Progressions arithmétiques dans les ensembles d'entiers relatifs

Rémy Mahfouf Lucas Flammant

Résumé

L'objet de ce mémoire est la présentation de divers résultats concernant la présence de progressions arithmétiques arbitrairement longues dans des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$. On dit qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{Z}$ contient une progression arithmétique de longueur k s'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $a + rb \in A$ pour r dans $[\![0, k-1]\!]$. Le théorème de Green-Tao établi en 2004 affirme que l'ensemble des nombres premiers contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Ce résultat a valu à ses auteurs la reconnaissance de la communauté mathématique. Il semble donc naturel de tenter d'identifier les sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ qui vérifient la même propriété. Ce mémoire présente en mélangeant des preuves combinatoires, topologiques et probabilistes plusieurs ensembles contenant des progressions arithmétiques arbitrairement longues. On commencera par étudier de manière combinatoire puis topologique un résultat dû à Van der Waerden sur les partitions finies de $\mathbb{Z}$. Dans un second temps nous étudierons deux résultats équivalents produits par Szemerédi et Furstenberg s'appuyant sur la théorie de la mesure.

Nous tenons à remercier chaleureusement notre responsable d'exposé, Maxence Novel , qui a été d'une grande aide tant par ses explications et orientations que par ses nombreuses relectures de notre travail. La réalisation de ce mémoire lui doit beaucoup.

1 Introduction

On appelle progression arithmétique de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ et de raison $r \in \mathbb{Z}^*$ un k-uplet de la forme $(a, a+r, a+2r, ..., a+(k-1)r)$. On notera $a + [0,k)r$ la progression $(a, a+r, a+2r, ..., a+(k-1)r)$.

On cherche à déterminer si certains types d'ensembles d'entiers contiennent des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Nous allons présenter dans ce mémoire deux résultats principaux, l'un de Van der Waerden (1927) et l'autre Szemerédi (1975) :

Théorème 1. *(Van der Waerden - version infinie). Soit $(S_i)_{1\leq i\leq m}$ une partition finie de $\mathbb{Z}$. Alors l'un des S_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Autrement dit, il existe $i \in \{1, ..., m\}$ tel que pour tout $k \geq 1$ entier, l'ensemble S_i contient une progression arithmétique de longueur k.*

Ce théorème possède un énoncé équivalent pour les parties finies de $\mathbb{Z}$.

Théorème 2. *(Van der Waerden - version finie). Soient $k, m \geq 1$ entiers. Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que pour toute partition finie de $[\![1, N]\!]$ en m sous-ensembles $(S_i)_{1\leq i\leq m}$, l'un des S_i contient une progression arithmétique de longueur k.*

De son côté, Szemerédi a établi un résultat plus fort, mais plus difficile à démontrer.

Théorème 3. *(Szemerédi). Soit $A \subset \mathbb{Z}$ une partie avec densité de Banach strictement positive i.e $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|(A\cap[\![-n,n]\!])|}{2n+1} > 0$. Alors A contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Nous verrons dans la suite que le théorème de Szemerédi implique le théorème de Van der Waerden. On commencera par montrer le théorème de Van der Waerden de manière combinatoire puis topologique. Puis nous approfondirons l'étude des systèmes dynamiques topologiques pour donner une preuve purement topologique du théorème de Van der Waerden généralisable en dimension quelconque. Ensuite nous démontrerons à nouveau le théorème de Van der Waerden par un argument combinatoire de Shelah, qui fournit une meilleure borne de réalisation que la première preuve combinatoire. Enfin nous terminerons par une étude des liens entre le théorème de Szemerédi et les systèmes dynamiques probabilisés.

2 Une preuve combinatoire du théorème de Van der Waerden

Nous allons commencer ce mémoire en donnant une preuve combinatoire du théorème de Van der Waerden. Cette preuve a l'avantage d'être relativement courte et ne nécessite aucun pré-requis particulier. L'idée principale développée par Terence Tao dans [3] est de raisonner par récurrence sur la longueur de la progression. On se sert ensuite d'un motif intermédiaire de progression entre une progression arithmétique de longueur $k-1$ et une progression de longueur k : l'éventail. Commençons par quelques définitions et notations.

Définition 1. *Soit $N, m \geq 1$ deux entiers. On appelle m-coloriage de $\{1, ..., N\}$ une application $c : \{1, ..., N\} \to \{1, ..., m\}$. Les entiers de $\{1, ..., m\}$ sont les couleurs. Soit $c : \{1, ..., N\} \to \{1, ..., m\}$ un coloriage, $k \geq 1$, $d \geq 0$ deux entiers et $a \in \{1, ..., N\}$. On nomme éventail de rayon k, de degré d et de base a le d-uplet de progressions dans $\{1, ..., N\}$ suivant :*

$$(a + [0, k) \cdot r_1, \ \dots \ , a + [0, k) \cdot r_d)$$

avec $r_1, ..., r_d > 0$. Les progressions $(a + [1, k) \cdot r_i)$ sont appelées rayons de l'éventail. On dit de plus que l'éventail est polychromatique si son point de base et tous ses rayons sont monochromatiques (d'une seule couleur) avec des couleurs distinctes. Autrement dit, s'il existe des couleurs deux à deux distinctes $c_0, c_1, ..., c_d \in \{1, ..., m\}$ tel que $c(a) = c_0$, et $c(a + jr_i) = c_i$ pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq k$.

On cherche à montrer le théorème de Van der Waerden, dont la version finie se reformule ainsi en termes de coloriages :

Théorème 4. *(Van der Waerden). Soit $k, m \geq 1$. Alors il existe un entier N tel que tout m-coloriage de $\{1, ..., N\}$ contient une progression arithmétique monochromatique de longueur k.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur k. Le résultat est clairement vrai pour $k = 1$, il suffit de prendre $N \geq 1$, ce qui initialise la récurrence. Soit $k \geq 2$, on suppose le résultat vrai au rang $k - 1$. (on note cette hypothèse de récurrence l'hypothèse R_1).

Maintenant, on montre par récurrence sur d que pour tout $d \geq 0$, il existe un entier positif N pour lequel tout m-coloriage de $\{1, ..., N\}$ contient soit une progression monochromatique de longueur k, soit un éventail polychromatique de rayon k et de degré d. Pour $d = 0$, le résultat est clair. Le résultat pour $d = m$ donnera le résultat voulu car il n'existe pas d'éventail polychromatique de degré supérieur ou égal à m.

Soit donc $d \geq 1$, on suppose le résultat vrai pour $d - 1$ (on appelle cette hypothèse de récurrence l'hypothèse R_2). On définit $N = 4kN_1N_2$, où N_1 et N_2 sont suffisamment grands et seront choisis plus tard. Soit $c : \{1, ..., N\} \to \{1, ..., m\}$ un m-coloriage de $\{1, ..., N\}$. Alors pour tout $b \in \{1, ..., N_2\}$, l'ensemble $\{bkN_1 + 1, ..., bkN_1 + N_1\}$ est un sous-ensemble de $\{1, ..., N\}$ de cardinal N_1. En appliquant l'hypothèse de récurrence R_2, on obtient (si N_1 est suffisamment grand) que $\{bkN_1 + 1, ..., bkN_1 + N_1\}$

contient soit une progression monochromatique de longueur k, soit un éventail polychromatique de rayon k et de degré $d-1$. S'il existe au moins un b pour lequel le premier cas se produit, on a terminé.

Sinon on peut supposer donc que pour tout $b \in \{1, ..., N_2\}$ il existe $a(b), r_1(b), ..., r_{d-1}(b) \in \{1, .., N_1\}$ tels que $c(bkN_1 + a(b)) = c_0(b)$ et $c(bkN_1 + a(b) + jr_i(b)) = c_i(b)$ pour tout $1 \leq j \leq k-1$ et $1 \leq i \leq d-1$. En particulier l'application $b \to (a(b), r_1(b), ..., r_{d-1}(b), c_0(b), ..., c_{d-1}(b))$ est un coloriage de $\{1, ..., N_2\}$ par $m^d N_1^d$ couleurs. Ainsi si N_2 est suffisamment grand, par l'hypothèse R_1 il existe une progression arithmétique monochromatique $b + [0, k-1) \cdot s$ de longueur $k-1$ dans $\{1, ..., N_2\}$, d'une certaine couleur $(a, r_1, ..., r_{d-1}, c_0, ..., c_{d-1})$. On peut considérer sans perte de généralité, quitte à inverser la progression, que s est négatif.

On utilise maintenant une astuce algébrique, similaire à la diagonalisation de Cantor, qui va convertir une progression d'éventails identiques en un nouvel éventail de degré plus grand, les points de base des éventails originaux formant le rayon supplémentaire du nouvel éventail. Posons $b_0 := (b-s)kN_1 + a$ le point de base, qui est dans $\{1, ..., N\}$ par construction de N, et considérons l'éventail (cf figure à la page suivante) :

$$(b_0 + [0, k) \cdot skN_1, b_0 + [0, k) \cdot (skN_1 + r_1), ..., b_0 + [0, k) \cdot (skN_1 + r_{d-1}))$$

de rayon k, de degré d et de base b_0. On observe que les rayons de cet éventail sont monochromatiques. Le premier l'est car :

$$c(b_0 + jskN_1) = c((b + (j-1)s)kN_1 + a) = c_0(b + (j-1)s) = c_0$$

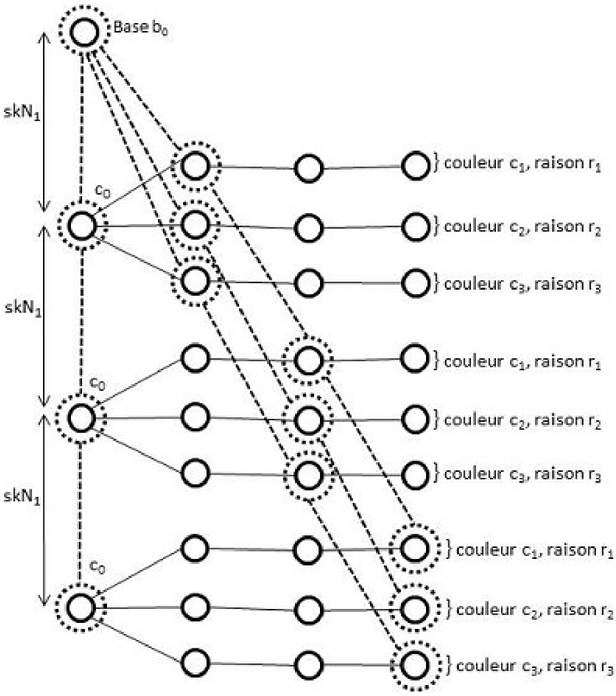
pour tout $1 \leq j \leq k-1$ et les autres rayons le sont car :

$$c(b_0 + j(skN_1 + r_t)) = c((b + (j-1)s)kN_1 + a + jr_t) = c_t(b + (j-1)s) = c_t$$

pour tout $1 \leq j \leq k-1, 1 \leq t \leq d-1$. Si la base b_0 a la même couleur que l'un des rayons, alors on obtient une progression arithmétique monochromatique de longueur k ; si la base b_0 est d'une couleur distincte de tous les autres rayons, alors on a un éventail polychromatique de rayon k et de degré d. Dans les deux cas on a démontré que la propriété est vraie pour d, ce qui clôt la récurrence et la preuve est terminée.

□

On illustre la preuve précédente avec le dessin suivant qui permet de visualiser la construction du nouvel éventail.



Au regard de ce théorème, on peut définir les *fonctions de Van der Waerden* $W(k)$ *et* $W(k, m)$. On pose $W(k) = W(k, 2)$ avec $W(k, m)$ est la valeur minimale de N qui satisfait le théorème pour ces valeurs de m et k. La fonction $W(k)$ relative aux 2-coloriages est celle qui a été le plus étudiée, et il a été établi que $W(2) = 3, W(3) = 9, W(4) = 35$ et $W(5) = 178$. En revanche, on sait peu de chose sur la croissance des fonctions $W(k)$ et $W(k, m)$.

La précédente preuve combinatoire est relativement simple, cependant elle fournit une borne supérieure de $W(k)$ qui croît extrêmement rapidement, donc très peu satisfaisante.

Cette borne croît comme la *fonction d'Ackerman* $A(k)$. Pour définir cette fonction, on définit récursivement $f_1, f_2, \dots$ en posant $f_1(a) = 2a$ et $f_{n+1}(a) = f_n \circ f_n \circ \dots \circ f_n(1)$, où f_n est itérée a fois. On pose ensuite $A(n) = f_n(n)$.

La suite immédiate de notre travail consistera à présenter d'autres preuves du théorème de Van der Waerden.

3 Propriétés élémentaires des systèmes dynamiques topologiques

On étudie ici la notion de système dynamique topologique. Il s'agit de la donnée d'un espace topologique X et d'une fonction continue $f : X \to X$. On notera (X, f) par la suite ce couple formant le système dynamique. L'intérêt particulier que l'on portera aux systèmes dynamiques est de trouver des points ou des ensembles récurrents pour la fonction f. Pour une étude plus détaillée des systèmes dynamiques on consultera [1], source largement utilisée pour la rédaction de cette partie.

Définition 2. *Soit $f : X \to X$ une fonction continue et $x \in X$. On définit son orbite positive $O^+(x) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{f^n(x)\}$. Un point $y \in X$ est une ω-limite de x s'il existe une sous-suite $n_k \to +\infty$ vérifiant $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(x) = y \in X$. L'ensemble des ω-limites de x est noté $\omega(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{f^i(x)\}}$, ce qui correspond à l'ensemble des valeurs adhérences de la suite $(f^i(x))_{i\in\mathbb{N}}$.*
Si f est inversible on définit de même son orbite $O(x) = \bigcup_{n=-\infty}^{n=\infty} \{f^n(x)\}$ ainsi que l'ensemble des α-limites $\alpha(x) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \{f^{-i}(x)\}}$. Enfin on note $\beta(x)$ la réunion $\beta(x) = \alpha(x) \cup \omega(x)$.

Proposition 1. *Les ensembles $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont fermés et stables par f.*

Démonstration. Les ensembles $\omega(x)$ et $\alpha(x)$ sont fermés comme intersection de fermés. De plus si $y \in \omega(x)$ alors on peut prendre une sous-suite associée vérifiant $n_k \to +\infty$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(x) = y$. Comme la fonction f est continue, $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k+1}(x) = f(y)$ donc $f(y) \in \omega(x)$. La preuve est identique pour $\alpha(x)$. □

On continue d'introduire les notions de base reliées au systèmes dynamiques. On s'intéresse à présent aux éléments qui sont leur propre ω-limite.

Définition 3. *Un point x de X est dit positivement récurrent si $x \in \omega(x)$.*

Proposition 2. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. L'ensemble des points récurrents, que l'on note $\mathcal{R}(f)$, est stable par f et contient l'ensemble des points périodiques.*

Démonstration. Supposons que x soit une ω-limite de x. Il existe une sous-suite $n_k \to +\infty$ vérifiant $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(x) = x$. Alors par continuité de f il vient en composant que $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(f(x)) = f(x)$ et $f(x) \in \mathcal{R}(f)$ donc $\mathcal{R}(f)$ est stable par f. Enfin il apparaît clairement qu'un point x périodique appartient à son ω-limite car ses itérés successifs par f repassent de manière périodique par x. □

Une des questions importantes dans l'approche topologique de ce mémoire est de déterminer si le système possède des points récurrents. Dans un espace compact, la réponse est affirmative. En revanche, les outils dynamiques seuls ne donnent pas la proportion de points récurrents. Il est naturel de se demander si être récurrent est une propriété générique ou exceptionnelle. On verra par la suite avec le théorème de Poincaré que sous réserve d'hypothèses raisonnables, presque tous les points (dans un sens à préciser) sont récurrents.

Proposition 3. *Soit (X, f) un système dynamique. Soit x, y et z des éléments de X. Alors on a les implications suivantes :*

1. *Si $y \in \omega(x)$ et $z \in \omega(y)$, alors $z \in \omega(x)$.*
2. *Si f est un homéomorphisme, $y \in \beta(x)$ et $z \in \beta(y)$, alors $z \in \beta(x)$.*

Démonstration. 1. On fixe x, y et z avec $y \in \omega(x)$ et $z \in \omega(y)$. On se donne une sous-suite $n_k \to +\infty$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(x) = y$ et une sous suite $m_k \to +\infty$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{m_k}(y) = z$. Alors $n_k + m_k \to +\infty$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k+m_k}(x) = z$.

2. On utilise à nouveau les suites n_k et m_k. Si les 2 suites divergent toutes les 2 vers $+\infty$ ou $-\infty$ c'est la même démonstration qu'en (i). Sinon quitte à extraire à nouveau une sous suite on peut supposer $n_k + m_k \to +\infty$. Il vient $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k+m_k}(x) = z$.

□

Définition 4. *Soit (X, f) un système dynamique topologique et Y un sous-espace fermé de X, stable par f. On dit que Y est minimal s'il n'admet aucun sous espace fermé strict, non vide et stable par f. Si X est minimal on dit que le système (X, f) est minimal.*

Proposition 4. *Une partie $Y \subseteq X$ d'un compact X est minimale pour f si et seulement si $\forall y \in Y, \overline{O^+(y)} = Y$.*

Démonstration. Soit Y minimal et $y \in Y$. Alors le fermé non vide $\overline{O^+(y)}$ est invariant par f. En effet si $z \in \overline{O^+(y)}$ alors on prend une sous-suite associée $n_k \to +\infty$ avec $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k}(y) = z$. Alors $\lim\limits_{k \to +\infty} f^{n_k+1}(y) = f(z)$ et $f(z) \in \overline{O^+(y)}$. Comme $\overline{O^+(y)}$ est un fermé stable non vide de Y il vaut donc Y tout entier. Réciproquement, soit Z un sous-ensemble fermé non vide de Y invariant par f . On choisit $y \in Z$. Comme Z est stable par f, Z contient $\overline{O^+(y)}$. Alors $\overline{O^+(y)} = Y \subseteq Z$ et on a $Y = Z$. L'ensemble Y est donc minimal. □

Proposition 5. *Soit (X, f) un système dynamique avec X compact. Alors X contient un sous ensemble minimal pour f.*

Démonstration. On utilise ici le lemme de Zorn. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des ensemble des fermés non vides de X stables par f, muni de la relation d'ordre partiel d'inclusion. Alors $\mathcal{C}$ est non vide car il contient X. Soit $S \subseteq \mathcal{C}$ un sous-ensemble totalement ordonné pour l'inclusion. On pose $I = \bigcap_{A \in S} A$. Vérifions que $I \in S$. L'ensemble I est fermé comme intersection de fermés et stable par f comme intersection de sous ensembles stables par f. De plus I est non vide. En effet si $I = \emptyset$ alors $\bigcup_{A \in S} A^C = X$. De ce recouvrement ouvert on extrait un sous recouvrement fini tel que $\bigcup_{i \in [\![1,m]\!]} A_i^C = X$.

Donc $I = \bigcap_{i \in [\![1,m]\!]} A_i = \emptyset$. Mais comme S est totalement ordonnée $I = \bigcap_{i \in [\![1,m]\!]} A_i = A_{i_0} \neq \emptyset$ ce qui est absurde. Finalement $I \in S$. D'après le lemme de Zorn, $\mathcal{C}$ admet un élément minimal C_0. Si il existait $C_1 \subsetneq C_0$ non vide stable et fermé, alors $C_1 \in \mathcal{C}$ ce qui contredirait la minimalité de C_0. $\square$

L'existence d'un ensemble minimal pour f assure en outre l'existence de points récurrents pour f comme l'exprime la proposition qui suit.

Proposition 6. *Soit (X, f) un système dynamique avec X compact. Alors tout point d'un fermé minimal est récurrent. En particulier X possède au moins un point récurrent.*

Démonstration. Soit Y minimal non vide pour f (existe d'après la proposition 5). On prend $y \in Y$. Alors $\overline{O^+(y)} = Y$. On distingue 2 cas :

— Si $y \in O^+(y)$, y est périodique donc récurrent.

— Si $y \notin O^+(y)$, on peut trouver $(n_k)_{k\geq 0}$ suite d'entiers positifs tel que $f^{n_k}(y) \to y$. Si la suite n_k était bornée , on pourrait trouver par séparation un ouvert U contenant y mais aucun des termes de $(f^{n_k}(y))_{k\geq 0}$ ce qui contredit $f^{n_k}(y) \to y$. Donc n_k n'est pas bornée et en extrayant une sous-suite qui tend vers $+\infty$, $y \in \omega(y)$.

Comme X contient un sous-ensemble Y non vide minimal pour f, tout point de Y est récurrent. $\square$

On introduit à présent les outils permettant une démonstration du théorème de Van der Waerden mélangeant combinatoire et topologie .

Lemme 1. *Soit (X, f) un système dynamique avec X compact minimal et f un homéomorphisme. On fixe V un ouvert de X. Alors X peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts de la forme $f^n(V)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Les f^n pour $n \in \mathbb{Z}$ sont homéomorphismes, donc les $f^n(V)$ avec $n \in \mathbb{Z}$ sont ouverts. Supposons que les ouverts $f^n(V)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ ne recouvrent pas X. Alors le complémentaire $X \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} f^n(V)$ est un fermé non vide différent de X invariant par f. Ceci contredit la minimalité de X. Donc les $f^n(V)$ recouvrent X. Par compacité on extrait un recouvrement fini. $\square$

Maintenant on va prouver une version faible du théorème de récurrence multiple topologique de Furstenberg pour les systèmes minimaux. Une version plus forte sera démontrée par la suite.

Théorème 5. *(Théorème de récurrence multiple topologique de Furstenberg - Version faible). Soit (X, f) un système dynamique topologique avec X compact et f un homéomorphisme. Alors pour tout recouvrement ouvert $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ de X et $k \geq 2$, il existe V_α avec $\alpha \in A$ et $x \in X$ tel que V_α contient un sous-ensemble de la forme $f^{[0,k)\cdot r}x := \left\{x, f^r x, ..., f^{(k-1)r}x\right\}$ avec $r > 0$. (Nous appellerons de tels ensembles progressions de longueur k).*

Quitte à considérer un sous-ensemble minimal de X qui existe d'après les résultats précédents, on peut supposer que X est minimal. On raisonne par récurrence sur k. Le résultat est vrai pour $k = 1$ en prenant $x \in X$ quelconque. Ceci initialise la récurrence.
Hérédité : Soit $k \geq 2$, on suppose le résultat vrai pour $k - 1$. On remarque d'abord le fait suivant :

Corollaire 1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique minimal et V un sous-ensemble ouvert de X. Alors V contient une progression de longueur $k - 1$.*

Démonstration. On applique l'hypothèse de récurrence à (X, f) finiment recouvert par des ouverts de la forme $f^n(V)$ (l'existence d'un tel recouvrement est assurée par le lemme précédent). D'après l'hypothèse de récurrence l'un de ces ouverts, disons $f^i(V)$, contient une progression de longueur $k - 1$. En appliquant f^{-i} on se ramène à une progression de longueur $k-1$ dans V. □

A présent on construit à nouveau des éventails.

Définition 5. *Soit (X, f) un système dynamique topologique. Soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X. On définit un éventail de rayon k, de degré d et de base x un d-uplet $(f^{[0,k) \cdot r_1}x, ..., f^{[0,k) \cdot r_d}x)$ de progressions de longueur k avec $r_1, ..., r_d > 0$, et on appelle rayons de l'éventail les progressions $f^{[0,k) \cdot r_i}x$ pour $1 \leq i \leq d$. On dit de plus que l'éventail est polychromatique si les points d'un même rayon sont dans un même ouvert et les rayons et la base vivent dans des ouverts distincts.*

Proposition 1. *Soit (X, f) un système dynamique topologique minimal, et soit $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de X. Alors pour tout $d \geq 0$ on a l'alternative suivante : soit il existe un éventail polychromatique de rayon k et de degré d, soit l'un des ouverts du recouvrement contient une progression arithmétique de longueur k.*

Par compacité, on peut supposer le recouvrement fini. Pour d suffisamment grand,la proposition précédente donne le résultat voulu (si le recouvrement est fini, il n'existe pas d'éventails polychromatiques de degré arbitrairement grands).

Démonstration. On raisonne par récurrence sur d. La proposition est vraie pour $d = 0$, ce qui initialise la récurrence.

Soit $s \geq 1$. On suppose le résultat vrai au rang $d - 1$. Alors il existe des éléments $\alpha_0, ..., \alpha_{d-1} \in A$ deux à deux distincts tels que $x \in A_{\alpha_0}$ et $f^{jr_i}x \in V_{\alpha_i}$ pour tout $1 \leq i \leq d - 1$ et $1 \leq j \leq k$. Comme les f^{jr_i} sont continus, il existe un voisinage V de x dans V_{α_0} tel que $f^{jr_i}V \subset A_{\alpha_i}$ pour tout $1 \leq i \leq d - 1$ et $1 \leq j \leq k$. Par le corollaire précédent, V contient une progression de longueur $k - 1$, disons $f^{[1,k) \cdot r_0}y$. Ainsi, $f^{jr_0}y \in V_{\alpha_0}$ pour tout $1 \leq j \leq k$, et $f^{j(r_0+r_i)}y \in V_{\alpha_i}$ pour tout $1 \leq j \leq k$ et $1 \leq i \leq d-1$. Le point y vit dans un des ouverts V_α. Si α est égal à l'un des $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d$, alors V_α contient une progression de longueur k, et si α est distinct des $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{d-1}$, on obtient un éventail polychromatique de degré d. Ceci achève la récurrence. □

Dans la suite logique de notre démarche passant d'une preuve totalement combinatoire à une preuve totalement dynamique, on va proposer une preuve intermédiaire. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ on pose $\Sigma_m = \{1, .., m\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}$ à valeur dans $[\![1, m]\!]$. Muni d'une distance correctement choisie, Σ_m est un espace métrique.

Proposition 7. *L'ensemble Σ_m est un espace métrique pour la distance définie pour ω ω' dans Σ_m par :*

— $d(\omega, \omega') = 2^{-k}$, $k = \min\{|r|, r \in \mathbb{Z}, \omega(r) \neq \omega'(r)\}$.

— $d(\omega, \omega') = 0$ *sinon.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que d est une distance. Soient ω et ω' tel que $d(\omega, \omega') = 0$. Par la définition de d pour $k \in \mathbb{Z}$ on a $\omega(k) = \omega'(k)$ et $\omega = \omega'$. On obtient la séparation.
On vérifie à présent l'inégalité triangulaire. Soit ω, ω' et ω'' des éléments de Σ_m. Supposons $d(\omega, \omega'') = 2^{-k}$, $d(\omega, \omega') = 2^{-r}$ et $d(\omega', \omega'') = 2^{-i}$.
On suppose dans un premier temps que $k > 0$, $r > 0$ et $i > 0$. Alors ω et ω'' coïncident sur $[\![-k, k]\!]$ mais pas sur $[\![-k-1, k+1]\!]$, ω et ω' coïncident sur $[\![-r, r]\!]$ mais pas sur $[\![-r-1, r+1]\!]$ et ω' et ω'' coïncident sur $[\![-i, i]\!]$ mais pas sur $[\![-i-1, i+1]\!]$. Cela impose $k \geq min(i, r)$ car sinon ω et ω'' coïncideraient sur $[\![-k-1, k+1]\!] \subseteq [\![-min(i, r)-1, min(i, r)+1]\!]$. Il vient $2^{-k} \leq 2^{-min(i,r)} \leq 2^{-i} + 2^{-r}$ et $d(\omega, \omega'') \leq d(\omega, \omega') + d(\omega', \omega'')$. Si l'un des trois entiers k,i ou r est nul, alors au moins un autre est aussi nul et l'inégalité est encore vraie.

□

De plus, cet espace topologique possède des propriétés intéressantes que l'on exploitera par la suite.

Théorème 6. *L'ensemble Σ_m muni de la distance d est compact.*

Démonstration. Pour montrer la compacité, on montre que Σ_m vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass. On se donne donc une suite $(u^n)_{n \geq 0}$ de Σ_m. On va en extraire une sous-suite convergente par le procédé d'extraction diagonale de Cantor. On construit la limite L et l'extraction Φ de la suite par récurrence sur l'entier naturel n.
Initialisation : $n = 0$.
On pose pour i entier de $[\![1, m]\!]$, $A_{0,i,i} = \{r \in \mathbb{N}, u^r(0) = i\}$. Comme $\mathbb{N}$ est infini et $[\![1, m]\!]$ fini, il existe $i_0 \in [\![1, m]\!]$ tel que A_{0,i_0,i_0} est infini.

On pose $L(0) = i_0$ et $\phi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une énumération strictement croissante de A_{0,i_0,i_0}. Enfin on pose $\psi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \phi_0$.

Hérédité : supposons $L(n), L(-n)$, ϕ_n et ψ_n déjà construits.
On pose $A_{n+1,i,j} = \left\{r \in \mathbb{N}, u^{\psi_n(r)}(n+1) = i, u^{\psi_n(r)}(-(n+1)) = j\right\}$. Comme $\psi_n(\mathbb{N})$ est infini et $[\![1;m]\!]^2$ est fini, il existe i_{n+1} et j_{n+1} tel que $A_{n+1,i_{n+1},j_{n+1}}$ est infini.On construit alors $L(n+1) = i_{n+1}$, $L(-(n+1)) = j_{n+1}$ et ϕ_{n+1} une énumération strictement croissante de $A_{n+1,i_{n+1},j_{n+1}}$. Enfin on construit $\psi_{n+1} = \phi_{n+1} \circ \psi_n$.
L'extraction recherchée sera $\Psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante obtenue par $\Psi(n) = \psi_n(n)$. Par construction, $d(L, u^{\Psi(n)}) \leq 2^{-n}$ et L est valeur d'adhérence de la sous-suite $u^{\Psi(n)}$. □

On démontre de manière similaire le théorème suivant.

Théorème 7. *L'ensemble $\Sigma_{m,s} = \{1,..,m\}^{\mathbb{Z}^s}$ des fonctions de $\mathbb{Z}^s$ dans $[\![1,m]\!]$ est muni de la distance d définie par :*

— $d(\omega,\omega') = 0$ *si* $\omega = \omega'$;

— $d(\omega,\omega') = 2^{-r}$, $r = \min\{|i_p|\ \exists(i_1,...,i_s) \in \mathbb{Z}^s |\ \omega((i_1,...,i_s)) \neq \omega'((i_1,...,i_s))\}$

est un espace métrique. De plus cet espace est compact.

A ces espaces topologiques il est nécessaire d'associer une fonction continue pour rentrer totalement dans le cadre des systèmes dynamiques. La proposition suivante donne un exemple de fonction continue de Σ_m dans lui même.

Proposition 8. *Soit $T : \Sigma_m \to \Sigma_m$ définie par : $T(\omega(\bullet)) = \omega(\bullet + 1)$. L'opérateur T est un homéomorphisme de Σ_m que l'on appellera shift ou opérateur de décalage à droite.*

Démonstration. L'opérateur T est continu. En effet la définition de la distance d assure que T est 2-lipschitzien. De plus on définit $S : \Sigma_m \to \Sigma_m$ par : $S(\omega(\bullet)) = \omega(\bullet - 1)$ alors clairement $T \circ S = S \circ T = id_{\Sigma_m}$. S est aussi 2-lipschitzien ce qui donne le résultat. □

Le couple (Σ_m, T) est donc un système dynamique topologique.

On en déduit une nouvelle preuve du théorème de Van der Waerden :

Démonstration. (preuve de Van der Waerden avec la version faible du théorème de récurrence multiple topologique). Soit $c : \mathbb{Z} \to \{1,...,m\}$ un m-coloriage des entiers relatifs. On peut identifier c avec un élément x_c de Σ_m. On rappelle que (Σ_m, d) est compact. L'opérateur S de décalage vers la gauche est l'homéomorphisme inverse de T introduit précédemment. Soit $X = \overline{\{S^n x_c : n \in \mathbb{Z}\}}$. Alors X est aussi compact et est stable par S, donc le couple (X, S) est un système dynamique topologique. On considère le recouvrement de X par les ouverts $V_i = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x(0) = i\}$ pour $i \in [\![1,m]\!]$.

Les V_i sont ouverts car pour $x \in V_i$ et $x' \in \Sigma_m$ tel que $d(x,x') < 1/2$ alors $x' \in V_i$. D'après la version faible du théorème topologique de récurrence multiple, l'un de ces ouverts, disons V_i, contient un sous-ensemble de la forme $S^{[0,k)\cdot r}x$ pour un $x \in X$ et $r > 0$. Comme X est la fermeture de l'orbite $\{S^n x_c : n \in \mathbb{Z}\}$, par continuité de S et comme les V_i sont ouverts, V_i contient en fait un ensemble de la forme $S^{[0,k)\cdot r}S^n x_c$. Ceci implique par construction de V_i que la progression arithmétique $-n-[0,k)\cdot r$ est monochromatique de couleur i, ce qui termine la preuve. □

On remarque que cette preuve dynamique et la précédente preuve combinatoire contiennent les mêmes idées clés (construction d'éventails). L'argumentation est plus conceptuelle dans le cas dynamique, mais elle est plus courte et plus claire. En particulier, elle ne fait pas intervenir de paramètre N.

4 Généralisation et théorème de récurrence topologique de Furstenberg

Nous avons déjà proposé depuis le début de ce mémoire deux preuves distinctes du théorème de Van der Waerden. L'une est purement combinatoire, la seconde mélange la topologie et la combinatoire. On va à présent démontrer le théorème de Van der Waerden d'une manière purement topologique. L'avantage de cette preuve est qu'elle se généralise en dimension quelconque. On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de $\mathbb{N}$. On munit $\mathcal{F}$ d'une relation d'ordre partiel : pour $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ on dit que $\alpha \leq \beta$ si $\forall x \in \alpha, \forall y \in \beta, x \leq y$.

Définition 6. *Soit G un groupe d'homéomorphismes. On dit que G agit de manière minimale sur X si pour tout x de X, l'orbite de x (notée $G.x$) est dense dans X.*

Définition 7. *Soit G un groupe commutatif. On se donne $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de G indexée par $\mathbb{N}$. Pour $\alpha = \{i_1, ..., i_k\} \in \mathcal{F}$ on note T_α l'élément $T_\alpha = T_{i_1} \cdots T_{i_k}$. On dit que $T = (T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un Π-système de G.*

On démontre à présent un résultat central pour relier combinatoire et systèmes dynamiques. Il s'agit d'un résultat dû à Furstenberg.

Théorème 8. *(Furstenberg) Soit G un groupe commutatif d'homéomorphismes agissant de manière minimale sur un compact X. On fixe U un ouvert, $n > 0$ un entier naturel, α un élément de $\mathcal{F}$ et $T^{(1)}, .., T^{(n)}$ des Π-systèmes de G.*
Alors il existe $\beta \in \mathcal{F}$ tel que $\alpha \leq \beta$ et $U \cap T^{(1)}_\beta(U) .. \cap T^{(n)}_\beta(U) \neq \emptyset$.

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit X un compact, U un ouvert non vide de X et G un groupe d'homéomorphismes agissant de manière minimale sur X.*
Alors il existe $g_1, ..., g_m$ éléments de G tel que $\bigcup_{i=1}^m g_i(U) = X$.

Démonstration. On suppose que G agit de manière minimale sur X. Soit U un ouvert non vide et x un point de U. Pour $g \in G$ l'ensemble $g(U)$ est ouvert car g est un homéomorphisme. Alors $\cup_{g\in G} g(U)$ est un ouvert comme réunion d'ouverts. De plus cet ouvert est dense car $\cup_{g\in G} g(x)$ est dense.
Soit z un élément de X. Par minimalité, $\cup_{g\in G} g(z)$ est dense dans X donc rencontre U. On peut trouver $g_0 \in G$ vérifiant $g_0(z) = u \in U$.
Alors $z = g_0^{-1}(u) \in \cup_{g\in G} g(U)$. En conclusion $\cup_{g\in G} g(U)$ est un recouvrement ouvert de X. Par compacité on en extrait un sous-recouvrement fini. □

On prouve à présent le théorème de Furstenberg.

Démonstration. Dans cette preuve on fixe U un ouvert non vide de X. Par minimalité de l'action de G sur X, le lemme précèdent permet de choisir $g_1, ..., g_m$ éléments de G vérifiant $\bigcup_{i=1}^m g_i(U) = X$. On réalise une récurrence sur l'entier n. On raisonne en deux étapes, l'initialisation puis la récurrence.

- Initialisation : $n = 1$.
  - Soit $T = (T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un Π-Système fixé. On construit par récurrence sur k une suite d'ensembles $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :
    $V_0 = U$ et $V_k = T_k(V_{k-1}) \cap g_{i_k}(U)$ avec i_k bien choisi tel que $T_k(V_{k-1}) \cap g_{i_k}(U) \neq \emptyset$ ce qui est possible d'après le lemme précédent.
  - Par construction $T_k^{-1}(V_k) \subseteq V_{k-1}$ et $V_k \subseteq g_{i_k}(U)$
  - Par le principe des tiroirs de Dirichlet on a l'existence de $i \in [\![1, m]\!]$ et $p < q$ plus grand que le plus grand élément de α tel que $V_p \cup V_q \subseteq g_i(U)$
  - On pose $\beta = \{p+1, .., q\} \geq \alpha$ et $W = g_i^{-1}(V_q) \subseteq U$. L'ensemble W est non vide. Alors $T_\beta^{-1}(W) = g_i^{-1}\left(T_{p+1}^{-1}...T_q^{-1}(V_q)\right) \subseteq$
    $g_i^{-1}\left(T_{p+1}^{-1}(V_{p+1})\right)$.
  - De plus $g_i^{-1}\left(T_{p+1}^{-1}(V_{p+1})\right) \subseteq g_i^{-1}(V_p) \subseteq U$ donc $W \subseteq U \cap T_\beta(U)$ donc $U \cap \beta(U) \neq \emptyset$.
- Hérédité : On réalise une récurrence sur k à l'intérieur de la récurrence sur n.

— On suppose que le résultat est vrai au rang n pour tout ensemble de n Π-systèmes, tout ouvert U de X et tout α de $\mathcal{F}$.
On se donne $T^{(1)}$... $T^{(n+1)}$ des Π-Systèmes de G , U un ouvert de X et α un élément de $\mathcal{F}$.

— Pour la récurrence on va construire une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant pour tout k entier naturel $\alpha_k \geq \alpha$, ainsi qu'une suite $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de X tels que :
$V_0 = U$ et $\bigcap_{i=1}^{n+1}(T^{(j)}_{\alpha_k})^{-1}(V_k) \subseteq V_{k-1}$ avec $V_k \subseteq g_{i_k}$ pour i_k bien choisi dans $[\![1, m]\!]$

— On commence par appliquer l'hypothèse de récurrence aux n Π-systèmes $(T^{(n+1)})^{-1}T^{(j)} = ((T^{(n+1)}_i)^{-1} \cdot T^{(j)}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour tous les $j \in [\![1, n]\!]$, à l'ouvert U et à $\alpha \in \mathcal{F}$.
On a alors l'existence de $\alpha_1 \geq \alpha$ tel que :
$V_0 \cap (T^{(n+1)}_{\alpha_1})^{-1}T^{(1)}_{\alpha_1}(V_0) ... \cap (T^{(n+1)}_{\alpha_1})^{-1}T^{(n)}_{\alpha_1}(V_0) \neq \emptyset$

— En composant par $T^{(n+1)}_{\alpha_1}$ l'égalité au dessus on a l'existence pour i_1 bien choisi compris entre 1 et m de l'ensemble V_1 non vide vérifiant $V_1 = g_{i_1}(V_0) \bigcap T^{(1)}_{\alpha_1}(V_0) ... \bigcap T^{(n+1)}_{\alpha_1}(V_0) \neq \emptyset$.

— On réalise à présent la récurrence sur k. Supposons V_{k-1} et α_{k-1} construits. On construit V_k et α_k de la manière suivante : On applique l'hypothèse de récurrence sur n aux n Π-systèmes $(T^{(n+1)})^{-1}T^{(j)} = ((T^{(n+1)}_i)^{-1} \cdot T^{(j)}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ pour tous les $j \in [\![1, n]\!]$,à l'ouvert V_{k-1} et à $\alpha_{k-1} \in \mathcal{F}$. On a alors l'existence de $\alpha_k \geq \alpha_{k-1}$ tel que :
$V_{k-1} \cap (T^{(n+1)}_{\alpha_k})^{-1}T^{(1)}_{\alpha_k}(V_{k-1}) ... \cap (T^{(n+1)}_{\alpha_k})^{-1}T^{(n)}_{\alpha_k}(V_{k-1}) \neq \emptyset$.

— En composant l'égalité par $T^{(n+1)}_{\alpha_k}$ on a pour $i_k \in [\![1, m]\!]$ l'existence d'un l'ensemble V_k ouvert non vide vérifiant :
$V_k = g_{i_k}(V_0) \cap T^{(1)}_{\alpha_1}(V_{k-1}) ... \cap T^{(n+1)}_{\alpha_1}(V_{k-1}) \neq \emptyset$

— L'ouvert V_k et la partie finie α_k vérifient bien les hypothèses requises pour appliquer la propriété de récurrence sur n. On peut donc continuer la construction par récurrence sur k. Par construction on a l'inclusion $V_k \subseteq g_{i_k}(V_0)$

— D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, on a l'existence d'un entier i dans $[\![1, m]\!]$ tel que $V_k \subseteq g_i(V_0)$ pour une infinité de k. On choisit un tel i et deux entiers $p < q$ plus grands que le plus grand élément de α vérifiant $V_p \cup V_q \subseteq g_i(U)$. Alors $W = g_i^{-1}(V_q) \subseteq U$ et W non vide.

— A présent on pose $\beta = \alpha_{p+1} \cup .. \cup \alpha_q$. Alors pour tous les entiers j de $[\![1, n+1]\!]$ les inclusions suivantes sont vraies :

$$(T^{(j)}_\beta)^{-1}(W) = g_i^{-1}(T^{(j)}_{\alpha_q})^{-1}(V_q) \subseteq g_i^{-1}\left(T^{(j)}_{\alpha_{q-1}}(V_{q-1})\right)^{-1} ... \subseteq g_i^{-1}(V_p)$$

$\subseteq U$ et $W \subseteq T^{(j)}_\beta(U)$

— Finalement $W \subseteq \cap_{j=1}^{n+1} T_\beta^{(j)}(U)$ et comme $W \subseteq U$ et W est non vide alors $U \cap_{j=1}^{n+1} T_\beta^{(j)}(U) \neq \emptyset$. Ceci clôt la récurrence.

□

Corollaire 2. *Soit G un groupe commutatif d'homéomorphismes d'un compact métrisable X agissant de manière minimale sur X et $T^{(1)}, .., T^{(n)}$ des Π-systèmes de G. Alors pour tout $\alpha \in \mathcal{F}$ et $\epsilon > 0$, il existe $x \in X$ et $\beta \geq \alpha$ tel que $d(T_\beta^{(j)}(x), x) < \epsilon \ \forall j \in [\![1, n]\!]$.*

Démonstration. On fixe y un élément de X. On applique directement le théorème de Furstenberg aux Π-systèmes $T^{(1)}, .., T^{(n)}$, à α et à la boule ouverte $U = B(y, \epsilon/2)$. On obtient l'existence de $x \in U \cap T_\beta^{(1)}(U) .. \cap {}_\beta^{(n)}(U) \neq \emptyset$. Pour j dans $[\![1; n]\!]$, on a alors clairement $d(T_\beta^{(j)}(x), x) < \epsilon$ car x et $T_\beta^{(j)}(x)$ sont dans la boule U. □

Proposition 9. *Soit T un homéomorphisme d'un compact métrisable X. On suppose que $G = \left\{T^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ agit de manière minimale sur le compact X. On fixe $\epsilon > 0$ et q un entier naturel strictement positif. Alors il existe $x \in X$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout j dans $[\![1; q]\!]$ on a $d(T^{jp}(x), x) < \epsilon$.*

Démonstration. On fixe T un homéomorphisme. Soit $G = \left\{T^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ le groupe d'homéomorphismes du compact X. On considère les Π-systèmes suivants : pour $j \in [\![1; q-1]\!]$ fixé, le Π-système $T^{(j)}$ est la famille où tous les éléments sont identiques et égaux à T^j. On a donc $T^{(j)} = (T^j)_{i \in \mathbb{N}}$.
On fixe $\epsilon \geq 0$ et q un entier naturel. On applique le corollaire précèdent avec $\alpha = \{1\}$ et ϵ. Le choix des Π-systèmes assure que pour $y \in X$ et $\beta \in \mathcal{F}$ quelconque on a $T_\beta^{(j)}(y) = T^{card(\beta)j}(y)$. Le corollaire donne l'existence de $x \in X$ et $\beta \geq \alpha$ vérifiant $\forall j \in [\![1; q-1]\!]$, $d(T^{card(\beta)j}(x), x) < \epsilon$. On a par le choix des Π-systèmes, $T_\beta^{(j)}(x) = T^{card(\beta)j}(x)$. Avec $p = card(\beta) \geq 1$ on obtient $d(T^{jp}(x), x) < \epsilon$ pour tout j dans $[\![0; q-1]\!]$. □

Après ces résultats intermédiaires on peut à présent démontrer un théorème dont découle directement le théorème de Van der Waerden.

Théorème 9. *Soit $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de $\mathbb{Z}$. Alors pour tout entier positif q, on peut trouver un entier $r \in [\![1, m]\!]$ tel que S_i contient une sous-suite arithmétique de longueur q.*

Démonstration. On utilise l'espace déjà introduit $\Sigma_m = \{1, .., m\}^{\mathbb{Z}}$ muni de la distance d. L'espace métrique (Σ_m, d) est compact. Soit u la suite appartenant à Σ_m définie par : si $i \in \mathbb{Z} \cap S_k$ on pose $u(i) = k$. Soit $X = \overline{\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(u)}$ l'espace métrique muni de la distance induite. L'espace X est fermé non vide d'un compact donc il est compact. On commencer par montrer que $G = \left\{T^k, k \in \mathbb{Z}\right\}$ agit de manière minimale sur X. On fixe x et $y \in X$. On

va montrer que $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(x)$ rencontre tout voisinage ouvert de y. Soit U un voisinage ouvert de y. Comme l'orbite de u sous G est dense, il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ et W_0 voisinage ouvert de u bien choisi on a $T^{k_0}(W_0) = U$. De même il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et W_1 un voisinage ouvert de x tel que $T^{k_1}(W_1) = W_0$. Alors $T^{k_0+k_1}(W_1) = U$ et en particulier $T^{k_0+k_1}(x) \in U$. L'orbite de x est dense dans X et l'action de G sur X est minimale.
Pour $k \in [\![1, m]\!]$, on note $A_k = \{\omega \in X, \omega(0) = k\}$. La définition de la distance d assure que si $\omega \in A_k$ et ω' vérifie $d(\omega, \omega') < 1$ alors $\omega' \in A_k$.
On fixe q un entier naturel et $\epsilon = 1/2$. D'après la proposition (10), il existe un élément $x \in X$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que que pour tout j de $[\![1, q-1]\!]$,
$d(T^{jp}(x), x) < 1/2$. De plus pour $j \in [\![1, q-1]\!]$ les fonctions
$\phi_j : y \mapsto d(T^{jp}(y), y)$ sont continues en x donc il existe un voisinage ouvert Y de x tel que $\forall y \in Y, \forall j \in [\![1, q-1]\!]$, $d(T^{jp}(y), y) \leq 1/2$. Y contient un point u' de $\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i(u)$. Alors $T^{jp}(u')(0) = u'(0)$. Il existe donc r entier relatif tel que $u(r) = u(r+p)... = u(r+(q-1)p)$. En conclusion $(r, r+p, ..., r+(q-1)p)$ est une progression arithmétique de longueur q dans une seule des partitions S_k. Ceci clôt la démonstration. □

On en déduit directement le théorème de Van der Waerden.

Théorème 1. *(Van der Waerden) Soit $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de $\mathbb{Z}$. Alors l'un des S_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Démonstration. D'après le théorème précèdent pour $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un entier $i_n \in [\![1, m]\!]$ tel que S_{i_n} contient une progression arithmétique de longueur n. Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $i = i_n$ pour une infinité de n. Alors S_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. □

Un des grands avantages de la preuve dynamique est qu'elle utilise des outils non spécifiques. Cela permet donc de proposer une généralisation simple à une partition de $\mathbb{Z}^s$ pour $s \in \mathbb{N}^*$.

Définition 8. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On dit que la suite $u_0, ...\ u_{p-1}$ de points de $\mathbb{Z}^s$ à p éléments est une progression arithmétique de longueur p si il existe $z_0 \in \mathbb{Z}^s$ tel que pour tout k de $[\![0, p-1]\!]$ on a $u_k = u_0 + kz_0$*

On généralise à présent le théorème de Van Der Warden en dimension s.

Théorème 10. *Soit $s \in \mathbb{N}^*$, $\in \mathbb{N}^*$ et $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$ une partition de $\mathbb{Z}^s$. Alors il existe i dans $[\![1, m]\!]$ tel que la partie S_i contienne une progression arithmétique de longueur q.*

Démonstration. On généralise la preuve donnée pour $s = 1$. Soit l'ensemble $\Sigma = \{1, ..m\}^{\mathbb{Z}^s}$ à nouveau muni de la distance d introduite précédemment. On a vu que c'est un espace métrique compact pour la distance d.

Si z est un élément de $\mathbb{Z}^s$ on pose par analogie avec la preuve précédente l'application $T_z : \Sigma \to \Sigma$ définie par $T_z(\omega(\bullet)) = \omega(\bullet + z)$.
L'application T_z est une bijection de Σ car $T_z \circ T_{-z} = T_{-z} \circ T_z = id_\Sigma$ et par des arguments tout-à-fait similaire au cas $s = 1$ elle est continue de réciproque continue. C'est un homéomorphisme de Σ.
A présent on note u la suite de Σ définie par : pour $(i_1, .., i_s)$ un élément de $\mathbb{Z}^s$, $u((i_1, .., i_s)) = r$ si $(i_1, .., i_s) \in S_r$.
On introduit aussi $A = \{a_1 = (1, 0, ..., 0), a_2 = (0, 1, ..., 0)...a_s = (0, 0, ..., 1)\}$ un ensemble fini de générateurs du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^s$.
Soit G le sous groupe engendré par la famille $(T_a)_{a\in A}$ et $X = \overline{\bigcup_{g\in G} g(u)}$. Cet espace est un fermé d'un compact donc il est compact pour la distance induite. Les mêmes arguments que pour $s = 1$ montrent que G agit de manière minimale sur X. On va appliquer le théorème de récurrence topologique.
On considère les q Π-système suivants : pour j dans $[\![1, q]\!]$ on pose
$T^{(j)} = (T^j_{a_1},\ ...,\ T^j_{a_s}, T^j_{a_1}, ..., T^j_{a_s}...)$ le Π-système définit par $T^{(j)}_i = T^j_{a_r}$ si $i \equiv r \pmod s$.
On applique le corollaire numéro 2 à $\alpha = \{1\}$, $\epsilon = 1/2$ et aux Π-systèmes $T^{(j)}$ pour j dans $[\![1, q]\!]$. Il existe donc $x \in X$ et $\beta \geq \alpha$ tel que $d(T^{(j)}_\beta(x), x) < 1/2$ $\forall j \in [\![1, q]\!]$. Alors pour $j \in [\![1, q-1]\!]$ les fonctions $\phi_j : y \mapsto d(T^{(j)}_\beta(y), y)$ sont continues en x donc il existe un voisinage ouvert Y de x tel que $\forall y \in Y$, $\forall j \in [\![1, q-1]\!]$, $d(T^j_\beta(y), y) \leq 1/2$. Par densité de $\bigcup_{g\in G} g(u)$ dans X l'ensemble Y contient un point $u' = T_{u_0}(u)$ de $\bigcup_{g\in G} g(u)$ avec $u_0 \in \mathbb{Z}^s$. L'homéomorphisme T_β vaut $T_\beta = T_{z_0}$ avec un z_0 un point de $\mathbb{Z}^s$ a coordonnées positives non toutes nulles. Finalement $\forall j \in [\![1, q-1]\!]$ $d(T_{u_0+jz_0}(u), u) \leq 1/2$ ce qui donne la progression $(u_0 + jz_0)_{0\leq j\leq q-1}$ de longueur q dans une unique partie de la partition $(S_i)_{1\leq i\leq m}$.

□

On en déduit le théorème de Van der Waerden en dimensions s.

Théorème 11. *(Van der Waerden- dimension s) Soit $s \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ un entier et $(S_i)_{1\leq i\leq m}$ une partition de $\mathbb{Z}^s$. Alors il existe i dans $[\![1, m]\!]$ tel que la partie S_i contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Démonstration. D'après le théorème précèdent pour $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un entier $i_n \in [\![1, m]\!]$ tel que la partie S_{i_n} contient une progression arithmétique de longueur n. Par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $i = i_n$ pour une infinité de n. Alors S_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. □

La preuve purement dynamique se généralise donc en dimensions quelconque et permet de prouver une extension du théorème de Van der Waerden sans introduire de nouveaux outils topologiques.

5 Argument de Shelah : une autre preuve combinatoire

Dans cette section, on présente une autre preuve combinatoire du théorème de Van der Waerden, due à Shelah [2]. Rappelons un énoncé du théorème de Van der Waerden :

Théorème 2. *Soit $k, m \geq 1$. Alors il existe un entier N tel que tout m-coloriage de $\{1, ..., N\}$ contient une progression arithmétique monochromatique de longueur k.*

Rappelons (voir la section 1) que l'on a défini les fonctions de Van der Waerden $W(k)$ et $W(k,m)$ par $W(k) = W(k,2)$ et $W(k,m)$ est le plus petit entier N qui satisfait le théorème pour ces valeurs de m et k.

L'intérêt de cette nouvelle preuve combinatoire est qu'elle donne une bien meilleure borne pour les fonctions $W(k,m)$ que la première preuve combinatoire, comme nous allons le voir par la suite.

Plutôt que de prouver directement le théorème de Van der Waerden, on va le déduire d'une extension du théorème prouvé par Hales et Jewett en 1963. Pour l'énoncer, on a besoin de quelques définitions.

Dans la suite, on notera $[n]$ l'ensemble $\{1, ..., n\}$.

Définition 9. *Soit A un ensemble fini, $n \geq 1$ un entier. On définit le cube de dimension n sur l'alphabet A comme étant l'ensemble $A^n = A^{[n]} = \{(a_1, ..., a_n) \mid a_i \in A \ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$. De plus, on définit une ligne combinatoire ou simplement ligne, dans A^n, comme étant un ensemble L de la forme :*

$$\left\{(a_1, ..., a_n) \in A^n \mid a_i = a_j \ \forall i,j \in I,\ a_i = a_i^0 \ \forall\ i \notin I\right\},$$

où I est un sous-ensemble non vide de [n] *et a_i^0 un élément fixé de A pour $i \in [n] - I$.*

Notons que chaque ligne de A^n a exactement $\mid A \mid$ éléments. En prenant $A = [k]$ les points $a^1, ..., a^k$ d'une ligne peuvent être renumérotées d'une certaine façon de sorte que $a^j = (a_1^j, a_2^j, ..., a_n^j)$ satisfasse :

$$a_i^j = \begin{cases} j & si\ i \in I \\ a_i^0 & si\ i \notin I \end{cases}$$

Comme chaque ligne contient k éléments, le nombre de lignes dans A^n est :

$$\sum_{I \subset [n], I \neq \emptyset} k^{n-|I|} = \sum_{J \subset [n], J \neq \emptyset} k^{|J|} = (k+1)^n - k^n$$

Par exemple, le cube $[k]^2$ contient $2k+1$ lignes : k lignes "verticales", k lignes "horizontales" et une ligne "diagonale" : $\{(a,a) : a \in A\}$.

Théorème 12. *(Hales-Jawett). Pour tout k et m, il existe un entier positif n tel que si A est un alphabet avec k lettres alors tout m-coloriage $c : A^n \to [m]$ contient une ligne monochromatique.*

Tout comme on a défini les fonctions de Van der Waerden, on peut définir les fonctions de Hales-Jewett $HJ(k, m)$ comme étant la valeur minimale de n qui satisfait le théorème pour les valeurs de k, m considérées.

Voyons comment on peut déduire le théorème de Van der Waerden du théorème de Hales-Jewett. On a besoin d'une bijection $\theta : [k]^n \to [k^n]$ qui envoie toute ligne combinatoire vers une progression arithmétique de longueur k.

Prenons $\theta : [k]^n \to [k^n]$ définie par $(a_i)_1^n \to 1 + \sum_{i=1}^n (a_i - 1)k^{i-1}$. Ainsi, chaque coloriage de $[k]^n$ induit un coloriage $\tilde{c}$ du cube $[k]^n$ en posant $\tilde{c}((a_i)_1^n) = c(\theta((a_i)_1^n))$.

Ensuite, une ligne monochromatique dans le coloriage $\tilde{c}$ est envoyée sur une progression arithmétique monochromatique de longueur k pour le coloriage c de $[k]^n$. On en déduit le théorème de Van der Waerden, et de plus $W(k, m) \leq k^{HJ(k,m)}$.

Avant d'attaquer la démonstration de Hales-Jewett proprement dite, on a besoin de quelques lemmes techniques. Commençons par prouver un lemme connu sous le nom de principe du pigeonnier de Shelah.

Lemme 3. *Soient n et m deux entiers naturels. Si m est suffisamment grand, alors l'assertion suivante est vraie.*

On considère une famille de n coloriages de $c_j : [k]^{[2n-1]} \to [m]$ pour $j = 1, ..., n$. Alors il existe deux familles d'entiers $(a_j)_{1 \leq j \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec $1 \leq a_j < b_j \leq n$ pour tout $1 \leq j \leq n$, telles que, pour tout $1 \leq j \leq n$, on ait :

$$c_j(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) =$$
$$c_j(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, a_{j+1}, b_{j1}, ..., a_n, b_n)$$

Démonstration. On fixe m et on raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ n'importe quel $k \geq m + 1$ convient, ce qui initialise la récurrence.

Pour l'hérédité, supposons la proposition vraie pour n fixé. Soit k_0 un entier qui convient pour n et m. Montrons que l'assertion est vraie pour $n+1$ et m dès qu'on prend $k \geq m^{k_0^{2n}} + 1$.

Considérons une famille de coloriages $c_j : [k_0]^{[2n+1]} \to [m], j = 1, ..., n+1$. Pour $j \in [k]$, on considère le coloriage $c_j : [k_0]^{[2n]} \to [m]$ définit par :

$$c_j : (a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \mapsto c_{n+1}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n, j)$$

Comme on a choisi $k \geq m^{k_0^{2n}} + 1$, par le principe des tiroirs il existe deux entiers $1 \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq k$ tels que, pour tout $(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in [k_0]^{[2n]}$, on ait $c_{a_{n+1}} = c_{b_{n+1}}$. Autrement dit, il existe $1 \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq k$ tels que :

$$c_{n+1}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n, a_{n+1}) = c_{n+1}(a_1, b_1, ..., a_n, b_n, b_{n+1})$$

pour tout $(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in [k_0]^{[2n]}$. Ensuite, pour $1 \leq j \leq n$ on définit ${c'}_j : [k_0]^{[2n+1]} \to [m]$ par :

$$ {c'}_j : (x_1, ..., x_{2n-1}) \mapsto c_j(x_1, ..., x_{2n-1}, a_{n+1}, b_{n+1}). $$

Par hypothèse de récurrence, il existe $1 \leq a_i < b_i \leq k_0$ pour $i = 1, ..., n$ tels que

$$ \begin{gathered} {c'}_j(a_1, b_1, ...a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) = \\ {c'}_j(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) \end{gathered} $$

pour tout j. Alors les nombres $1 \leq a_i < b_i \leq k$ pour $i = 1, ..., n$ ont la propriété voulue.

□

Nous aurons besoin par la suite d'un corollaire du lemme précédent. Avant d'énoncer ce corollaire, nous avons besoin de quelques définitions.

Définition 10. *Etant donnés des entiers n et k, on définit :*

$$ S_0 = \{(a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in [k]^{[2n]} \mid a_i \leq b_i \ \forall i \in [n]\}. $$

On appelle S_0 le sous-ensemble de Shelah de $[k]^{[2n]}$.

Définition 11. *Pour $s = (a_1, b_1, ..., a_n, b_n) \in [k]^{[2n]}$ et $1 \leq j \leq n$, on pose*

$$ s^{j,1} = (a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) \in [k]^{[2n]} $$

et

$$ s^{j,2} = (a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) \in [k]^{[2n]} $$

.

Corollaire 3. *Soient n et m deux entiers. Si k est suffisamment grand alors l'assertion suivante est vraie.*

Soit S_0 le sous-ensemble de Shelah de $[k]^{[2n]}$ et soit $c : S \to [m]$ un coloriage. Alors il existe un point $s \in S_0$ tel que $c(s^{j,1}) = c(s^{j,2})$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Démonstration. On considère un coloriage $c : [k]^{[2n]} \to [m]$. Pour $1 \leq j \leq n$, on définit le coloriage $c_j : [k]^{[2n-1]} \to [m]$ par :

$$ c_j : (a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, x, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n \mapsto c(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, x, x, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n). $$

Par le lemme précédent, il existe des entiers $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $1 \leq a_j < b_j \leq n$ tels que pour tout $1 \leq j \leq n$, on ait :

$$ c_j(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n) = c_j(a_1, b_1, ..., a_{j-1}, b_{j-1}, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, ..., a_n, b_n). $$

On pose alors $s = (a_1, b_1, ..., a_n, b_n)$. Par définition des c_j, ceci revient à dire que $c(s^{j,1}) = c(s^{j,2})$ pour tout $1 \leq j \leq n$. De plus, comme $a_j < b_j$ pour tout $1 \leq j \leq n$, $s \in S_0$. □

Notons $S(n,m)$ la plus petite valeur de k qui pour laquelle la proposition du lemme est vérifiée. La preuve ci-dessous nous donne $S(1,m)=m+1$ et

$$S(n+1,m) \leq m^{S(n,m)^{2n}}+1$$

pour $n \geq 1$. On appelle $S(n,m)$ la *fonction de Shelah.*

Regardons à présent la preuve du théorème de Shelah proprement dite, qui est un énoncé plus fort que le théorème de Hales-Jewett.

Théorème 13. *(Shelah). Etant donné des entiers k et m, il existe un entier minimal n, noté $HJ(k,m)$ tel que tout k-coloriage de $[k]^{[n]}$ contienne une ligne monochromatique. De plus, si $n=HJ(k,m)$ alors $HJ(k+1,m) \leq nS(n, m^{(k+1)^n})$.*

Démonstration. Clairement, $HJ(1,m)=1$. On suppose que $n=HJ(k,m)$ existe et soit $q=S(n,m^{(k+1)^n})$. Soit

$$c : [k+1]^{[nq]} \to [m]$$

un m-coloriage. Nous devons montrer que ce m-coloriage contient une ligne monochromatique. On partitionne $[nq]$ en n intervalles de longueur q de la façon suivante :

$$[nq] = \bigcup_{j=1}^{n} I_j,$$

où $I_j = [(j-1)q+1,...,jq]$. De plus, soit S_0 le sous-ensemble de Shelah de $[q]^{[2n]}$. Pour $s=(a_1,b_1,...,a_n,b_n) \in S_0, x=(x_1,...,x_n) \in [k+1]^{[n]}$ et $l=(j-1)q+i \in I_j$, on pose :

$$e_l = \begin{cases} k+1 & \text{si } i \leq a_j \\ x_j & \text{si } a_j < i \leq b_j \\ k & \text{si } i > b_j \end{cases}$$

On appelle $e_s(x)=e(s,x)=(e_1,...,e_{nq}) \in [k+1]^{[nq]}$ la *s-extension* de x. Pour tout $s \in S_0$, l'application $e_s : [k+1]^{[n]} \to [k+1]^{[nq]}$ est injective, et envoie une ligne de $[k+1]^{[n]}$ sur une ligne de $[k+1]^{[nq]}$.

On utilise le coloriage c pour induire un coloriage $\tilde{c} : S \to [m]^{[k+1]^{[n]}}, s \mapsto \tilde{c}_s$, où $\tilde{c}_s(x)=c(e(s,x))$ pour $x \in [k+1]^{[n]}$. Comme $q=S(n,m^{(k+1)^n})$, par le lemme précédent il existe $s \in S_0$ tel que

$$c(e(s^{j,1},x)) = c(e(s^{j,2},x))$$

pour tout $x \in [k+1]^{[n]}$. Fixons ce point $s=(a_1,b_1,...,a_n,b_n) \in S_0$, et considérons le m-coloriage $[k]^{[n]} \to [m]$ donné par $x \to c(e(s,x))$.
Comme $n=HJ(k,m)$, le cube $[k]^{[n]}$ contient une ligne monochromatique.

Cela signifie, quitte à renuméroter les points, qu'il existe des points $x^1, ..., x^k \in [k]^{[N]}$ et un intervalle $I = [h], h \geq 1$, tel que avec $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j)$ on ait

$$x_i^j = \begin{cases} j & \text{si } 1 \leq i \leq h \\ x_i^0 & \text{si } h < i \leq n \end{cases}$$

où $x_{h+1}^0, ..., x_n^0 \in [k]$. Maintenant, on définit $x^{k+1} = (x_1^{k+1}, ..., x_n^{k+1}) \in [k+1]^{[n]}$ pour prolonger cette séquence :

$$x_i^{k+1} = \begin{cases} k+1 & \text{si } 1 \leq i \leq h, \\ x_i^0 & \text{si } h < i \leq n \end{cases}$$

Alors $\{x^1, ..., x^{k+1}\}$ est une ligne dans $[k+1]^[n]$, et donc $\{e_s(x^1), ..., e_s(x^{k+1})\}$ est une ligne dans $[k+1]^{[nq]}$. Pour terminer la preuve, il faut vérifier que cette ligne est monochromatique, ce qui revient à vérifier que :

$$c(e(s, x^{k+1})) = c(e(s, x^k))$$

.

On prouve ceci par un argument de télescopage. Pour $0 \leq j \leq h$, on définit $y^j = (y_1^j, ..., y_n^j) \in [k+1]^{[n]}$ par

$$y_i^j = \begin{cases} k+1 & \text{si } 1 \leq i \leq j \\ k & \text{si } j < i \leq h \\ x_i^0 & \text{si } h < i \leq n \end{cases}$$

On a en particulier $y^0 = x^k$ et $y^h = x^{k+1}$. Notons que, pour tout j,

$$e(s, y^j) = e(s^{j+1,1}, y^{j+1}) = e(s^{j,2}, y^j)$$

et

$$c(e(s^{j,1}, y^j)) = c(e(s^{j,2}, y^j))$$

.

Ainsi

$$c(e(s, y^0)) = c(e(s^{1,1}, y^1)) = c(e(s^{1,2}, y^1)) = c(e(s, y^1))$$

.

De la même façon, $c(e(s, y^1)) = c(e(s, y^2)) = ... = c(e(s, y^h))$, donc $c(e(snx^k)) = c(e(s, x^{k+1}))$. Ceci termine la preuve. $\square$

Le théorème de Shelah implique que les fonctions de Hales-Jewett ne grandissent pas aussi vite que la fonction d'Ackerman, mais qu'il existe une constante c telle que $HJ(k, m) \leq f_4(c(k+m))$, où f_4 est la quatrième fonction dans la hiérarchie d'Ackerman, c'est à dire la fonction qui suit la fonction tour $n \mapsto 2^{2^{\cdots^{2}}}$ (élevé n fois à la puissance 2). On a donc considérablement amélioré la borne supérieure pour les fonctions de Van der Waerden $W(k, n)$.

6 Aspects probabilistes et théorèmes de Szemerédi

Nous avons déjà montré que dans le cas d'un espace compact, il existe des points récurrents. Cependant il est intéressant se demander quelle est la proportions de ces points. On montre ici un résultat dû à Poincaré qui assure que presque tous les points sont récurrents. On commence par introduire des outils de théorie de la mesure adaptés pour expliquer le comportement dynamique de certaines fonctions continues.

Définition 12. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé et $T : X \to X$ une fonction continue. On dit que $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ est un système dynamique probabilisé si la mesure μ est invariante par T c'est-à-dire si pour tout $A \in \mathcal{B}$ on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. L'invariance de la mesure μ par T revient à dire que la mesure μ est égale à sa mesure image par T.*

Exemple 1. *On munit l'intervalle $[-1, 1]$ de la mesure de Lebesgue μ et on considère l'homéomorphisme $T : x \to -x$. Alors $([-1, 1], \mathcal{B}([-1, 1]), \mu)$ est invariant par T. Cet exemple montre que tous les points sont récurrents d'ordre au plus 2. Cela incite à rechercher une généralisation.*

Le théorème qui suit propose une généralisation du résultat obtenu dans l'exemple précédent.

Théorème 14 (Poincaré)**.** *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé. On fixe A un ensemble mesurable. Alors pour μ-presque tout de x de A, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n(x) \in A$. De plus, pour μ-presque tout x de A, il existe une infinité d'entiers k vérifiant $T^k(x) \in A$.*

Démonstration. On pose $B = \left\{x \in A | T^k(x) \notin A \ \forall k \in \mathbb{N}\right\} = A \setminus \cup_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}(A)$. Alors B est un ensemble mesurable. De plus deux faits apparaissent :

- Les pré-images $T^{-m}(B)$ de B sont disjointes. En effet supposons qu'il existe $m < m + r$ deux entiers positifs et $y \in A$ tel que $T^m(y) \in B$ et $T^{m+r}(y) \in B$. Il suit que $T^r(T^m(y)) \in B \subseteq A$ et par définition de B on a $T^k(y) \notin B$. Ceci est absurde. Finalement les pré-images $T^{-m}(B)$ de B pour $m \in \mathbb{N}$ sont disjointes.
- Les ensembles $T^{-k}(B)$ sont de même mesure car μ est invariante par T.

Comme la mesure totale de X est finie, il en va de même pour A et $\sum_{i=0}^{\infty} \mu(T^{-i}(B)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(B) < \infty$ donc forcément $\mu(B) = 0$. Alors μ-presque tous les points de $A \setminus B$ repassent par A et on a montré la première partie du théorème.

Pour la seconde partie de la preuve on s'inspire de la démonstration déjà réalisée. On pose $B_s = \left\{x \in A | T^{k+s}(x) \notin A \ \forall k \in \mathbb{N}\right\} = A \setminus \cup_{k \in N} T^{-(k+s)}(A)$.

La même preuve nous donne que le pré-images $T^{-k}(B_s)$ sont disjointes et de même mesure. On en déduit que $\mu(B_s) = 0$.
L'ensemble des points de A ne repassant qu'un nombre fini de fois par A est l'ensemble $\cup_{s\in\mathbb{N}}(B_s)$. Par sous additivité, cet ensemble est de mesure nulle, ce termine la preuve du théorème de Poincaré. $\square$

Le théorème de Poincaré permet à présent de faire le lien - sous hypothèses raisonnables - entre théorie probabiliste et systèmes dynamique puisqu'il permet de quantifier la proportion des points récurrents.
On rappelle que pour $f : X \to X$ une fonction continue on dit qu'un point est positivement récurrent si $x \in \omega(x)$. L'ensemble des points récurrents pour f est noté $\mathcal{R}(f)$.

Proposition 10. *Soit X un espace séparable qui admet une base dénombrable d'ouverts, μ une mesure borélienne finie sur X et $f : X \to X$ une fonction continue préservant la mesure μ. Alors μ-presque tout point de X est récurrent.*

Démonstration. On prend une base dénombrable d'ouverts $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X. Un point $x \in X$ est récurent si pour tout voisinage ouvert U de x, l'orbite de x sous f repasse par U une infinité de fois. Étant donné que $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une base d'ouverts, la condition précédente est équivalente à ce que l'orbite de x repasse une infinité de fois par U_i pour tout les U_i contenant x.
D'après le théorème de Poincaré appliqué à U_i le sous ensemble $V_i \subseteq U_i$ des points dont l'orbite intersecte une infinité de fois U_i vérifie $\mu(U_i) = \mu(V_i)$. Alors si on note $X_i = V_i \cup (X \setminus U_i)$, l'ensemble X_i vérifie $\mu(X_i) = \mu(X)$.
Soit i un entier et $x \in \mathcal{R}(f)$. Si $x \in U_i \cap \mathcal{R}(f)$, l'orbite de x sous f repasse une infinité de fois par U_i et $x \in V_i$ et donc $x \in X_i$. Si $x \notin U_i$ alors $x \in X \setminus U_i$ donc $x \in X_i$. Finalement $\mathcal{R}(f) \subseteq \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i$.
Réciproquement on prend $x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Si i est un entier vérifiant $x \in U_i$. Alors $x \notin X \setminus U_i$ donc $x \in V_i$. L'orbite de x repasse une infinité de fois par U_i. D'après le ce qui précède le point x est récurrent. Donc $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i \subseteq \mathcal{R}(f)$ et $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} X_i = \mathcal{R}(f)$. De plus $\mu(\overline{\cap_{i\in\mathbb{N}} X_i}) = \mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{X_i})$. Par sous-additivité $0 \leq \mu(\cup_{i\in\mathbb{N}} \overline{X_i}) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mu(\overline{X_i}) \leq 0$ et en passant au complémentaire $\mu(\cap_{i\in\mathbb{N}} X_i) = \mu(\mathcal{R}(f)) = \mu(X)$. Donc μ-presque tout point est récurrent. $\square$

L'approche probabiliste nous a démontré que si on est capable de munir l'espace topologique X d'une mesure de probabilité qui préserve une fonction continue f, seule une partie négligeable des points ne sont pas récurrents. Il est possible de démontrer le théorème de Van der Waerden de manière probabiliste pour montrer un résultat similaire au corollaire (2). On pourra trouver des éléments de preuve dans [1].

Le théorème de Van der Waerden nous a donné l'exemple d'un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ contenant des progressions arithmétiques arbitrairement longues. On va maintenant donner des résultats plus généraux sur des sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ contenant des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Définition 13. *Soit $A \subseteq \mathbb{Z}$ une partie. On définit sa densité de Banach $\delta(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|(A\cap[\![-n,n]\!])|}{2n+1}$.*

Exemple 2. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ a une densité de Banach de 1 et l'ensemble $2\mathbb{Z}$ des entiers pairs a une densité de Banach de $\frac{1}{2}$. Aussi l'ensemble des nombres premiers positifs et l'ensemble des carrés ont une densité de Banach nulle.*

On présente maintenant le théorème de Szemerédi qui donne une condition suffisante à la présence de progressions arithmétiques arbitrairement longues dans une partie de $\mathbb{Z}$.

Théorème 15. *(Szemerédi) Soit $A \subseteq \mathbb{Z}$ une partie avec densité de Banach $\delta(A)$ strictement positive. Alors A contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues.*

Le théorème de Van der Waerden est alors une conséquence du théorème de Szemerédi.

Proposition 11. *Le théorème de Szemerédi implique le théorème de Van der Warden.*

Démonstration. On commence par montrer que si A et B sont deux parties disjointes de $\mathbb{Z}$ on a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{|(A\cup B)\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1} = \frac{|A\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1} + \frac{|B\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$ on a :$\frac{|A\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1} \leq \delta(A) + \epsilon/2$ et $\frac{|B\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1} \leq \delta(B) + \epsilon/2$. Donc $\forall n \geq n_0$ $\frac{|(A\cup B)\cap[\![-n,n]\!]|}{2n+1} \leq \delta(A) + \delta(B) + \epsilon$. Par passage à la limite supérieure $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + \epsilon$. On fait tendre ϵ vers 0 et $\delta(A\cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
Par récurrence pour $A_1, ..., A_m$ des ensembles deux-à-deux disjoints, on a $\delta(\cup_{i=1}^m A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \delta(A_i)$. En particulier si $(S_i)_{1\leq i\leq m}$ est une partition de $\mathbb{Z}$, l'un des S_i a une densité de Banach strictement positive. Sinon on aurait $1 = \delta(\mathbb{Z}) \leq \sum\limits_{i=1}^{m} \delta(S_i) = \sum\limits_{i=1}^{m} 0 = 0$. Donc l'un des S_i contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues d'après le théorème de Szemerédi. □

Le théorème de Szemerédi possède un équivalent en théorie de la mesure, le théorème de récurrence multiple probabiliste de Furstenberg. On va dans la suite montrer l'équivalence entre ces deux théorèmes.

Théorème 16. *(Thèorème de récurrence multiple probabiliste de Furstenberg) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ et*

$A \in \mathcal{B}$ un ensemble mesurable avec $\mu(A) > 0$. Alors il existe $n > 0$ tel que : $\mu(A \cap T^n(A) ... \cap T^{n(k-1)}(A)) > 0$.

Le théorème de récurrence multiple probabiliste de Furstenberg est le pendant probabiliste du théorème de Szerémedi. Cela permet donc d'étudier les systèmes dynamiques en utilisant les outils de théorie de la mesure. Ces deux théorèmes sont admis dans ce mémoire, leur preuve demandant beaucoup de technique. Cependant on va montrer que les deux théorèmes sont équivalents. Pour montrer cette équivalence on commence par montrer le lemme suivant.

Lemme 4. *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé et $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$. Alors il existe $F \in \mathcal{B}$ un sous-ensemble mesurable vérifiant $\mu(F) > 0$ et pour tout $x \in F$, le sous-ensemble $\gamma_A(x) = \{n \in \mathbb{Z} \mid T^n(x) \in A\}$ de $\mathbb{Z}$ a une densité de Banach strictement positive.*

Démonstration. Soit$N \in \mathbb{N}$. On pose $\delta_N \ : X \to [0, 1]$ définie par :

$$\delta_N(x) = \tfrac{|\{n \in [\![-N,N]\!] \ |T^n(x) \in A\}|}{2N+1}.$$

La fonction δ_N est la moyenne des $\mathbf{1}_A \circ T^n$ pour $n \in [\![-N, N]\!]$ et chacune de ces fonctions a une espérance $\mu(A)$ ce qui par linéarité de l'espérance donne $\mathbf{E}(\delta_N) = \mu(A)$. On pose à présent $A_N = \left\{x \in X \mid \delta_N(x) \geq \frac{\mu(A)}{2}\right\}$.
Alors $\mu(A) = \mathbf{E}(\delta_N) \leq \mu(A_N) \cdot 1 + (1 - \mu(A_N))\frac{\mu(A)}{2} \leq \mu(A_N) + \frac{\mu(A)}{2}$ donc $\mu(A_N) \geq \frac{\mu(A)}{2}$. On pose $F = \limsup\limits_{N \to \infty} A_N = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n$. F contient exactement les points $x \in X$ qui apparaissent dans une infinité de A_n c'est à dire l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels la densité de Banach de $\{n \in \mathbb{Z} \ |T^n(x) \in A\}$ est plus grande que $\frac{\mu(A)}{2}$. On fixe N un entier positif. Par croissance $\mu(\cup_{n \geq N} A_n) \geq \mu(A_N) \geq \frac{\mu(A)}{2} > 0$. La famille $(\cup_{n \geq N} A_n)_{N \geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion. Par passage à la limite sur l'entier N on obtient $\mu(F) \geq \frac{\mu(A)}{2} > 0$. L'ensemble F convient.

□

Théorème 17. *Le théorème de récurrence multiple probabiliste de Furstenberg est équivalent au théorème de Szemerédi.*

La preuve presentée est issue de [4]

Démonstration. Szemerédi $\Rightarrow$ Furstenberg.
Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique probabilisé. Supposons le théorème de Szemerédi démontré. On fixe $A \in \mathcal{B}$ avec $\mu(A) > 0$. On note AP_k l'ensemble des progressions arithmétiques de longueur k dans $\mathbb{Z}$.
Si $a = (a_1, ..., a_k) \in AP_k$ on note $B_a = \{x \in X | \ \forall i \in [\![1, k]\!], T^{a_i}(x) \in A\}$ et $B_k = \cup_{a \in AP_k} B_a$. La partie B_k contient exactement les $x \in X$ pour lesquels l'ensemble $\gamma_A(x) = \{n \in \mathbb{Z} | \ T^n(x) \in A\} \subseteq \mathbb{Z}$ contient une progression arithmétique de longueur k. Grâce au lemme précédent on se donne $F \in \mathcal{B}$ une

partie de X de mesure strictement positive tel que pour tout $x \in F$ l'ensemble $\gamma_A(x) = \{n \in \mathbb{Z} |\ T^n(x) \in A\}$ est de densité de Banach strictement positive. On fixe $x \in F$. En appliquant le théorème de Szemerédi, l'ensemble $\gamma_A(x)$ contient une progression arithmétique de longueur k. On en déduit que $x \in B_k$. On en déduit que $F \subseteq B_k$. Par croissance de la mesure finie μ on a $\mu(B_k) \geq \mu(F) > 0$. De plus B_k est dénombrable donc par σ-additivité il existe $a \in AP_k$ tel que $\mu(B_a) > 0$. On fixe un tel $a = (a_1, ..., a_k) \in AP_k$. On a l'existence de $n > 0$ et $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$ on peut écrire $a_i = b - ni$. Comme $B_a = \{x \in X | \forall i \in [\![1, k]\!], T^{a_i}(x) \in A\}$, on a $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $T^{b-ni}(B_a) \subseteq A$. Donc $\forall i \in [\![0, k-1]\!]$, $T^b(B_a) \subseteq T^{ni}(A)$ donc $T^b(B_a) \subseteq A \cap ... \cap T^{n(k-1)}(A)$. Par croissance et invariance de la mesure μ on a $\mu(A \cap T^n(A) ... \cap T^{n(k-1)}(A)) \geq T(B_a) > 0$.

Furstenberg $\Rightarrow$ Szemerédi.
On suppose le théorème de Furstenberg démontré. On se donne $A \subseteq \mathbb{Z}$ un ensemble avec une densité de Banach strictement positive. Soit $\Sigma_2 = \{1, 2\}^{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Z}$ à valeur dans $\{1, 2\}$ muni de la distance d. On fabrique $u \in \Sigma_2$ définie par $u(i) = 2$ si $i \in A$ et $u(i) = 1$ sinon. Alors les résultats précédents assurent que (Σ_2, d) est un espace métrique compact.
Soit $T : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ l'homéomorphisme de décalage déjà introduit précédemment. On considère le sous espace compact $X = \overline{\{T^n(u) | n \in \mathbb{Z}\}}$ et $E = \{b \in X | b(0) = 2\}$. On va dans un premier temps fabriquer une mesure μ-invariante par T tel que $\mu(E) > 0$.
On pose μ_N la mesure sur X définie par $\mu_N = \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{n=N} \delta_{T^n(u)}$ où δ_x est la mesure de probabilité de Dirac en x. Avec ce choix, $\mu_N(E)$ est la densité usuelle de A dans $[\![-N; N]\!]$. Comme A a une densité de Banach strictement positive il existe une sous-suite $N_j \to \infty$ tel que $\lim\limits_{j \to +\infty} \mu_{N_j}(E) = l > 0$. Par le théorème de Banach-Alaoglu pour les mesures sur un compact, on peut extraire une sous-suite de la suite $(N_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tel que $(\mu_{N_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers une mesure μ. On obtient $\lim\limits_{j \to +\infty} \mu_{N_j}(E) = \mu(E) > 0$. De plus on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \circ T - \mu_n = \frac{\delta_{T^{n+1}(u)} - \delta_{T^{-n}(u)}}{2n+1}$ et donc $\mu_n \circ T - \mu_n \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. En passant à la limite sur la suite extraite $(\mu_{N_j})_{j \in \mathbb{N}}$ la mesure μ est invariante par T. On a donc construit une mesure sur X, invariante par T tel que $\mu(E) > 0$.
On fixe un entier k. Par le théorème de Furstenberg, il existe un entier $n > 0$ tel que $\mu(E \cap T^n(E) ... \cap T^{n(k-1)}(E)) > 0$. En particulier l'intersection d'ouverts $E \cap T^n(E) ... \cap T^{n(k-1)}(E)$ est non vide. Par densité de $\{T^n(u) | n \in \mathbb{Z}\}$ dans X, l'intersection précédente contient un point de la forme $T^{-m}(u)$. Alors la progression arithmétique $(m + in)_{i \in [\![0, k-1]\!]}$ est dans A. Comme k est quelconque, il existe des progressions arithmétiques arbitrairement longues dans A.

□

7 Conclusions

Nous avons présenté dans ce mémoire plusieurs preuves du théorème de Van der Waerden. Ces différentes preuves présentent chacune leurs avantages. La première preuve combinatoire ainsi que l'argument de Shela présentent le grand avantage d'être tout à fait élémentaire. Il n'est pas nécessaire d'introduire des outils élaborés pour les réaliser et elle ne nécessitent que très peu de pré-requis mathématiques. La preuve de Shelah est sensiblement plus difficile à comprendre mais elle donne des bornes de réalisation bien meilleures. La preuve mélangeant topologie et l'utilisation des éventails présente quand à elle l'avantage d'être plus simple à comprendre que la preuve utilisant les éventails seuls car on comprend mieux le rôle des éventails lorsqu'ils sont introduits avec un système dynamique. De plus la version faible du théorème de récurrence multiple topologique est sensiblement plus simple à démontrer que la version forte. La preuve purement topologique quand à elle ne donne aucune borne pour extraire une progression arithmétiques de longueur k et nécessite la démonstration assez technique de la version forte du théorème de récurrence topologique de Furstenberg. Cependant elle se généralise assez simplement aux partitions de $\mathbb{Z}^s$ pour tout entier strictement positif s permet même de choisir la direction de ces progressions arithmétiques. La dernière partie de ce mémoire montre les liens étroits entre les systèmes dynamiques topologiques et les systèmes dynamiques probabilisés comme le montre l'équivalence entre le théorème de récurrence probabiliste de Furstenberg et le théorème de Szemerédi. On pourra donc envisager des études tirant profit des résultats déjà disponibles dans chacun des deux domaines.

Références

[1] Michael Brin and Garrett Stuck. *Introduction to Dynamical Systems.* Cambridge University Press, 2002.

[2] S.Shelah. Primitive recursive bounds for van der waerden numbers. *Journal of the American Mathematical Society*, 1, 1998.

[3] T.Tao. The ergodic and combinatorial approches to szereméi's theorem. *CRM Proceeding and Lectures Notes*, 43, 2007.

[4] Yufei Zhao. Szemerédi's theorem via ergodic theory, April 2011.