Théories NIP

Pierre Simon
sous la direction d'Élisabeth Bouscaren

24 juin 2008

Table des matières

1 Introduction à la théorie des modèles

La théorie des modèles a pour objet l'étude de structures mathématiques, notamment algébriques, mais avec un point de vue qui lui est propre.

Une structure est un ensemble M muni d'un certain nombre de relations R_i d'arités quelconques, de fonctions $f_j : M^{k_j} \to M^{k_j'}$, et de constantes c_l. On écrit $\mathcal{M} = (M, c_k, f_j, R_i)$. On détermine à partir d'une structure M une classe d'ensembles définissables : ce sont les ensembles obtenus par union, complémentaire, projection, produit à partir des relations de départ, des graphes des fonctions et de celui de l'égalité.

Exemple 1.1. *Un corps* k *peut être vu comme une structure* $(k, 0, 1, +, -, \cdot)$. *Les ensembles définissables sont les projections d'ensembles algébriques et leurs combinaisons booléennes.*

L'ensemble $\mathbf{N}$ *des nombres entiers donne lieu à plusieurs structures très différentes du point de vue des ensembles définissables :* $(\mathbf{N}, 0, s)$, $(\mathbf{N}, 0, +)$, $(\mathbf{N}, 0, +, \cdot)$.

De même $\mathbf{Q}$ peut être vu uniquement comme un ensemble ordonné $(\mathbf{Q}, \leq)$, comme un groupe commutatif divisible et sans torsion $(\mathbf{Q}, 0, +)$, comme un corps $(\mathbf{Q}, 0, 1, +, -, \cdot)$ ou enfin comme un corps ordonné $(\mathbf{Q}, 0, 1, +, -, \cdot, \leq)$. À chaque fois, la classe des ensembles définissables, et donc les propriétés modèles théoriques, sont différentes.

Un point de vue équivalent est le point de vue syntaxique, qui fait apparaître les ensembles définissables comme les ensembles solution d'une certaine formule du premier ordre sur une signature Σ. Une signature est la donnée de symboles de relation, de fonctions et de constantes, avec la spécification de leurs arités respectives. Une signature engendre un langage : ensemble des formules que l'on peut écrire à l'aide des symboles de Σ, de l'égalité, de variables auxiliaires, des connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg$ et des quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple 1.2. *Dans le langage de la théorie des corps ($\Sigma = \{0, 1, +, -, \cdot\}$), un exemple de formule qui représente l'ensemble définissable des carrés :*

$$\phi_1(x) = (\exists y)(x = y \cdot y).$$

Dans une structure ordonnée (dont la signature contient le symbole $\geq$), l'ensemble des éléments qui ont un successeur immédiat est définissable :

$$\phi_2(x) = (\exists y)(\forall z)((z \geq x \wedge \neg(z = x)) \to z \geq y).$$

La théorie d'une structure $\mathcal{M}$, notée $T = Th(\mathcal{M})$, est l'ensemble des formules satisfaites dans $\mathcal{M}$. De plus, si T est la théorie d'une structure $\mathcal{N}$, on dit que $\mathcal{N}$ est un *modèle* de T. Deux structures sont dites *élémentairement équivalentes* si elles ont la même théorie. On écrit $\equiv$. Cette relation est, sur les structures infinies, toujours strictement moins fine que la relation d'isomorphisme. Par exemple, deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents.

Exemple 1.3. *Au vu des exemples précédents, si deux ordres sont élémentairement équivalents et si dans l'un aucun élément n'a de successeur immédiat, il en va de même dans l'autre. En effet les deux satisfont la formule $(\forall x)(\neg\phi_1(x))$.*

De même si deux corps k_1, k_2 (de caractéristique différente de 2) sont élémentairement équivalents, si l'un n'admet pas d'extension de degré 2, il en va de même pour l'autre.

Étant donnée deux structures $M \subseteq N$, on dit que l'inclusion est *élémentaire*, et on note $M \prec N$, si pour tout uplet $\bar{a}$ d'éléments de M, $\bar{a}$ satisfait les mêmes formules en tant qu'uplet d'éléments de M qu'en tant qu'uplet d'éléments de N. Par exemple, si on a affaire à des corps, si $a \in M$ n'est pas un carré dans M, il ne doit pas en être un dans N.

On dit qu'une théorie T *élimine les quantificateurs* si toute inclusion de modèles de T est élémentaire. On montre que cela équivaut à la condition que toute formule est équivalente pour T à une formule sans quantificateurs. Cette notion dépend donc du langage choisi et pas uniquement de la classe des ensembles définissables.

On comprend que démontrer l'élimination des quantificateurs dans un langage assez simple soit très utile pour comprendre les ensembles définissables, puisqu'on est ramené à étudier les ensembles définis par des formules sans quantificateurs.

La théorie des modèles est ainsi l'étude des structures à équivalence élémentaire près, lorsque l'algèbre peut être vue comme l'étude des structures à isomorphisme près.

1.1 Compacité

La propriété fondamentale de la logique de premier ordre qui lui donne son intérêt est le théorème de compacité.

Définition 1.4. On dit qu'un ensemble E de formules est *consistant* s'il existe une structure qui satisfait toutes les formules de E.

Théorème 1.5 (Compacité)**.** *Soit* E *un ensemble de formules. Alors* E *est consistant si et seulement si tous ses sous-ensembles finis le sont.*

De manière équivalente, si un ensemble de formules E implique une formule ϕ, alors un sous-ensemble fini de E implique déjà ϕ.

Par exemple, si une formule ϕ du langage des corps est vraie dans tout corps de caractéristique nulle, alors il existe $p \in \mathbf{N}$ telle que ϕ est vraie dans tout corps de caractéristique supérieure à p.

En effet, les axiomes suivants impliquent ϕ :

(1) les axiomes de la théorie des corps ;

(2) pour tout n, la formule

$$1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0,$$

où 1 apparaît n fois.

Par compacité, les axiomes (1) et un nombre fini d'axiomes du second type sont suffisants pour impliquer ϕ, ce qui donne le résultat voulu.

2 Exemples de structures

2.1 Les structures classiques

1. Corps algébriquement clos : $(\mathbf{K}, 0, 1, +, -, \cdot)$.

On travaille dans le langage des corps comme spécifié ci-dessus. Les axiomes de la théories des corps sont exprimables par une formule dans ce langage.

Pour n fixé, la formule suivante exprime le fait que tous les polynômes de degré n ont une racine :

$$(\forall a_0) \dots (\forall a_n)(\exists x)(a_0 \neq 0 \to a_n.x^n + \cdots + a_0 = 0).$$

Les corps algébriquement clos sont exactement les corps qui satisfont toutes ces formules. En particulier, tout corps élémentairement équivalent à un corps algébriquement clos l'est aussi. De même, il est facile de voir que deux corps élémentairement équivalent ont même caractéristique. La réciprque est déjà moins évidente :

Théorème 2.1. *Deux corps algébriquement clos de même caractéristique sont élémentairement équivalents et leur théorie élimine les quantificateurs dans le langage des corps.*

Ainsi, pour démontrer qu'une formule du premier ordre est vraie dans tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle, il suffit de le faire pour $\mathbf{C}$.

Par compacité, une telle formule est vraie dans tous les $\overline{\mathbf{F}_p}$, pour p assez grand.

2. Corps réels clos : $(\mathbf{R}, 0, 1, +, -, \cdot, \leq)$.

On considère maintenant le langage des corps ordonnés.

Un corps ordonné est dit réel clos si tout élément positif admet une racine carrée et tout polynôme de degré impair admet une racine. Ceci est à nouveau une condition exprimable par une infinité de formules du premier ordre.

Théorème 2.2. *La théorie des corps réels clos est complète et élimine les quantificateurs.*

Ceci veut dire que deux corps réels clos sont élémentairement équivalents et qu'une inclusion d'un corps réel clos dans un autre est élémentaire.

Ce résultat est utilisé pour résoudre le 17ème problème de Hilbert.

Théorème 2.3. *Soit* $F(X_1, \ldots, X_n)$ *une fraction rationnelle sur* $\mathbf{R}$*. On suppose que* F *ne prend que des valeurs positives, alors elle peut s'écrire comme somme de carrés de fractions rationnelles.*

Expliquons rapidement la démonstration.

On considère le corps $K = \mathbf{R}(X_1, \ldots, X_n)$ et supposons que F n'y soit pas somme de carrés. L'étude algébrique des corps réels nous dit qu'il existe sur K un ordre tel que F soit négatif. On plonge K ainsi ordonné dans un corps réel clos $\mathcal{R}$. La formule à paramètres dans $\mathbf{R}$

$$(\exists x_1) \ldots (\exists x_n) F(x_1, \ldots, x_n)$$

est fausse dans $\mathbf{R}$, mais vraie dans $\mathcal{R}$ (prendre $x_i = X_i$). Ceci contredit le fait que l'extension $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{R}$ soit élémentaire.

3. Corps valués : $(K, 0, 1, +, -, \cdot, |)$

Ici, $|$ est défini par $a|b \leftrightarrow \mathrm{val}(a) \leq \mathrm{val}(b)$.

Un corps valué est dit *hensélien* si pour tout polynôme P à coefficients dans l'anneau de valuation, toute racine simple de $\bar{P}$ dans le corps résiduel, se remonte en une racine de P dans le corps valué.

Théorème 2.4 (Ax-Kochen)**.** *Deux corps valués henséliens de caractéristique résiduelle nulle sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs corps résiduels d'une part et leurs groupe de valeur d'autre part le sont.*

2.2 Structures existentiellement closes

La théorie des modèles est efficace pour l'étude de structures génériques, ou *existentiellement closes*.

Partant d'une théorie T (ex. corps, A-modules), un modèle M de T est existentiellement clos si pour toute extension $M \subseteq M'$, si $a \in M'$ vérifie une certaine formule sans quantificateurs sur M, on peut trouver un $a' \in M$ satisfaisant la même formule.

Le théoricien des modèle se plaît, lorsqu'on lui donne une théorie, à identifier la classe de ses modèles existentiellement clos. C'est dans cette classe, lorsqu'elle est axiomatisable au premier ordre, que les choses se passent bien et que les structures ont de bonnes propriétés modèle-théoriques. Ainsi, pour étudier des structures quelconques, il est souvent bon de les plonger dans une structure plus grosse existentiellement close.

Par exemple, les anneaux intègres existentiellement clos sont exactement les corps algébriquement clos ; les corps ordonnés existentiellement clos sont les corps réels clos. Dans ces exemples, les objets en question étaient déjà connus des algébristes avant d'être étudiés par les théoriciens des modèles. À l'inverse, de nouvelles structures sont apparues avec ce procédé. Donnons en deux exemples.

1. Corps différentiellement clos.

Un corps différentiel est un corps K muni d'une dérivation ∂ satisfaisant les axiomes naturels.

Un polynôme différentiel est un élément de $K[X, \partial X, \dots, \partial^n X, \dots]$, son ordre est le n maximal tel qu'il contient un monôme faisant intervenir une puissance de $\partial^n X$.

Un corps différentiel est dit *différentiellement clos* lorsque tout système

$$\begin{aligned} P(X) &= 0 \\ Q(X) &\neq 0 \end{aligned}$$

a une solution, où P et Q sont des polynômes différentiels avec ordre(P)>ordre(Q).

Comme pour la clôture, tout corps différentiel admet une clôture différentielle qui est un corps différentiellement clos dans lequel il se plonge. Il y a unicité de la clôture différentielle, mais pas minimalité : tout corps différentiellement clos admet un sous-corps strict qui lui est isomorphe.

2. Corps à différence.

Un corps à différence est un corps K muni d'un automorphisme σ. Les corps à différence existentiellement clos sont ceux pour lesquels σ est "générique" : toutes les équations à différence qui peuvent avoir une solution en ont une.

Ehud Hrushovski a démontré que la “théorie limite” des corps finis muni du Frobenius était de ce type. Ainsi un corps à différence existentiellement clos peut être vu comme un objet qui ressemble à un corps fini tout en étant infini.

3 Stabilité

Dans les années 70, 80, les théoriciens des modèles se sont tournés vers une étude plus abstraite des structures, une étude moins motivée par l'algèbre qui a aboutie sur la théorie de la stabilité.

La notion de dimension étant très répandue en mathématiques, il est naturel de se demander si, étant donnée une structure M, on peut associer à tout ensemble définissable une dimension respectant certains axiomes naturels. On autorise ici non seulement des dimensions entières, mais aussi ordinales.

Il s'avère que l'existence d'une telle notion de dimension est une condition très forte sur une théorie. Celles qui en admettent sont dites *ω-stables* et la dimension est appelée *rang de Morley.*

Par exemple, un corps algébriquement clos est de rang de Morley 1, un corps différentiellement clos est de rang de Morley ω.

Pour analyser ces structures, un point essentiel est l'étude des ensembles minimaux qu'ils contiennent. On appellera ici *ensemble minimal* un ensemble (définissable) dont tout sous-ensemble définissable est fini ou co-fini. Par exemple $\mathbf{C}$ ou le corps des constantes d'un corps différentiellement clos sont minimaux. Un tel ensemble est toujours de rang de Morley 1.

Un ensemble minimal D peut être muni d'une géométrie, c'est-à-dire d'un opérateur de clôture qui satisfait au lemme d'échange. Par exemple, dans le cas de $\mathbf{C}$, l'opérateur de clôture est défini par : $\mathrm{cl}(A)$ est le corps algébriquement clos engendré par A. Dans le cas d'un espace vectoriel, ce sera le sous-espace engendré. On dispose ainsi d'une notion de dimension locale sur les sous-ensembles quelconques de D (à ne pas confondre avec le rang de Morley, qui mesure les ensembles définissables) qui est dans les exemples précédents respectivement le degré de transcendance et la dimension d'espaces vectoriels.

La classification des différentes géométries qui peuvent ainsi apparaître fait l'objet de la théorie géométriques de la stabilité. On distingue trois classes :

1. Triviales : $\mathrm{cl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{cl}(a)$.
2. Localement modulaires : $\dim(A \cup B) + \dim(A \cap B) = \dim(A) + \dim(B)$.
3. Non localement modulaires.

Le cas localement modulaire non trivial est le plus agréable. On montre qu'on peut supposer que D est muni d'une structure de groupe abélien, et on arrive à classifier entièrement les possibilités. Le cas typique est celui d'un espace vectoriel sur une algèbre à division.

Le cas non-localement modulaire est plus complexe. La conjecture de trichotomie de Boris Zilber stipule que ce cas doit correspondre essentiellement au variétés algébriques sur un corps algébriquement clos.

Si la conjecture est fausse en toute généralité, la philisophie qui la sous-tend s'avère exacte et le résultat se vérifie dans tous les exemples naturels. Il existe des géométries non localement modulaires dans lesquels on ne peut pas définir de corps, mais il faut les construire artificiellement.

Soit M une structure de rang de Morley fini. La connaissance des géométries des ensembles minimaux présents apporte beaucoup d'information sur M. Par exemple, si tous les ensembles minimaux sont localement modulaires, tous les groupes infinis définissables sont virtuellement abéliens.

Tout ceci et bien plus est exposé dans [Pil96].

4 O-minimalité

Une classe de structures orthogonale à la précédente est la classe des structures o-minimales, dont l'étude généralise la géométrie semi-algébrique réelle.

Une structure ordonnée $(\mathsf{M}, \leq, \dots)$ est dite *o-minimale* si les ensembles définissables de M sont les unions finis d'intervalles. Par exemple, $(\mathbf{R}, \leq, 0, 1, +, -, \cdot)$ est o-minimale.

On fait donc une hypothèse sur les ensembles définissables en dimension 1 et on veut en déduire des propriétés sur les dimensions supérieures. C'est là une approche courante en théorie des modèles qui s'avère souvent fructueuse. Dans le cas o-minimal, on montre par exemple qu'un ensemble définissable a un nombre fini de composantes connexes (pour la topologie de l'ordre). Ceci permet de leur assigner une dimension, qui, dans le cas réel coïncide avec la dimension différentielle classique. Le rang de Morley est lui toujours infini.

Alex Wilkie a démontré dans [Wil] que $\mathbf{R}_{\mathtt{exp}}$, le corps des réels muni de l'exponentielle, était o-minimal. Ce résultat est difficile, mais une fois établi, on apprend beaucoup sur la géométrie exponentielle réelle. On sait qu'elle se comporte en grande partie comme la géométrie semi-algébrique.

5 Théories NIP

Un corps algébriquement clos valué est constitué d'une théorie o-minimale (le groupe de valeur) et d'une théorie de rang de Morley 1 (le corps résiduel). Il ne rentre donc *stricto sensu* dans aucune des catégories précédente. Néanmoins, on arrive à exploiter les outils développés pour étudier cet objet. Les derniers résultats de Hrushovski (voir [HasHruMac2]), par exemple, montrent que tout corps définissable dans un corps algébriquement clos valué est définissablement isomorphe soit au corps lui-même, soit au groupe de valeurs.

Une autre manière d'envisager l'étude des corps valués est de trouver une classe de théorie plus large que les précédentes les contenant. C'est ainsi qu'interviennent les théories NIP.

5.1 Dimension de Vapnik-Chervonenkis

On considère un ensemble E et une classe Φ de parties de E.

Définition 5.1. Des éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont *éclatés* par Φ si pour toute partie $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, il existe $A \in \Phi$ tel que : $x_i \in A \Leftrightarrow i \in I$.

Définition 5.2. La classe Φ est de VC-dimension n s'il existe n points éclatés par Φ, mais pas $n + 1$.

Elle dite de VC-dimension infinie s'il existe n points éclatés par Φ pour tout n.

5.2 Propriété d'indépendance

Définition 5.3. Une formule $\phi(x, y)$ (x et y sont des uplets de variables de tailles a priori différentes) a la *propriété d'indépendance* si la VC-dimension de Φ est infinie, où $\Phi = \{\phi(x, b) \mid b \in \bar{M}\}$.

Dans le cas contraire, on dira que ϕ est *NIP* (*not independence property*).

EXEMPLE 5.4. *Dans un ensemble ordonné, la formule* $\phi(x, y) := x \leq y$ *est NIP : la VC-dimension de* Φ *vaut 1.*

Une théorie est dite *NIP* si toutes les formules le sont.

La classe des théories NIP contient celles des théories stables et o-minimales.

L'étude des théories NIP est à son début et il est difficile actuellement de citer des résultats existants ou même des conjectures. C'est une situation classique en théorie des modèles : on étudie des classes de théories sans toujours savoir ce qu'on cherche ni à quoi on compte appliquer les résultats. C'est à partir des théorèmes qu'on obtient qu'on cherche les utilisations.

Références

[Adl] H. Adler, Introduction to theories without the independence property, to appear in Archive Math. Logic.

[Hru03] E. Hrushovski, Valued fields, metastable groups, draft 2003.

[HasHruMac1] D. Haskell, E. Hrushovski, and D. Macpherson, Definable sets in algebraically closed valued fields. Part I : elimination of imaginaries, J. Reine und Angew. Math.

[HasHruMac2] D. Haskell, E. Hrushovski, and D. Macpherson, *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields*, to appear in Lecture Notes in Logic.

[HruPetPil] E. Hrushovski, Y. Peterzil, and A. Pillay, Groups, measures and the NIP, Journal AMS, 2007.

[HruPil] E. Hrushovski and A. Pillay, On NIP and invariant measures, preprint.

[Pil88] A. Pillay, On groups and fields definable in o-minimal structures, J. Pure and Applied algebra 53 (1988), 239-255.

[Pil96] A. Pillay, *Geometric Stability Theory*, Oxford University Press 1996.

[Poiz] B. Poizat, *A Course in Model Theory*, Springer 2000.

[She715] S. Shelah, Classification theory for theories with NIP - a modest beginning, Sci.Japon. 59 (2004), 265-316.

[She783] S. Shelah, Dependent first order theories, continued, to appear in Israel J. Math.

[Wag] F. O. Wagner, *Simple theories*, Dordrecht 2000.

[Wil] A. Wilkie, On the theory of the real exponential field, Illinois J Math,33,3,(1989), 384-408.