t, \qquad \langle \widetilde{\mu_t}, \widetilde{\varphi} \rangle_1 := \int_{[0,1[^d} \widetilde{\varphi} d\widetilde{\mu_t} \tag{16}$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$, $\forall \widetilde{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui est $\mathbb{Z}^d$-périodique. On a $\langle \mu_t, \varphi \rangle = \langle \widetilde{\mu_t}, \widetilde{\varphi} \rangle_1$.

Définition 2.3. *μ_t est une solution du (PDE) à valeurs des mesures si*

$$\int_I \int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b_t}| d|\mu_t| dt < +\infty, \qquad \sup_{t \in I} \mu_t(\mathbb{T}^d) < +\infty \tag{17}$$

et

$$\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle = \langle \widetilde{\mu_t}, \widetilde{\mathbf{b_t}} \cdot \nabla \widetilde{\varphi} \rangle_1 \tag{18}$$

On remarque que $\mathbf{b_t}$ (resp. μ_t) vérifie la formule (17) est équivalente que $\widetilde{\mathbf{b_t}}$ (resp. $\widetilde{\mu_t}$) vérifie la formule (12). Les calculs pour le crochet $\langle \widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi} \rangle_1$ sont similaires aux calculs pour le crochet de distribution en utilisant l'intégration par partie, parce que $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\varphi}$ sont $\mathbb{Z}^d$-périodiques. Donc on peut définir pour $\forall \widetilde{\varphi}, \widetilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ qui sont $\mathbb{Z}^d$-périodiques,

$$\langle \partial^\alpha \widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi} \rangle_1 := (-1)^\alpha \langle \widetilde{\mu}, \partial^\alpha \widetilde{\varphi} \rangle_1, \qquad \langle \widetilde{f} \widetilde{\mu}, \widetilde{\varphi} \rangle_1 := \langle \widetilde{\mu}, \widetilde{f} \widetilde{\varphi} \rangle_1. \tag{19}$$

2.4 Continuité Absolue

Définition 2.4. *f est une fonction définie sur un intervalle $I = [a, b]$ à valeur complexe, on dit que f est continue absoluement, notée AC, si $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)| < \epsilon$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute collection des segments disjoints (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\cdots$, (α_n, β_n) dans le segment I tels que

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i) < \delta$$

Remarque 2.3. *La continuité absolue implique la continuité uniforme, qui implique la continuité.*

Théorème 2.3. *f est une fonction AC à valeur complexe définie sur $I = [a, b]$, alors f est différentiable presque partout sur I, $f' \in L^1(I)$ et*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

(cf le théorème 7.20 de la référence [**11**]).

2.5 Intégrabilité uniforme

Définition 2.5. *Soit $\mathcal{H}$ est une famille des variables altéatoires sur un espace probabilisé E. $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable (équiintégrable) si*

$$k(b) := \sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E}|X| 1_{\{|X|>b\}} \to 0$$

lorsque $b \longrightarrow +\infty$.

Ensuite on introduit 2 propositions reliées à l'intégrabilité uniforme, qui sont utilisés dans la preuve du théorème 4.1.

Proposition 2.1. *$\mathcal{H}$ est une famille des variables aléatoires, alors elle est uniformément intégrable si et seulement s'il existe une fonction croissante convexe telle que $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$ et*

$$\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} f \circ |X| < +\infty$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X| 1_{\{|X|>b\}} &= \int_0^\infty \mathscr{P}(|X| 1_{\{|X|>b\}} > y) dy \\ &= \int_0^\infty \mathscr{P}(|X| > y \vee b) dy \\ &\geq \int_b^\infty \mathscr{P}(|X| > y) dy \end{aligned}$$

Alors on a

$$h(b) := \sup_{X \in \mathcal{H}} \int_b^\infty \mathscr{P}(|X| > y) dy \leq k(b)$$

pour tous b. Donc $h(b) \to 0$ si $b \to +\infty$. De plus, $h(0) \leq b + h(b)$ pour tous b positive, alors $h(0)$ est fini. Ensuite on estrait une sous-suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictemet croissante qui tends vers $+\infty$ et $h(b_n) < \frac{h(0)}{2^n}$.

On défni

$$g(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[b_n, +\infty[}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

c'est une fonction strictement croissante et $g(x) \to +\infty$ si $x \to +\infty$

$$f(x) := \int_0^x g(y) dy$$

alors f est une fonction convexe croissante et $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow +\infty$ si $x \to +\infty$ par la loi d'Hôpitale.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E} f \circ |X| &= \mathbb{E} \int_0^{|X|} g(y) dy \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E} \int_{|X|>y \geq b_n} dy \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{b_n}^{+\infty} \mathbb{E} 1_{|X|>y} dy \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} h(b_n) \\
&\leq 2h(0)
\end{aligned}
$$

pour tous $\forall X \in \mathcal{H}$.

Donc

$$
\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} f \circ |X| \leq 2h(0) < +\infty.
$$

Réciproquement, si une telle f existe ; on peut supposer que $f \geq 1$, car sinon peut le remplacer par $F = f \vee 1$.

On défini

$$
\phi(x) := \frac{x}{f(x)}
$$

qui tends vers 0 lorsque $x \to +\infty$. Donc

$$
|X| 1_{\{|X|>b\}} = f \circ |X| \phi \circ |X| 1_{\{|X|>b\}} \leq f \circ |X| \sup_{t>b} \phi(t)
$$

Alors

$$
k(b) := \sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} |X| 1_{\{|X|>b\}} \leq c \sup_{t>b} \phi(t)
$$

qui tend vers 0 lorsque $b \to +\infty$, avec $c = \sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} f \circ |X|$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 2.2. *La famille $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable si et seulement si $\mathcal{H}$ est bornée dans L^1 et $\forall \epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout événement A*

$$
\mathbb{P}(A) \leq \delta \Rightarrow \sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} |X| 1_A \leq \epsilon \tag{20}
$$

Démonstration. Comme $|X| 1_H \leq b 1_H + |X| 1_{|X|>b}$ pour tout événement H et tout b dans $\mathbb{R}_+$, on a

$$
\sup_{X \in \mathcal{H}} \mathbb{E} |X| 1_H \leq b \mathbb{P}(H) + k(b), \qquad b \in \mathbb{R}_+
$$

Si $\mathcal{H}$ est uniformément intégrable, alors $k(b) \to 0$. $\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{E}|X| = k(0) \leq b + k(b) < +\infty$. A chaque $\epsilon > 0$, $\exists b > 0$ tel que $k(b) < \epsilon/2$. Ensuite on prend $\delta = \epsilon/2b$ pour obtenir (20).

Réciproquement, $\epsilon > 0$, on chiosit δ qui vérifie (20). Par l'inégalité de Markov, on a

$$\sup_{X\in\mathcal{H}} \mathbb{P}(|X| > b) \leq \frac{1}{b} k(0),$$

il existe un b tel que $\mathbb{P}(|X| > b) < \delta$, pour tout $X \in \mathcal{H}$. En remplaçant H par $\{|X| > b\}$, on termine la preuve.

□

2.6 Famille tendue et théorème de Prohorov

Définition 2.6. *Soit $\mathcal{G}$ est une famille des mesures sur l'espace mesurable X. Si $\forall\epsilon > 0$, il existe K, un sous-ensemble compact de X, tel que $\sup_{\mu\in\mathcal{G}} \mu(X\backslash K) < \epsilon$, alors on dit que $\mathcal{G}$ est tendue.*

Théorème 2.4. *(Prohorov) $(\mathcal{S}, d)$ est un espace métrique séparable et $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des mesures de probabilités sur l'espace $\mathcal{S}$, avec la tribu borélienne. Soit $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\mathcal{S})$, alors $\mathcal{K}$ est tendue si et seulement si son adhérence est séquentiellement compact dans $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ avec la topologie faible* qui correspond à la convergence étroite.*

La preuve de ce théorème peut être trouvé dans le livre "Real analysis and Probability" par R.M.Dudley (cf la section 11.5 de la référence [**5**]).

Définition 2.7. *X est un espace topologique quelconque, $\Psi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$. Alors on dit que Ψ est coercive si $\Psi^{-1}[0, c]$ est compact dans X, pour tout c positive.*

Théorème 2.5. *X est un espace topologique. $\mathcal{F}$ est une famille des mesures sur X. Alors $\mathcal{F}$ est tendue si et seulement s'il existe une fonction coercive $\Psi : X \longrightarrow [0, +\infty]$ telle que $\int_X \Psi d\mu \leq 1$, $\forall\mu \in \mathcal{F}$.*

Démonstration. Si la famille $\mathcal{F}$ est tendue, alors à chque $n \in \mathbb{N}_+$, il existe un compact $K_n \subset X$ tel que $\mu(X\backslash K_n) < 2^{-n}$ et $K_n \subset K_{n+1}$ (sinon, on choisit l'union de K_n et K_{n+1}). Et on définit

$$\Psi(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{X\backslash K_n}(x).$$

alors c'est une fonction coercive parce que

$$\Psi^{-1}[0, c] = K_n, \qquad n - 1 \leq c < n$$

et de plus

$$\int_X \Psi d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(X\backslash K_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$$

pour $\forall \mu \in \mathcal{F}$

Réciproquement, si une telle fonction Ψ existe, $\forall \epsilon > 0$, on choisit $K := \Psi^{-1}[0, \epsilon^{-1}]$. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{F}$, on a

$$1 \geq \int_X \Psi d\mu \geq \int_{X\backslash K} \Psi d\mu \geq \epsilon^{-1}\mu(X\backslash K)$$

Donc $\mathcal{F}$ est tendue.

$\square$

3 Problème de Cauchy avec la régularité b_t est lipchitzienne

On rappelle le théorème de Cauchy-Lipchitz :

Théorème 3.1. *Si* $\mathbf{b}$ *est continue et Lipschitzienne par rapport à la variable x dans un voisinage de (t_0, x_0) (la constante de Lipschitz est indépendente que t). Alors il existe un temps $\tau > 0$ tel que $\forall S \in (0, \tau]$, le (ODE) possède une unique solution $X : (t_0 - S, t_0 + S) \to \mathbb{T}^d$.*

Dans cette section, on suppose que $\mathbf{b} \in L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d))$, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz peut assurer l'existence et l'unicité de la solution du (ODE).
Supposons que $X(t, \cdot)$ est la solution du (ODE), on peut montrer que $X(t, \cdot)$ est aussi Lipschitzienne :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}|X(t,x) - X(t,y)|^2 \\
=&2\langle \mathbf{b_t}(X(t,x) - \mathbf{b_t}(X(t,y))), X(t,x) - X(t,y)\rangle \\
\leq&2\mathrm{Lip}(\mathbf{b_t})|X(t,x) - X(t,y)|^2
\end{aligned}$$

avec $Lip(f)$ la constante de Lipschitz la plus petite de f. Par lemme de Gronwall, on a

$$\mathrm{Lip}(X(t,\cdot)) \leq exp(\int_0^t \mathrm{Lip}(\mathbf{b_s})ds) < +\infty.$$

.

3.1 Unicité pour (PDE) dans $\mathbb{R}^d$

On va résoudre la (PDE) à l'aide des $X(t,\cdot)$. D'abord, on va montrer l'unicité de la solution de (PDE). Chaque solution du (PDE) dans la tore $\mathbb{T}^d$ est une solution $\mathbb{Z}^d$-périodique du (PDE) dans $\mathbb{R}^d$, en relevant $\mathbf{b}$ à $\widetilde{\mathbf{b}}$. On remarque que $\mathbf{b} \in L^1([0,T];W^{1,\infty}(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)) \Leftrightarrow \widetilde{\mathbf{b}} \in L^1([0,T];W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d))$. Donc il suffit de montrer l'unicité des solutions du (PDE) avec la régularité correspondante pour $\widetilde{\mathbf{b}}$.

D'abord, on définit $X_t(x,s)$ est la solution du ODE ($\mathbb{R}^d$) avec la position initiale x au temps initial s. Soit v_t un champ de vecteur borélien $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tel que pour tout compact $B \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_0^T (\sup_B |v_t| + Lip(v_t, B))dt < +\infty \tag{21}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on a $\forall x \in \mathbb{R}^d$ et $\forall s \in [0,T]$ le (ODE $\mathbb{R}^d$)

$$X_s(x,s) = x, \qquad \frac{d}{dt}X_t(x,s) = v_t(X_t(x,s)) \tag{22}$$

admet une solution maximale unique définie sur un intervalle $I(x,s)$ relativement ouvert dans $[0,T]$ contenant s comme in point intérieur (relativement). Si de plus l'appilcation $t \to |X_t(x,s)|$ est bornée pour $\forall t \in I(x,s)^\circ$, alors $I(x,s) = [0,T]$; finalement si v_t satisfie

$$S = \int_0^T (\sup_{\mathbb{R}^d} |v_t| + Lip(v_t, \mathbb{R}^d))dt < +\infty, \tag{23}$$

alors on a

$$\int_0^T \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_t X_t(x,s)|dt \leq S, \qquad \sup_{t,s\in[0,T]} Lip(X_t(\cdot,s), \mathbb{R}^d) \leq e^S \tag{24}$$

Si le champ de vecteur v_t est lisse sur $\mathbb{R}^d\times]0,T[$, la solution $X_t(x,t)$ du système est aussi lisse.

Remarque 3.1. *(Méthode caractéristique) La méthode caractéristique nous donne une formule de représentation pour les solutions classiques de l'équation de transport :*

$$\partial_t\varphi + \langle v_t, \nabla\varphi\rangle = \psi \quad sur \quad \mathbb{R}^d\times]0,T[, \qquad \varphi(x,T) = \varphi_T(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{25}$$

si $\psi \in C^1_b(\mathbb{R}^d\times]0,T[)$, $\varphi_T \in C^1_b(\mathbb{R}^d)$ et v satisfie la formule (23), alors les solutions maximales peuvent être définies dans [0,T]. On peut obtenir que

$$\varphi(x,t) := \varphi_T(X_T(x,t)) - \int_t^T \psi(X_s(x,t),s)ds \tag{26}$$

est une solution du (25).

Démonstration. Comme $X_s(X_t(x,0),t) = X_s(x,0)$, on a

$$\varphi(X_t(x,0),t) = \varphi_T(X_T(x,0)) - \int_t^T \psi(X_s(x,0),s)ds \tag{27}$$

ensuite on fait la dérivée par rapport à la variable t pour obtenir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \langle v_t, \nabla\varphi\rangle(X_t(x,0),t) = \psi(X_t(x,0),t) \tag{28}$$

$\forall x \in \mathbb{R}^d$.

$\square$

On passe à l'unicité pour les solutions du (PDE $\mathbb{R}^d$).

Proposition 3.1. *(Unicité et Comparaison) Soit $(\sigma_t)_{t\in(0,T)}$ est une famille des mesures signées telles que $\partial_t\sigma_t + \nabla\cdot(v_t\sigma_t) = 0$ dans $\mathbb{R}^d \times (0,T)$, avec $\sigma_0 \le 0$ et*

$$\int_I\int_{\mathbb{R}^d} |v_t| d|\mu_t| dt < +\infty, \qquad \int_0^T (|\sigma_t|(B) + \sup_B |v_t| + Lip(v_t, B))dt < +\infty. \tag{29}$$

pour tout B compact dans $\mathbb{R}^d$. Alors, on a $\sigma_t \le 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

(cf la proposition 8.1.7 de la référence [**2**]).

Démonstration. $\forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d\times]0,T[)$ fixée, supposons que $0 \le \psi \le 1$. On choisit une fonction de plateau $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $0 \le \chi \le 1$, $|\nabla\chi| \le 2$, $supp(\chi) \subset B(O,2)$ et $\chi \equiv 1$ sur $B(O,1)$. Et on définit $\chi_R : x \longmapsto \chi(x/R)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

On choisit w_t tel que $w_t = v_t$ sur $B(O,2R)\times]0,T[$ et $w_t = 0$ si $t \notin]0,T[$ et

$$\sup_{\mathbb{R}^d} |w_t| + Lip(w_t, \mathbb{R}^d) \le \sup_{B(O,2R)} |v_t| + Lip(v_t, B(O,2R)), \qquad \forall t \in [0,T]. \tag{30}$$

Ensuite, w_t^ϵ est obtenue par une mollification double sur w_t par rapport à l'espace $\mathbb{R}^d$ et au temps $[0,T]$. Donc les application $x \longmapsto w_t^\epsilon(x)$ et $t \longmapsto w_t^\epsilon(x)$ sont lisses. Et de plus,

$$\begin{aligned}\sup_{\epsilon\in]0,1[} \int_0^T (\sup_{\mathbb{R}^d} |w_t^\epsilon| + Lip(w_t^\epsilon, \mathbb{R}^d))dt &\le \int_0^T \sup_{\mathbb{R}^d} |w_t| + Lip(w_t, \mathbb{R}^d)dt \\ &\le \int_0^T (\sup_{B(O,2R)} |v_t| + Lip(v_t, B(O,2R)))dt < +\infty\end{aligned} \tag{31}$$

Par la méthode caractéristique dans la remarque 3.1, on peut construire une solution φ^ϵ : $\mathbb{R}^d \longrightarrow]0,T[$ de l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi^\epsilon + \langle w_t{}^\epsilon, \nabla\varphi^\epsilon\rangle = \psi \quad sur \quad \mathbb{R}^d\times]0,T[, \qquad \varphi^\epsilon(x,T) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{32}$$

Par la formule de représentation (26) ,(31) et l'estimation (24), on voit que φ^ϵ est lisse, $-T \leq \varphi^\epsilon \leq 0$ et $|\nabla\varphi^\epsilon|$ est uniformément bornée par rapport aux paramètres ϵ, t et x. (i.e. la borne ne dépend pas de ces 3 paramètres)

On applique l'identité de distribution pour l'équation de continuité à la fonction de teste $\chi_R\varphi^\epsilon$: (φ^ϵ est à support dans $B(O,2R)\times[0,T]$ et φ^ϵ ne s'annule pas forcément au bord T)

$$\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R(x)\varphi^\epsilon(x,T)d\sigma_T-\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R(x)\varphi^\epsilon(x,0)d\sigma_0-(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(\chi_R\frac{\partial}{\partial t}+\langle v_t,\chi_R\nabla\varphi^\epsilon+\varphi^\epsilon\nabla\chi_R\rangle)d\sigma_t dt)=0 \tag{33}$$

Donc

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R(x)\varphi^\epsilon(x,0)d\sigma_0\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}(\chi_R\frac{\partial\varphi^\epsilon}{\partial t}+\langle v_t,\chi_R\nabla\varphi^\epsilon+\varphi^\epsilon\nabla\chi_R\rangle)d\sigma_t dt\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R(\psi+\langle v_t-w_t^\epsilon,\nabla\varphi^\epsilon\rangle)+\varphi^\epsilon\langle\nabla\chi_R,v_t\rangle d\sigma_t dt\\
&\geq \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R(\psi+\langle v_t-w_t^\epsilon,\nabla\varphi^\epsilon\rangle)d\sigma_t dt - T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\chi_R||v_t|d|\sigma_t|dt
\end{aligned}$$

On met $\epsilon\downarrow 0$. Comme $|\nabla\varphi^\epsilon|$ est uniformément bornée et $w_t=v_t$ sur $supp(\chi_R)\times]0,T[$, on a

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\chi_R\psi d\sigma_t dt\leq T\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\chi_R||v_t|d|\sigma_t|dt\leq\frac{2T}{R}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}|v_t|d|\sigma_t|dt\longrightarrow 0 \tag{34}$$

lorsque $R\longrightarrow+\infty$. On obtient finalement $\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\psi d\sigma_t dt\leq 0$ pour tout $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

Alors, si $\mathbf{b}\in L^1([0,T];W^{1,\infty}[\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d])$, alors $\widetilde{\mathbf{b}}$ vérifie la formule (29). Soient $(\mu_t)_t$ et $(\nu_t)_t$ sont 2 solutions du (PDE) dans $\mathbb{T}^d$ avec la même valeur initiale $\mu_0=\nu_0$, on prend $\sigma_t=\widetilde{\mu}_t-\widetilde{\nu}_t$, qui aussi vérifie la formule (29) parce que l'on a supposé au début la formule (17). Donc la proposition précedent nous dit que $\mu_t=\nu_t$ pour tout t.

3.2 Résoudre le PDE dans $\mathbb{T}^d$

Maintenant, on se donne une formule explicite pour la solution du (PDE).

Théorème 3.2. *Pour toute valeur initiale $\overline{\mu}$, la solution à valeurs des mesures de (PDE) est donnée par $\mu_t := X(t,\cdot)_\sharp\overline{\mu}$ c'est-à-dire que $\int_{\mathbb{T}^d}\varphi d\mu_t=\int_{\mathbb{T}^d}\varphi(X(t,x))d\overline{\mu}(x)=\int_{[0,1[^d}\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x))d\widetilde{\mu_0}$, où $\widetilde{X}$ est la solution du (ODE) dans $\mathbb{R}^d$: $\widetilde{X}'(t,x)=\widetilde{\mathbf{b_t}}(\widetilde{X}(t,x))$.*

Avant de le prouver, on doit remarquer qu'une valeur initiale $\overline{\mu}$ doit vérifier que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{T}^d}|X'(t,x)|d\overline{\mu}dt<+\infty$$

pour assurer que μ_t verifie la formule (17).

Démonstration. Par le lemme précédente, il suffit de vérifier que $t \mapsto \langle \mu_t, \varphi \rangle \in W^{1,1}(0,T)$ et sa dérivée faible est $t \longmapsto \langle \mu_t, \widetilde{\mathbf{b_t}} \cdot \nabla\widetilde{\varphi} \rangle$, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$. D'abord, on montre la continuité absolue de l'application $t \mapsto \langle \mu_t, \varphi \rangle$.

$\forall \varphi \in C^\infty$ fixé, on choisit arbitrairement n intervalles disjoints $(a_i, b_i) \subset (0,T)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\varphi(X(b_i,x)) - \varphi(X(a_i,x))| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |\int_{a_i}^{b_i} \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x)) \cdot \dot{\widetilde{X}}(t,x)dt| \\ &\leqslant \|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty} \cdot \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} (\sup_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b_t}|)dt\end{aligned}$$

On l'intègre par rapport à $\overline{\mu}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\langle \mu_{b_i} - \mu_{a_i}, \varphi \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} \int |\varphi(X(b_i,x)) - \varphi(X(a_i,x))| d\overline{\mu}(x) \\ &\leqslant \|\nabla\widetilde{\varphi}\|_{L^\infty} \overline{\mu}(\mathbb{T}^d) \cdot \int_{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)} (\sup_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b_t}|)dt.\end{aligned}$$

Comme la terme à droite peut devenir arbitrairement petit lorsque $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \to 0$, ce qui implique la continuité absolue. $\forall x \in \mathbb{T}^d$, $X'(t,x) = b_t(t, X(t,x))$ pour tout $t \in [0,T] \Longrightarrow \mathscr{L}^d$-p.p $t \in [0,T]$. Par théorème de Fubini-Lebesgue, on a pour $\mathscr{L}^d$-p.p. $t \in [0,T]$, $X'(t,x) = b_t(t, X(t,x))$ est valide pour $\overline{\mu}$-p.p. En fait, on considère

$$\begin{aligned}&\int\int_{(t,x)\in[O,T]\times\mathbb{T}^d} \mathbf{1}_{\{(t,x)|\dot{X}(t,x)\neq \mathbf{b_t}(X(t,x))\}} d\overline{\mu}(x)dt \\ =&\int\int_{(t,x)\in\mathbb{T}^d\times[O,T]} \mathbf{1}_{\{(t,x)|\dot{X}(t,x)\neq \mathbf{b_t}(X(t,x))\}} dtd\overline{\mu}(x) \\ =&0\end{aligned}$$

Par le théorème 2.3, l'application $t \mapsto \langle \mu_t, \varphi \rangle \in W^{1,1}(0,T)$.

Ensuite, on calcule sa dérivée faible.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mu_t, \varphi \rangle &= \frac{d}{dt} \int_{[0,1[^d} \widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x)) d\widetilde{\mu_0}(x) \\ &= \int_{[0,1[^d} \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x)) \dot{\widetilde{X}}(t,x) d\widetilde{\mu_0}(x) \\ &= \int_{[0,1[^d} \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x)) \widetilde{\mathbf{b_t}}(\widetilde{X}(t,x)) d\widetilde{\mu_0}(x) \\ &= \int_{[0,1[^d} \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t,x)) \widetilde{\mathbf{b_t}} d\widetilde{\mu}_t \\ &= \langle \widetilde{\mathbf{b_t}} \mu_t, \nabla\widetilde{\varphi} \rangle_1.\end{aligned}$$

pour $[\mathscr{L}^1]$-p.p $t \in [0,T]$.

$\square$

4 Principe de Superposition

Après avoir établit toutes les solutions du (PDE) avec la régularité que b est lipschitzienne, on passe à montrer le théorème 1.1. L'implication $(a) \Rightarrow (b)$ a besoin un théorème rigide : Le principe de superposition, qui est la partie essentielle dans la démonstration du théoreme d'Ambrosio.

Posons $\Gamma_T = C\left([0,T];\mathbb{T}^d\right)$ et on définit $e_t : \Gamma_T \to \mathbb{T}^d$ comme l'application d'évaluation

$$e_t : \gamma \longmapsto \gamma(t), t \in [0,T]$$

Définition 4.1 (Solution de superposition)**.** *Soit $\eta \in \mathscr{M}_+(\mathbb{T}^d \times \Gamma_T)$ est une mesure concentrée sur l'ensemble des couples (x,γ) tels que γ est une solution de (ODE) qui est absoluement continue, avec $\gamma(0) = x$. On définit*

$$\langle \mu_t^\eta, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \varphi(e_t(\gamma)) d\eta(x,\gamma) \qquad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^d). \tag{35}$$

Par théorème d'approximation, μ_t^η est une mesure : pour tous $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ borélienne, on définit pareillement que la formule (35).

D'abord, on vérifie que $t \mapsto \mu_t^\eta$ est une solution de (PDE) avec la condition initiale $\bar{\mu} := (\pi_{\mathbb{T}^d})_\sharp \eta$.

Pour montrer la continuité absolue, on choisit une $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ fixée (donc lipschitzienne), on voit que

$$M = \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \mid \mathbf{b}_t(e_t) \mid d\eta dt < +\infty$$

Alors soient des intervalles quelconques $(a_i, b_i) \subset [0,T]$, on a forcément que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |\langle \mu_{b_i}^\eta, \varphi \rangle - \langle \mu_{a_i}^\eta, \varphi \rangle| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} |\varphi(e_{b_i}(\gamma)) - \varphi(e_{a_i}(\gamma))| d\eta(x,\gamma) \\ &\leq Lip(\varphi) \int_{\cup_i (a_i,b_i)} \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} |\mathbf{b}_t(e_t)| d\eta dt\end{aligned}$$

On peut voir que la terme dans la formule (36) tend vers 0, si $\sum_i (b_i - a_i) \to 0$. Donc on a montré la continuité absolue de l'application $t \mapsto \langle \mu_t^\eta, \varphi \rangle$. Alors par théorème 2.3, l'application $t \mapsto \langle \mu_t^\eta, \varphi \rangle \in W^{1,1}(I)$ pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$.

Il nous reste à évaluer la dérivée de cette application : on voit que pour $\eta-$presque partout

$(x,\gamma) \in \mathbb{T}^d \times \Gamma_T$ l'identité $\gamma'(t) = \mathbf{b}_t(\gamma(t))$ est valide pour $\mathscr{L}^1$-presque partout $t \in [0,T]$. Par le théorème de Fubini-Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \mathbf{1}_{\{(t,\gamma)|\gamma'(t) \neq \mathbf{b}_t(\gamma(t))\}} d\eta dt \\
=&\int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \int_0^T \mathbf{1}_{\{(\gamma,t)|\gamma'(t) \neq \mathbf{b}_t(\gamma(t))\}} dt d\eta \\
=&0
\end{aligned}$$

Donc, on a pour $\mathscr{L}^1$-presque partout $t \in [0,T]$, l'identité $\gamma'(t) = \mathbf{b}_t(\gamma(t))$ est valide pour η-presque partout $(x,\gamma) \in \mathbb{T}^d \times \Gamma_T$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle \mu_t^\eta, \varphi \rangle &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \varphi(e_t(\gamma)) d\eta \\
&= \int_{[0,1[^d \times \widetilde{\Gamma_T}} \langle \nabla \widetilde{\varphi}(e_t(\widetilde{\gamma})), \widetilde{\mathbf{b_t}}(e_t(\widetilde{\gamma})) \rangle d\widetilde{\eta} \\
&= \langle \widetilde{\mu_t^\eta}, \widetilde{\mathbf{b_t}} \nabla \widetilde{\varphi} \rangle_1
\end{aligned}$$

$\mathscr{L}^1$-presque partout $t \in [0,T]$.

Donc on définit μ_t^η est une solution de superposition du (PDE).

Théorème 4.1 (Principe de superposition)**.** *Si $\mu_t \in \mathscr{M}_+(\mathbb{T}^d)$ peut résoudre le (PDE), alors μ_t est une solution de superposition c'est-à-dire qu'il existe un $\eta \in \mathscr{M}_+(\mathbb{T}^d \times \Gamma_T)$ tel que $\mu_t = \mu_t^\eta$ pour tout $t \in [0,T]$.*

La preuve de ce théorème se décompose comme 2 étapes. En la première étape, on mollifie μ_t par rapport à une gaussienne pour obtenir une famille tendue des mesures dont tous ses éléments ont la même masse. Alors on peut utiliser la compacité séquentielle pour choisir une certaine η pour montrer que $\mu_t^\eta = \mu_t$. Dans la deuxième étape, on vérifie que η est concentrée sur l'ensemble des couples (x,γ) tels que γ est une solution de (ODE) qui est absoluement continue, avec $\gamma(0) = x$, c'est-à-dire que μ_t^η est vraiement une solution de superposition.

Démonstration. Etape 1 (Mollification)

On mollifie μ_t et $\mathbf{b}_t$ comme on a fait dans la section 2.2. On a

$$\begin{aligned}
\mu_{l,t}^\epsilon &:= \mu_{l,t} * \rho_\epsilon \quad , \quad & \mathbf{b}_{l,t}^\epsilon &:= \tfrac{\mathbf{b}_{l,t}\mu_{l,t} * \rho_\epsilon}{\mu_{l,t}^\epsilon} \\
\mu_t^\epsilon &:= \mu_{l,t}^\epsilon|_{\mathbb{T}^d} \quad , \quad & \mathbf{b}_t^\epsilon &:= \mathbf{b}_{l,t}^\epsilon|_{\mathbb{T}^d}
\end{aligned}$$

Alors, on a $\mathbf{b}^\epsilon \in L^1([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d))$ et $\mathbf{b}_t^\epsilon$ est lisse.

$$\frac{d}{dt}\mu_t^\epsilon + D_x(\mathbf{b}_t^\epsilon \mu_t^\epsilon) = \frac{d}{dt}\mu_t * \rho_\epsilon + (D_x \cdot \mathbf{b}_t \mu_t) * \rho_\epsilon = 0 \tag{36}$$

parce que μ_t est une solution de (PDE). Et ici, on revient au cas lisse pour le champ de vecteur $\mathbf{b}^\epsilon$.

$$\text{(PDE')} \qquad \frac{d}{dt}\mu_t + D_x(\mathbf{b}_t^\epsilon \mu_t) = 0 \quad \text{avec } t \in I$$

$$\text{(ODE')} \qquad \begin{cases} x'(t) = \mathbf{b}^\epsilon(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{avec } x_0 \in \mathbb{T}^d$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz et la théorème 3.2, on a

$$\mu_t^\epsilon = X^\epsilon(t,\cdot)_\sharp \mu_0^\epsilon \tag{37}$$

Ensuite, on définit

$$\eta^\epsilon := (x, X^\epsilon(\cdot, x))_\sharp \mu_0^\epsilon \tag{38}$$

$(\eta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,1[}$ est bornée parce que μ_0^ϵ est bornée et

$$\begin{aligned}
|\eta^\epsilon| &= \mu_0^\epsilon(\mathbb{T}^d) \\
&= \int_{[0,1[^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y)d\mu_0(y)dx \\
&= \int_{[0,1[^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(u)dud\mu_0(y) \qquad x = y + u \\
&= \mu_0(\mathbb{T}^d)
\end{aligned}$$

Par la proprosition 2.1 , il existe une fonction convexe croissante telle que,

$$\frac{\Theta(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \Theta(|\mathbf{b}|_t(x))d\mu_t dt < +\infty.$$

on suppose $\nu = \rho(x-\cdot)\mu_t$ et utilise l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
&\Theta(|\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(x)|)\mu_{l,t}^\epsilon(x) \\
= \;& \Theta\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(y)|\rho_\epsilon(x-y)d\mu_{l,t}(y)}{\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y)d\mu_{l,t}(y)}\right) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\epsilon(x-y)d\mu_{l,t}(y) \\
\leq \;& \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(|\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(y)|)d\nu \\
= \;& \int_{\mathbb{R}^d} \Theta(|\mathbf{b}_{l,t}^\epsilon(y)|)\rho_\epsilon(x-y)d\mu_{l,t}(y) \\
= \;& (\Theta(|\mathbf{b}_{l,t}|)\mu_{l,t}) * \rho_\epsilon(x).
\end{aligned}$$

On definit

$$\Psi(x,\gamma) := \begin{cases} \int_0^T \Theta(|\dot{\gamma}|)dt & \text{si} \quad \gamma \in \mathrm{AC}([0,\mathrm{T}];\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \\ +\infty & \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_{\mathrm{T}} \setminus \mathrm{AC}([0,\mathrm{T}];\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \end{cases}$$

et definit $\widetilde{\Psi}(\gamma) := \Psi(e_{\mathbb{T}^d},\gamma)$ pour chaque $\gamma \in \Gamma_T$. C'est une fonction coercive. En fait, pour chaque c positive, on prend $\widetilde{A} = \{\widetilde{\Psi} \leq c\}$,

$$\sup_{\gamma\in\widetilde{A}} \widetilde{\Psi}(\gamma) = \sup_{\gamma\in\widetilde{A}} \int_0^T \Theta(|\dot{\gamma}_i|)dt \leq c \tag{39}$$

En utilisant la proposition 2.1, $(\dot{\gamma})_{\gamma\in\widetilde{A}}$ est uniformément intégrable. Donc $(\gamma)_{\gamma\in\widetilde{A}}$ est équicontinue, par la proposition 2.2 et

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leq \int_x^y |\dot{\gamma}|dt \qquad \forall x, y \tag{40}$$

On a aussi $(\gamma)_{\gamma\in\widetilde{A}}$ est uniformément bornée, alors $\widetilde{A}$ est compact par théorème d'Ascoli. Donc $A = \{\Psi \leq c\}$ est compacte aussi, Ψ est une fonction coercive.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} (\int_0^T \Theta(|\dot{\gamma}|)dt) d\eta^\epsilon(x,\gamma) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} \int_0^T \Theta|b_t^\epsilon(X^\epsilon(t,x))| d\mu_0(x)dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \Theta|b_t^\epsilon(x)| d\mu_t^\epsilon(x)dt \\
&\leq \int_0^T \int_{[0,1[^d} (\Theta|b_{l,t}|\mu_{l,t}) * \rho_\epsilon(x)dxdt \\
&= \int_0^T \int_{[0,1[^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\Theta(|b_{l,t}(y)|\mu_{l,t}(y))\rho_\epsilon(x-y)dydxdt \\
&\leq \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \Theta(|b_t(y)|) d\mu_t(y)dt
\end{aligned}$$

alors, $\int \Psi d\eta^\epsilon$ est uniformément bornée pour $\forall \epsilon \in (0,1)$, donc en appliquant le théorème 2.5, $(\eta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,1[}$ est une famille tendue des mesures qui ont la même masse $\forall \epsilon \in]0,1[$. En appliquant le théorème 2.4(Prohorov) on obtient que $(\eta^\epsilon)_{\epsilon\in]0,1[}$ relativement séquentiellement compact par rapport à la convergence étroite.

alors, il existe suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tends vers 0 et une mesure η sur l'espace $\mathbb{T}^d \times \Gamma_T$ telle que

$$\eta^{\epsilon_n} \Longrightarrow \eta, \tag{41}$$

lorsque $n \to \infty$. Donc $\mu_t^{\eta_{\epsilon_n}} \longrightarrow \mu_t^\eta$, par la formule (35).

D'autre part,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu_t^{\eta^\epsilon} &= \int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} \varphi(e_t(\gamma))d\eta^\epsilon(x,\gamma)\\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(X^\epsilon(t,x))d\mu_0^\epsilon(x)\\ &= \int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu_t^\epsilon\end{aligned}$$

Donc $\mu_t^{\eta_\epsilon} = \mu_t^\epsilon$.

Parce qu'on a

$$\mu_t^\epsilon = \mu_t * \rho_\epsilon \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mu_t$$

dans $D'(\mathbb{T}^d)$. Alors $\mu_t^\eta = \mu_t$.

Etape 2 (μ_t^η est une solution de superposition)
Il suffit de vérifier que

$$\int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} |\gamma(t) - x - \int_0^t \mathbf{b_s}(\gamma(s))\mathrm{d}s| d\eta = 0 \quad \forall t \in [0,T] \tag{42}$$

D'abord,on va prouver que $\forall \mathbf{c} \in C(\mathbb{T}^d)$, on a

$$\int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} |\gamma(t) - x - \int_0^t \mathbf{c}_s(\gamma(s))ds| d\eta(x,\gamma) \leq \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b}(s) - \mathbf{c}(s)| d\mu_s(x)ds \tag{43}$$

Ensuite , comme $C(\mathbb{T}^d)$ est dense dans $L^1(\nu;[0,T]\times\mathbb{T}^d)$, avec

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{T}^d} \varphi(s,x)d\nu(s,x) := \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(s,x)d\mu_s(x)ds$$

alors on peut choisir $\mathbf{c}^n \in C(\mathbb{T}^d)$ telle que $\mathbf{c}^n \longrightarrow \mathbf{b}$ dans $L^1(\nu;[0,T]\times\mathbb{T}^d)$.

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} |\gamma(t) - x - \int_0^t \mathbf{b}_s(\gamma(s))ds| d\eta(x,\gamma)\\ = \ &\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} |\gamma(t) - x - \int_0^t \mathbf{c}_s(\gamma(s))ds| d\eta(x,\gamma)\\ \leq \ &\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b}(s) - \mathbf{c}(s)| d\mu_s(x)ds \quad = 0.\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'inégalité (43). En fait,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^d\times\Gamma_T} |\gamma(t) - x - \int_0^t \mathbf{c}_s(\gamma(s))ds| d\eta^\epsilon(x,\gamma) \\
\leq\ & \int_{\mathbb{T}^d}\int_0^t |\mathbf{b}_s(X^\epsilon(s,x)) - \mathbf{c}_s(X^\epsilon(s,x))| d\mu_0^\epsilon(x) \\
\leq\ & \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b}_s^\epsilon(x) - \mathbf{c}_s^\epsilon x| d\mu_s^\epsilon(x)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{c}_s(x) - \mathbf{c}_s^\epsilon x| d\mu_s^\epsilon(x)ds \\
\leq\ & \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{b}_s(x) - \mathbf{c}_s x| d\mu_s^\epsilon(x)ds + \int_0^t\int_{\mathbb{T}^d} |\mathbf{c}_s(x) - \mathbf{c}_s^\epsilon x| d\mu_s^\epsilon(x)ds
\end{aligned}$$

avec $\mathbf{c}_t^\epsilon := \frac{\mathbf{c}_t\mu_t * \rho_\epsilon}{\mu_t^\epsilon} \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbf{c}_t$, uniformément sur $\mathbb{T}^n$. Alors on obtient (43).

Donc η est concentrée sur l'ensemble des couples (x,γ) tels que γ est une solution de (ODE) qui est absoluement continue, avec $\gamma(0) = x$, donc μ_t est une solution de superposition. □

5 ODE VS. PDE

Finalement, on termine ce texte par la démonstration du théorème 1.1 en utilisant le théorème 4.1.

Démonstration. On montre d'abord l'implication $(b) \Rightarrow (a)$. Pour chaque $x \in A$, on choisit $\bar{\mu} = \delta_x$. S'il existe 2 solutions différentes $X(t)$ et $Y(t)$ du (ODE) avec $X(0) = Y(0) = x$. Alors $\forall\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^d)$,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\delta_{X(t)} &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t))\right) \\
&= \widetilde{\mathbf{b_t}}(\widetilde{X}(t)) \cdot \nabla\widetilde{\varphi}(\widetilde{X}(t)) \\
&= \int \widetilde{\mathbf{b_t}} \cdot \nabla\widetilde{\varphi} d\delta_{\widetilde{X}(t)}
\end{aligned}$$

Donc, $\delta_{X(t)}$ est une solution à valeurs des mesures du (PDE) avec la valeur initiale δ_x. Similairement, on peut prouver que $\delta_{Y(t)}$ est encore une solution du (PDE) avec la valeur initiale δ_x. Alors,

$$\delta_{Y(t)} = \delta_{X(t)} \quad\Longrightarrow\quad X = Y.$$

Réciproquement, par le principe de superposition, on peut représenter chaque solution μ_t par une solution de superposition. Donc il existe une mesure η concentrée sur l'ensemble des couples (x,γ) tels que γ est une solution de (ODE) qui est absoluement continue telle que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi d\mu_t = \int_{\mathbb{T}^d}\left(\int_{\Gamma_T} \varphi(\gamma(t)) d\eta_x(\gamma)\right) d\mu_0(x) \tag{44}$$

avec η_x est la mesure de probabilité concentrée sur l'ensemble des solutions absoluement continue du (ODE) qui commence par x. Lorsque a est satisfiée, les mesures η_x sont uniques pour tous $x \in A$. (En fait, η_x est la masse de dirac concentrée sur le unique chemin qui résout le (ODE)). Donc la solution (de superposition) de (PDE) est aussi unique.

$\square$

Remarque 5.1. *La définition de μ_t^η ne dépend pas de x, qui nous conduit de penser sa projection de η sur Γ_T séparament. D'autre part, on peut aussi considérerles mesures σ sur Γ_T, qui sont concentrées sur l'ensemble des solutions du (ODE), avec la condition initiale x fixée. Ces 2 points de vues sont équivalentes parce que si on se donne une mesure η sur l'espace $\mathbb{T}^d \times \Gamma_T$, on peut construire σ par projeter η sur Γ_T. Si on se donne une η, on peut considérer la probabilité conditionnelle η_x, concentrée sur l'ensemble des solutions du (ODE) qui commence par x et est induit par la variable aléatoire $e_0 : \gamma \mapsto \gamma(0)$ dans Γ_T et par la loi $\bar{\mu}$, c'est-à-dire que*

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \Gamma_T} \varphi(x,\gamma) d\mu(x,\gamma) := \int_{\mathbb{T}^d} \left(\int_{\Gamma_T} \varphi(x,\gamma) d\eta_x(\gamma) \right) d\bar{\mu}(x). \tag{45}$$

6 Conclusion

La partie la plus intéressante dans ce texte est le principe de superposition, qui est prouvé par la méthode de mollification et le théorème de Prohorov. De plus, on le démontre dans la situation compacte ($\mathbb{T}^d$), qui s'agit des solutions $\mathbb{Z}^d$-périodiques. Ce qui est le plus difficile, c'est que l'on doit relever $\mathbb{T}^d$ à $\mathbb{R}^d$ pour bien régler tous les calculs, surtout la convolution entre une fonction de plateau $\mathbb{Z}^d$-périodique définie sur $\mathbb{R}^d$ et une mesure (distribution) sur $\mathbb{T}^d$. Dans l'article original de L.Ambrosio (cf la référence [**1**]), il manque la démonstration de l'unicité des solutions du (PDE) si $\mathbf{b_t}$ est lipchitzienne. Et on retrouve sa preuve dans la référence [**2**] (proposition 8.1.7). L'unicité dans le cas $\mathbb{T}^d$ est impliquée par l'unicité dans le cas $\mathbb{R}^d$, donc on le fait directement dans $\mathbb{R}^d$. En point de vue de la géométrie riemanienne, $\mathbb{T}^d$ peut se plonger dans un espace euclidien. Donc le principe de superposition est possible d'être généralisé pour les variété compacte abstraite.

Le théorème d'Ambrosio nous donne une méthode pour déterminer si les solutions de (PDE) sont uniques dans une situation assez générale, à l'aide de l'équation différentielle ordianaire qui ont le même champ de vecteur. Mais son application n'est pas assez extensive parce que le problème de l'unicité pour les systèmes planaires est connû seulement dans les situations assez spéciales, par exemple $\mathbf{b}$ est Lipschitzienne ou $\mathbf{b}$ possède d'autre régularité (cf les pages 12-18 de la référence [**1**]).

Références

[1] Ambrosio, L.(2005). *Transport Equation and Cauchy problem for non-smooth vector fields*, Scuola Normale Superiore

[2] Ambrosio, L.and Gigli,N. and Savaré,G.(2008). *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*, Scuola Normale Superiore

[3] Cinlar. E.(2010). *Probabilities and Stochastics*, Springer, GTM261

[4] Evans, L.C.(2010). *Partial Differential Equations* GSM 19.

[5] Dudley. R.M.(2004). *Real Analysis and Probability*, Cambridge University Press

[6] Figalli,A.(2012). *Autour des Inégalités Isopérimétriques*, Ecole Polytechnique

[7] Hatcher. A.(2001). *Algebraic Topology*, Cambridge University Press

[8] Lerner. N.(2014). *Elements of Graduate Analysis* Cours de l'université Paris 6

[9] Meyer, P.A.(1996). *Probabilities and Potentials*, Blaisdell Publishing Company

[10] Rudin, W.(1991). *Functional Analysis*, McGraw Hill Book Company

[11] Rudin, W.(1991). *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill Book Company