

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

Propriétés asymptotiques des marches aléatoires indexées par un arbre

Shen LIN

Directeur de thèse : Jean-François LE GALL

Octobre 2012

Ce texte est une introduction à certaines propriétés asymptotiques des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d , indexées par un arbre aléatoire fini. Nous commençons par introduire les arbres de Galton-Watson et leur description en utilisant la fonction de contour. Ensuite, notre modèle de branchement spatial est défini comme une marche aléatoire branchante dont la structure généalogique est donnée par un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir n arêtes. On formule une conjecture sur les différents comportements, quand n tend vers l'infini, du nombre de points visités par cette marche aléatoire selon la dimension d variant parmi trois régimes : $d \leq 3$, $d = 4$ et $d \geq 5$. Remarquons que le résultat connu pour la convergence de ce modèle discret vers une limite continue (*le serpent brownien*) ne suffit pas pour résoudre ce problème. Enfin, nous présentons certains arguments heuristiques et des travaux en cours dans le régime sous-critique ($d \leq 3$).

Je voudrais remercier Jean-François Le Gall, mon directeur de thèse, pour m'avoir initié à ce modèle intéressant, pour les explications des points techniques et pour les discussions toujours fructueuses.

Table des matières

1	Définition du modèle	2
1.1	Arbres de Galton-Watson	2
1.2	Fonction de contour et sa limite d'échelle	2
1.3	Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d indexées par un arbre	4
2	Étude du nombre de points visités par une marche aléatoire	5
2.1	Résultats pour une marche aléatoire classique sur \mathbb{Z}^d	5
2.2	Conjecture pour le modèle non trivial	6
3	Autour du régime sous-critique ($d \leq 3$)	7
3.1	Convergence des serpents discrets	7
3.2	Application à notre étude	8

1 Définition du modèle

1.1 Arbres de Galton-Watson

Avant d'introduire la notion d'arbre enraciné plan, définissons l'ensemble

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n,$$

où $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$, et par convention $(\mathbb{N}^*)^0 = \{\emptyset\}$ se réduit à un seul élément \emptyset , qui sera dans notre formalisme d'arbre la *racine* ou l'*ancêtre* de la population. Un élément de \mathcal{U} autre que \emptyset est donc un n -uplet $u = (u_1, \dots, u_n)$, dont la longueur (ou la *génération*) est alors $|u| = n$, et par convention $|\emptyset| = 0$. Si $j \in \mathbb{N}^*$, on note $uj = (u_1, \dots, u_n, j)$ qui est donc un sommet de génération $n + 1$.

Définition 1.1. Un *arbre* (enraciné plan fini) A est un sous-ensemble fini de \mathcal{U} qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in A$;
2. si $uj \in A$, alors $u \in A$;
3. si $u \in A$, il existe un entier $k_u(A) \geq 0$ tel que $uj \in A$ si et seulement si $1 \leq j \leq k_u(A)$.

Les éléments de la forme uj seront interprétés comme les *enfants* du sommet u , avec $k_u(A)$ le nombre de ses enfants. Chaque couple de la forme (u, uj) sera considéré comme une *arête* reliant le sommet u à son enfant uj .

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{N} *sous-critique* (i.e. $\sum k\mu(k) < 1$) ou *critique* (i.e. $\sum k\mu(k) = 1$). Nous excluons systématiquement le cas trivial où μ est la mesure de Dirac en 1.

Définition 1.2. Un μ -*arbre de Galton-Watson* (abrégé en GW_μ dans la suite) est un arbre aléatoire tel que chaque sommet de l'arbre ait un nombre d'enfants de loi μ , et tel que les nombres d'enfants de sommets différents soient des variables aléatoires indépendantes.

Cet arbre représente la généalogie d'une population dont la loi de reproduction est μ . Il est bien connu qu'il y a extinction de la population lorsque $\sum k\mu(k) \leq 1$, et donc l'arbre associé est presque sûrement fini.

Étant donnée une loi de reproduction critique μ , considérons un arbre GW_μ conditionné à avoir n arêtes, ce qui est équivalent à avoir $n + 1$ sommets. On le notera A_n . En particulier, si $\mu = \mu_0$ est la loi géométrique de paramètre $1/2$, i.e. $\mu_0(k) = 2^{-k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il est facile de montrer que A_n est alors un arbre choisi uniformément au hasard dans l'ensemble (fini) de tous les arbres enracinés plans avec n arêtes.

1.2 Fonction de contour et sa limite d'échelle

On peut coder un arbre enraciné plan à n arêtes par une fonction continue C , appelée la *fonction de contour*. Nous la définissons ici de manière informelle :

Définition 1.3. Imaginons que toutes les arêtes soient de longueur unité et considérons une particule issue de la racine \emptyset à l'instant 0, qui se déplace à vitesse unité le long des arêtes de l'arbre. Chaque arête est traversée deux fois, mais dans deux sens différents, et ce parcours en profondeur de l'arbre se fait de gauche à droite. Alors $C(t)$ est, par définition, la distance de la particule à la racine à l'instant $t \in [0, 2n]$. Un exemple est dessiné sur la figure 1.

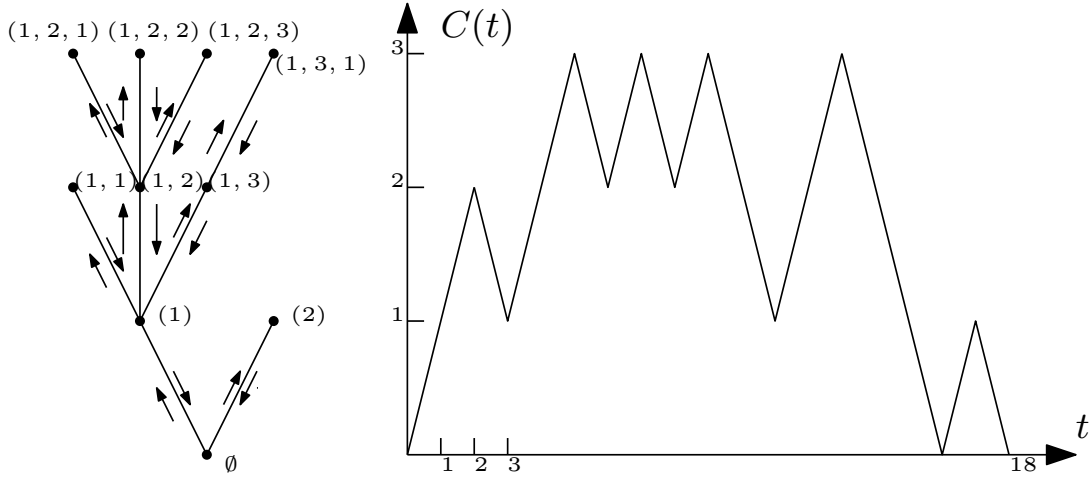


FIG. 1 – Un arbre ayant 9 arêtes et sa fonction de contour

Dans ce codage, le nombre de branches à un niveau k donné coïncide avec le nombre de montées de k à $k + 1$ pour la fonction de contour.

Pour une loi de reproduction critique μ générale, la fonction de contour d'un arbre GW_μ n'est **pas markovienne**. Néanmoins, si on se restreint au cas géométrique $\mu = \mu_0$, la fonction de contour d'un arbre GW_{μ_0} suit une loi de probabilité très simple :

Proposition 1.4. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} issue de 0. Son temps d'atteinte $T = \inf\{n \geq 0 : S_n = -1\}$ est p.s. fini. Alors l'excursion de cette marche aléatoire

$$(S_0, S_1, \dots, S_{T-1})$$

(interpolée de manière linéaire) et la fonction de contour d'un arbre GW_{μ_0} ont la même distribution.

En combinant ce résultat avec le théorème de Donsker, on peut déduire dans le cas particulier $\mu = \mu_0$ le théorème suivant, dû à Aldous [1], qui décrit le comportement asymptotique de grands arbres de Galton-Watson. Pour cela, considérons d'abord $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel standard. Notons $g_1 = \sup\{t \in [0, 1] : B_t = 0\}$ et $d_1 = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$. Rappelons que $B_1 \neq 0$ p.s., et donc $g_1 < 1 < d_1$. Définissons alors l'excursion brownienne (positive) normalisée $(e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ par

$$e_t = \frac{1}{\sqrt{d_1 - g_1}} |B_{g_1 + t(d_1 - g_1)}|$$

pour $t \in [0, 1]$, qui est une fonction positive continue, ne s'annulant qu'en 0 et en 1.

Théorème 1.5. Soit μ une loi de reproduction critique de variance $\sigma_\mu^2 \in (0, +\infty)$. Notons C_n la fonction de contour d'un arbre GW_μ conditionné à avoir n arêtes. Alors

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_n(2nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \left(\frac{2}{\sigma_\mu} \mathfrak{e}_t \right)_{t \in [0,1]}$$

où \mathfrak{e} désigne l'excursion brownienne normalisée, et la convergence a lieu en loi dans l'espace métrique $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+)$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ muni de la norme uniforme.

Remarque 1.6. (1) D'après ce théorème, la distance entre la racine et un sommet typique de l'arbre A_n est de l'ordre de $n^{1/2}$.

(2) De manière similaire, l'excursion brownienne normalisée \mathfrak{e} code un objet aléatoire $A_\mathfrak{e}$ ayant une structure arborescente, qui s'appelle le CRT (*Continuum Random Tree*) d'Aldous¹. Donc, ce théorème nous dit aussi que le CRT est la limite d'échelle des grands arbres de Galton-Watson conditionnés. Voir par exemple [9] pour une clarification de cette remarque.

1.3 Marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d indexées par un arbre

Une fois qu'un arbre GW_μ conditionné à avoir n arêtes, noté A_n , est fixé, nous pouvons introduire une marche aléatoire associée $Z_n = (Z_n(u))_{u \in V(A_n)}$ qui est indexée par l'ensemble $V(A_n)$ des sommets de A_n . Plus précisément, soit

$$\{Y_a : a \text{ une arête de l'arbre } A_n\}$$

une famille de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de probabilité ν sur \mathbb{Z}^d , indépendantes de A_n . Pour chaque sommet u de l'arbre A_n , il existe un unique chemin simple $\pi(\emptyset, u)$ de la racine \emptyset au sommet u . On définit alors une marche aléatoire (de loi ν) à valeurs dans \mathbb{Z}^d indexée par $V(A_n)$ par

$$Z_n(u) = \sum_{a \in \pi(\emptyset, u)} Y_a.$$

Autrement dit, sachant l'arbre A_n , si u est la racine on prend $Z_n(u) = 0$ et ensuite on continue de façon récursive en disant que, si v est le *parent* du sommet u (différent de la racine), la position $Z_n(u)$ est obtenue en ajoutant à $Z_n(v)$ une variable aléatoire indépendante de loi ν .

Il faut noter ici que le même site de \mathbb{Z}^d peut être visité plusieurs fois par la marche, *i.e.* occupé par plusieurs sommets de l'arbre. En plus, il y a deux niveaux d'aléas dans ce modèle : le premier se trouve au niveau du phénomène de branchement, dont la structure est décrite par l'arbre A_n , alors que le deuxième concerne le déplacement spatial de chaque pas de la marche déterminé par la loi ν . On appellera aussi cette marche indexée par A_n un

¹Soit $\sim_\mathfrak{e}$ une relation d'équivalence sur $[0, 1]$ définie par

$$s \sim_\mathfrak{e} t \text{ si et seulement si } \mathfrak{e}_s = \mathfrak{e}_t = \min_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} \mathfrak{e}_r.$$

alors $A_\mathfrak{e}$ est l'espace quotient $[0, 1] / \sim_\mathfrak{e}$.

serpent discret à n pas. Afin de le coder, nous pouvons revenir à la fonction de contour C_n de l'arbre et ajouter des informations spatiales :

À tout entier $j \in \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ correspond un unique sommet, disons u_j , de l'arbre A_n selon le parcours en profondeur. Soit W_n l'interpolation linéaire construite à partir de valeurs prescrites sur les entiers $W_n(j) = Z_n(u_j)$. On obtient donc une fonction continue W_n sur $[0, 2n]$, qui s'appelle la *fonction de contour spatial* du serpent. Il est facile de vérifier que le couple de fonctions (C_n, W_n) caractérise le serpent à n pas.

2 Étude du nombre de points visités par une marche aléatoire

À partir de maintenant, nous nous intéresserons principalement au nombre de points distincts dans \mathbb{Z}^d visités par une marche aléatoire indexée par un arbre. On note R_n ce nombre, *i.e.*

$$R_n = \text{Card}\{Z_n(u) : u \in V(A_n)\},$$

Évidemment que R_n est majoré par $\text{Card } V(A_n) = n + 1$. Ce nombre s'écrit aussi sous la forme

$$R_n = \sum_{i=0}^{2n} \mathbb{1}_{\{W_n(j) \neq W_n(i), \forall j \in \mathbb{Z} \cap [0, i]\}} \quad (2.1)$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} \mathbb{1}_{\{W_n(j) \neq W_n(i), \forall j \in \mathbb{Z} \cap (i, 2n]\}}. \quad (2.2)$$

2.1 Résultats pour une marche aléatoire classique sur \mathbb{Z}^d

Si on se donne une loi de probabilité ν sur \mathbb{Z}^d , et une suite Y_1, Y_2, \dots de variables aléatoires indépendantes de loi ν , on définit la marche aléatoire classique issue de 0 de loi de saut ν en posant $X_0 = 0$ et $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$ pour tout entier $n \geq 1$. Elle peut être à nouveau considérée comme une marche aléatoire indexée par \mathbb{N} , qui correspond au cas trivial d'un arbre de Galton-Watson dont la loi de reproduction est la mesure de Dirac en 1. Alors $R_n = \text{Card}\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ est le nombre de sites visités par la marche avant l'instant n . Dans toute la suite, on supposera que la loi de saut ν est centrée de variance σ_ν^2 finie, et que le support de ν , *i.e.* les vecteurs auxquels ν attribue un poids non nul, engendrent l'espace vectoriel \mathbb{R}^d .

L'étude de R_n quand $n \rightarrow \infty$ a fait l'objet de nombreux travaux, à commencer par un article de Dvoretzky et Erdős, qui ont prouvé le théorème suivant en 1951 [5] :

Théorème 2.1. *Sous l'hypothèse précédente, nous avons*

$$\begin{aligned} \frac{\log n}{n} R_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} c_\nu \text{ si } d = 2, \\ \frac{R_n}{n} &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} c_\nu \text{ si } d \geq 3, \end{aligned}$$

où c_ν est une constante strictement positive dépendant de ν .

Remarque 2.2. (1) En dimension 1, soit $(B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien réel issu de zéro. Grâce au théorème de Donsker, on a immédiatement que $\frac{R_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\max_{t \in [0,1]} B_t - \min_{t \in [0,1]} B_t$ à une constante multiplicative près.

(2) En dimension 2, rappelons que la marche ne retourne pas à l'origine avant l'instant $i + 1$ avec une probabilité de l'ordre de $c_\nu (\log i)^{-1}$, où c_ν est une constante strictement positive dépendant de ν . Du coup, par définition de R_n et la réversibilité de la marche aléatoire,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_n] &= 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\text{la marche visite un nouveau site à l'instant } i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(\text{la marche ne retourne pas à l'origine avant l'instant } i + 1) \\ &\approx \sum_{i=1}^n \frac{c_\nu}{\log i} \\ &\approx \frac{c_\nu n}{\log n} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(3) Dans le cas $d \geq 3$, nous pouvons obtenir cette convergence de $\frac{R_n}{n}$ comme une conséquence simple du théorème ergodique sous-additif de Kingman. En effet, le théorème de Kesten-Spitzer-Whitman [11] précise la limite :

$$\frac{R_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{P}(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \dots) \text{ pour tous } d \geq 1. \quad (2.3)$$

(4) Des résultats analogues sous des hypothèses plus générales sur la loi de saut ν ont été obtenus dans [10].

2.2 Conjecture pour le modèle non trivial

Supposons que A_n est un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction μ critique et de variance finie, conditionné à avoir n arêtes. Par analogie avec le cas classique d'une marche aléatoire indexée par \mathbb{N} , on s'attend au résultat suivant pour le comportement asymptotique de R_n d'une marche aléatoire indexée par A_n .

Conjecture 2.3. Quand $n \rightarrow \infty$, nous avons trois régimes différents :

$$\begin{aligned} \frac{R_n}{n} &\xrightarrow{L^2} c_{\mu,\nu} \quad \text{si } d \geq 5 \\ \frac{\log n}{n} R_n &\xrightarrow{L^2} c_{\mu,\nu} \quad \text{si } d = 4 \\ \frac{R_n}{n^{d/4}} &\xrightarrow{(\text{loi})} c_{\mu,\nu} Z \quad \text{si } d \leq 3 \end{aligned}$$

où $c_{\mu,\nu} > 0$ est une constante dépendant de μ et ν . Dans le cas $d \leq 3$, la limite Z est une variable aléatoire non dégénérée.

L'intuition du résultat en dimension $d \geq 5$ est qu'en grande dimension la marche aléatoire a suffisamment de place et que le nombre de sites distincts est du même ordre de

grandeur que le nombre de sommets de l'arbre. En effet, bien que le théorème ergodique sous-additif ne puisse plus s'appliquer, nous pensons pouvoir montrer, en utilisant la définition de R_n (2.2), une convergence similaire à (2.3), mais au sens L^2 , où le terme de droite serait remplacé par la probabilité qu'un certain serpent "infini" ne retourne plus à l'origine.

En revanche, en dimension $d \leq 3$, l'ordre de grandeur de R_n sera le même que celui du volume de la plus petite boule qui contient tous les sommets de l'arbre, dont le rayon est de l'ordre de $n^{1/4}$. De plus, la variable limite Z devrait s'exprimer en termes du *serpent brownien*. La dernière partie de ce texte va se consacrer au développement de cet argument heuristique.

3 Autour du régime sous-critique ($d \leq 3$)

3.1 Convergence des serpents discrets

Si ξ est une variable aléatoire qui suit la loi de reproduction μ critique et de variance $\sigma_\mu^2 \in (0, +\infty)$, supposons qu'elle satisfait une hypothèse supplémentaire :

$$\exists \text{ une constante } \alpha > 0 \quad \text{t.q.} \quad \mathbb{E}[e^{\alpha\xi}] < \infty.$$

Partant du théorème 1.5, Janson et Marckert ont démontré dans leur article [6] le théorème suivant pour la convergence conjointe de (C_n, W_n) .

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses précédentes, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1)

$$\mathbb{P}(|Y| \geq y) = o(y^{-4})$$

(2)

$$\left(\frac{C_n(2ns)}{n^{1/2}}, \frac{W_n(2nt)}{n^{1/4}} \right)_{0 \leq s, t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \left(\frac{2}{\sigma_\mu} e_s, \sqrt{\frac{2\sigma_\nu^2}{\sigma_\mu}} W_t \right)_{0 \leq s, t \leq 1}$$

dans l'espace produit $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+) \times \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d)$, où $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est le serpent brownien dirigé par l'excursion brownienne e , qui est défini ci-dessous.

Définition 3.2. Sachant l'excursion brownienne normalisée e , le *serpent brownien* $(W_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est un processus dans \mathbb{R}^d à trajectoires continues, gaussien centré de covariance (conditionnelle) donnée par

$$\text{Cov}[W_s, W_t | e] = \min_{s \leq u \leq t} e_u \cdot \text{Id}_{\mathbb{R}^d}, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

En particulier, le serpent brownien est issu de l'origine de \mathbb{R}^d , car $W_0 = W_1 = 0$.

Notons $(u_i, 0 \leq i \leq n)$ les $n + 1$ sommets de l'arbre A_n . Alors on peut introduire la mesure empirique normalisée du serpent discret à n pas,

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \delta_{\sqrt{\frac{\sigma_\mu}{2\sigma_\nu^2}} \frac{Z_n(u_i)}{n^{1/4}}}$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x . Comme un corollaire du dernier théorème, nous avons :

Théorème 3.3. *Sous les mêmes hypothèses, la mesure empirique*

$$\gamma_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} \mathcal{I} \text{ dans l'espace des mesures de probabilité sur } \mathbb{R}^d,$$

où la limite \mathcal{I} s'appelle la mesure de probabilité ISE (integrated super-Brownian excursion) introduite par Aldous dans [2], qui est la mesure d'occupation du serpent brownien. Autrement dit, la distribution aléatoire de masse unité \mathcal{I} est définie par

$$\langle \mathcal{I}, g \rangle = \int_0^1 g(W_t) dt, \quad \forall g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}).$$

3.2 Application à notre étude

Dans ce qui suit, on se contentera de traiter un **cas particulier** pour illustrer des idées, où $\mu = \mu_0$ est la loi géométrique et la loi ν correspond aux sauts vers les $2d$ plus proches voisins de l'origine dans \mathbb{Z}^d .

Alors d'après le théorème 3.1,

$$\left(\frac{W_n(2nt)}{n^{1/4}} \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(loi)} 2^{1/4} W. \quad (3.1)$$

En utilisant le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que cette convergence a lieu presque sûrement. Notons $\mathcal{R}_n = \{Z_n(u_i), 0 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{Z}^d$ l'ensemble de points visités par le serpent discret, et $\mathcal{W} = \{W_t, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^d$ l'analogie pour le serpent brownien, qui est égal au support topologique de la mesure \mathcal{I} .

Soit $\epsilon > 0$. Par (3.1), nous avons p.s. l'inclusion

$$\frac{1}{n^{1/4}} \mathcal{R}_n \subseteq U_\epsilon(2^{1/4} \mathcal{W}) \text{ pour } n \text{ assez grand,} \quad (3.2)$$

où $U_\epsilon(2^{1/4} \mathcal{W}) = \{y \in \mathbb{R}^d : \inf_{t \in [0,1]} |y - 2^{1/4} W_t| \leq \epsilon\}$ est l' ϵ -épaissement de l'ensemble compact $2^{1/4} \mathcal{W}$, qui décroît vers celui-ci quand ϵ tend vers 0. Notons m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , et donc

$$m(U_\epsilon(2^{1/4} \mathcal{W})) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} 2^{d/4} m(\mathcal{W}).$$

Soit

$$\widetilde{\mathcal{R}}_n = \bigcup_{x \in \mathcal{R}_n} \mathcal{C}_x,$$

où \mathcal{C}_x désigne le cube unité ouvert centré en x . Alors l'inclusion (3.2) implique que p.s.

$$\widetilde{\mathcal{R}}_n \subseteq n^{1/4} U_{2\epsilon}(2^{1/4} \mathcal{W}) \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En prenant la mesure de Lebesgue,

$$R_n = m(\widetilde{\mathcal{R}}_n) \leq n^{d/4} m(U_{2\epsilon}(2^{1/4} \mathcal{W})),$$

et le majorant tend vers $(2n)^{d/4} m(\mathcal{W})$ quand ϵ tend vers 0. Ainsi, p.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{n^{d/4}} \leq 2^{d/4} m(\mathcal{W}) \quad (3.3)$$

On conjecture que le majorant $2^{d/4} m(\mathcal{W})$ est en fait la limite exacte.

Conjecture 3.4.

$$\frac{R_n}{n^{d/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} 2^{d/4} m(\mathcal{W}).$$

Remarque 3.5. La variable limite $m(\mathcal{W})$ est non dégénérée si et seulement si la dimension $d \leq 3$. Voir, par exemple, la section VI.1 du livre [8] de Le Gall pour ce résultat. En outre, on sait que $\mathbb{E}[m(\mathcal{W})] < +\infty$ d'après les résultats de grandes déviations pour le rayon du support d'ISE [4].

Une approche possible à explorer est la suivante : l'inégalité (3.3) implique que p.s.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{R_n}{n^{d/4}} - 2^{d/4} m(\mathcal{W}) \right) \vee 0 = 0.$$

En vérifiant l'uniforme intégrabilité, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{R_n}{n^{d/4}} - 2^{d/4} m(\mathcal{W}) \right) \vee 0 \right] = 0.$$

Pour prouver la conjecture 3.4, il suffirait d'avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{R_n}{n^{d/4}} \right] \stackrel{?}{=} 2^{d/4} \mathbb{E} [m(\mathcal{W})], \quad (3.4)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \frac{R_n}{n^{d/4}} - 2^{d/4} m(\mathcal{W}) \right| \right] = 0.$$

Remarque 3.6. D'après [12], ISE a une densité continue quand $d \leq 3$, *i.e.* il existe p.s. une fonction stochastique continue à support compact $(L(x), x \in \mathbb{R}^d)$ telle que

$$d\mathcal{I}(x) = L(x)dx.$$

Donc, l'égalité (3.4) serait obtenue immédiatement si l'on avait une version locale du Théorème 3.3, c'est-à-dire si le temps local du serpent discret convergerait vers la densité L après un changement d'échelle. En dimension 1, ce genre de résultat a été montré en 2006 par Bousquet-Mélou et Janson [3], mais seulement dans le cas particulier mentionné au début de cette partie. Leur méthode combinatoire n'était pas assez puissante pour traiter des cas généraux en dimension 1, et ne pouvait pas non plus se généraliser aux dimensions supérieures.

Remarque 3.7. Au lieu de commencer par un seul arbre aléatoire avec un nombre fixé d'arêtes, il est aussi important de considérer la situation où la structure généalogique est codée par un nombre fini d'arbres GW_μ , mais cette fois non conditionnés. Si le nombre d'arbres est de l'ordre de \sqrt{n} , et si R'_n désigne à nouveau le nombre de sites distincts visités par toutes les marches aléatoires correspondantes, chacune issue de l'origine de \mathbb{Z}^d , on s'attend à avoir des théorèmes limites analogues à ceux de la conjecture 2.3. Ces résultats devraient être liés à certaines études de processus de branchement spatiaux intervenant dans des modèles d'épidémies. Notons que la convergence des densités pour ce nouveau modèle a été récemment prouvée dans l'article de Lalley et Zheng [7].

Références

- [1] D. Aldous. The continuum random tree. III. *Ann. Probab.*, 21(1) :248–289, 1993.
- [2] D. Aldous. Tree-based models for random distribution of mass. *J. Stat. Phys.*, 73(3–4) :625–641, 1993.
- [3] M. Bousquet-Mélou and S. Janson. The density of the ise and local limit laws for embedded trees. *Ann. Appl. Probab.*, 16 :1597–1632, 2006.
- [4] A. Dembo and O. Zeitouni. Large deviations for random distribution of mass. *Proceedings of the IMA Workshop on Random Discrete Structures*, 76 :45–53, 1994.
- [5] A. Dvoretzky and P. Erdős. Some problems on random walk in space. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 353–367, Berkeley and Los Angeles, 1951. University of California Press.
- [6] D. Janson and J.-F. Marckert. Convergence of discrete snakes. *J. Theoret. Probab.*, 18(3) :615–647, 2005.
- [7] S. P. Lalley and X. Zheng. Spatial epidemics and local times for critical branching random walks in dimensions 2 and 3. *Probab. Theory Related Fields*, 148(3-4) :527–566, 2010.
- [8] J.-F. Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [9] J.-F. Le Gall and G. Miermont. Scaling limits of random trees and planar maps. In *Lecture notes for the Clay Mathematical Institute Summer School in Buzios*, 2010.
- [10] J.-F. Le Gall and J. Rosen. The range of stable random walks. *Ann. Probab.*, 19(2) :650–705, 1991.
- [11] F. Spitzer. *Principles of Random Walk*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2001.
- [12] S. Sugitani. Some properties for the measure-valued branching diffusion processes. *J. Math. Soc. Japan*, 41 :437–462, 1989.