Marches aléatoires en milieux aléatoires

Arvind Singh

octobre 2003

L'étude des milieux aléatoires est un domaine de recherche actif des probabilités depuis une vingtaine d'années. Les problèmes posés sont souvent issus de la physique. Ainsi, la marche aléatoire en milieu aléatoire peut servir à modéliser le comportement d'une particule dans un environnement trop complexe pour être décrit avec précision. L'étude de cette classe de processus dans le cas de la dimension 1 a été réalisée par F. Solomon qui obtint des critères permettant de déterminer si la marche est récurrente ou transiente ainsi que sa vitesse limite. Toutefois, dans le cas des dimensions supérieures, le comportement de la marche reste mal compris et il n'y a pas actuellement de théorie générale satisfaisante. Même dans le cas unidimensionnel, en particulier quand la marche est récurrente, un certain nombre de problèmes ne sont toujours pas résolus. Le texte suivant se propose donc d'exposer simplement quelques résultats connus qui permettent d'illustrer les différents outils mathématiques utilisés lors de l'étude de ces processus.

1 Le modèle de la marche aléatoire en milieu aléatoire

On se fixe dans toute cette partie $x_0 \in \mathbb{Z}^d$. Soit $E = \{e \in \mathbb{Z}^d, |e| \leq 1\}$ et $U = \mathcal{P}(E)$ l'espace des probabilités sur E. On définit :

$$\Omega = U^{\mathbb{Z}^d}.$$

Ω est appelé l'espace des environnements, il est naturellement doté d'un tribu $\mathcal{G}$ issue de la tribu naturelle sur E. Pour un environnement $\omega \in \Omega$ et $x \in \mathbb{Z}^d$, on note $\omega(x, \cdot)$ la probabilité de transition (sur E) au point x. On se fixe alors une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{G})$.

Soit $(X_n)_{n\mathbb{N}}$ la famille des applications canoniques de $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{Z}^d$ et on munit $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}$ de la tribu $\mathcal{F}$ générée par les cylindres. Étant donné $\omega \in \Omega$ on peut définir par le théorème de Daniel-Kolmogorov la probabilité $P_{x_0,\omega}$ sur $((\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$ telle que X soit sous cette probabilité une chaîne de Markov dont la loi est donnée par :

$$\begin{cases} P_{x_0,\omega}[X_{n+1} = X_n + e \mid X_1, \ldots, X_n] = \omega(X_n, e) \text{ pour } e \in E \\ P_{x_0,\omega}[X_0 = x_0] = 1 \end{cases}$$

La loi de X sous $P_{x_0,\omega}$ est appelé loi "quenched" sous l'environnement ω. Remarquons que pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'application

$$\omega \mapsto P_{x_0,\omega}(F)$$

est $\mathcal{G}$-mesurable. On peut donc définir sur $(\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}} \times \Omega, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ une probabilité P_{x_0} par le produit semi-direct :

$$P_x = P_{x,\omega} \otimes \mathbb{P}.$$

C'est-à-dire que pour $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ on a :

$$P_x(F \times G) = \int_G P_{x,\omega}(F) \mathbb{P}(d\omega)$$

où de manière équivalente,

$$E_{P_{x_0}}[f] = \int_\Omega E_{P_{x_0,\omega}}[f(\ .\ ,\omega)]d\mathbb{P}(\omega) \quad \text{pour tout } f \text{ mesurable bornée sur } (\mathbb{Z}^d)^{\mathbb{N}} \times \Omega.$$

La probabilité P_{x_0} est appelé loi annealed de la marche aléatoire en milieu aléatoire sous l'environnement $\mathbb{P}$ et issue de x_0.

Remarque 1.1 *Dans toute la suite, on supposera la marche issue de 0. En conséquence, on omettra systématiquement l'indice x_0 (et on écrira donc P et P_ω à la place de P_0 et $P_{0,\omega}$).*

Connaissant l'environnement ω (c'est-à-dire sous la loi quenched P_ω), la marche X est une simple chaîne de Markov, ce résultat toutefois est faux sous la loi P. En effet, le passé entier de la chaîne donne des informations sur l'environnement dans lequel elle évolue, et par conséquent donne des informations sur son futur.

Ce modèle est trop général pour être étudié en détail. Dans la pratique, on fera souvent des hypothèses sur l'environnement :

Définition 1.2

1. *On dit que l'environnement est* i.i.d *si la famille $(\omega(x,\cdot))_{x\in\mathbb{Z}^d}$ est indépendante identiquement distribuée sous $\mathbb{P}$, ceci signifie que $\mathbb{P} = \mu^{\otimes\mathbb{Z}^d}$ avec $\mu \in \mathcal{P}(U)$.*
2. *L'environnement est dit symétrique si*

$$\mathbb{P}(\omega(x,e) = \omega(x,-e)) = 1 \textit{ pour tout } x \in \mathbb{Z}^d \textit{ et tout } e \in E.$$

3. *La marche est dite elliptique de constante d'ellipticité $\kappa > 0$ si l'on a :*

$$\mathbb{P}(\omega(0,e) \geq \kappa) = 1 \textit{ pour tout } x \in \mathbb{Z}^d \textit{ et tout } e \in E..$$

2 Résultats connus

2.1 en dimension 1

Dans le cas d'une marche aléatoire X sur $\mathbb{Z}$, on note ω_x^+ (respt. ω_x^-) la probabilité de transition au point x d'aller à droite (respt. à gauche). La quantité $\rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}$ joue un role

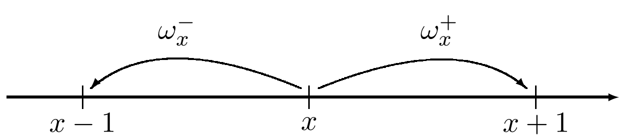

FIG. 1 – probabilités de transition dans le cas unidimensionnel

crucial dans le comportement de la marche.

Théorème 2.1 [SOLOMON, 1975]

Supposons que l'environnement est i.i.d *et que $E_{\mathbb{P}}[\log(\rho_0)]$ est bien définie, dans ces conditions :*

1. *si $\mathbf{E}[log(\rho_0)] < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty$ P-ps,*
   ceci montre en particulier que la marche est transiente,

2. *si* $\mathbf{E}[log(\rho_0)] > 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ *P-ps,*
   dans ce cas aussi la marche est transiente,
3. *si* $\mathbf{E}[log(\rho_0)] = 0$ *alors* $\liminf_{n\to\infty} X_n = -\infty$ *et* $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$ *P-ps,*
   La marche est donc récurrente.

On peut dans ce cas obtenir aussi des informations sur la vitesse limite de la marche.

Théorème 2.2 [SOLOMON, 1975]
Sous les hypothèse du théorème précédent, on a :
1. *si* $\mathbf{E}[\rho_0] < 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1-\mathbf{E}[\rho_0]}{1+\mathbf{E}[\rho_0]}$ *P-ps,*
2. *si* $\mathbf{E}[\frac{1}{\rho_0}] < 1$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = -\frac{1-\mathbf{E}[\frac{1}{\rho_0}]}{1+\mathbf{E}[\frac{1}{\rho_0}]}$ *P-ps,*
3. *si* $\frac{1}{\mathbf{E}[\rho_0]} \leq 1 \leq \mathbf{E}[\frac{1}{\rho_0}]$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0$ *P-ps.*

Les convergences ont aussi lieu sous la loi quenched P_ω *,* $\mathbb{P}$-ps.

Remarque 2.3 *En combinant les deux théorèmes, on constate que l'on peut donc construire des marches transientes mais dont la vitesse limite est nulle.*

2.2 En dimensions supérieures

Dans le cas de dimension $d > 1$, le comportement de la marche aléatoire en milieu aléatoire reste mal compris. Ainsi, il n'y pas pour l'instant de critères satisfaisants pour déterminer si la marche est récurrente ou transiente. On a toutefois le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Supposons que* $\mathbb{P}$ *est* i.i.d*, elliptique et symétrique, alors la marche aléatoire en milieu aléatoire* X *est transiente si* $d \geq 3$ *et récurrente pour* $d = 2$*.*

On a également un théorème de loi des grands nombres incomplet.

Théorème 2.5 [SZNITMAN, ZERNER 1999]
On suppose que $\mathbb{P}$ *est* i.i.d *et elliptique.*
Soit $l \in \mathbb{R}^d - \{0\}$*, on définit :*

$$A_l = \{\lim_{n\to\infty} l \cdot X_n = +\infty\}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}[A_l \cup A_{-l}] \in \{0,1\}.$$

Dans le cas où $\mathbb{P}[A_l \cup A_{-l}] = 1$*, il existe deux vecteurs déterministes* v_l *et* v_{-l} *tels que*

$$\frac{l \cdot X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_l \mathbf{1}_{A_l} + v_{-l} \mathbf{1}_{A_{-l}} \quad \mathbb{P}\text{-}ps.$$

Les démonstrations de la plupart des théorèmes précédents se trouvent dans [4].

3 Marche aléatoire et temps de de coupure

On s'intéresse maintenant à un cas particulier de marche aléatoire en milieu aléatoire étudié dans [1], c'est sur l'étude de ces marches que s'appuie principalement mon mémoire de D.E.A. Formellement, on considère une marche aléatoire en milieu aléatoire X sur $\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^{d_1} \times \mathbb{Z}^{d_2}$ avec $d = d_1 + d_2$, $d_1 > 1$, $d_2 > 1$. On pose $E_1 = \{e \in \mathbb{Z}^{d_1}, |e| \leq 1\}$. On se fixe alors un $2d_1 + 1$ vecteur q vérifiant :

$$\begin{cases} \sum_{e \in E_1} q(e) = 1 \\ q(e) \geq 0 \text{ pour tout } e \in E_1 \\ q(0) > 0 \end{cases}$$

On fait alors sur $\mathbb{P}$ les hypothèses suivantes :

Hypothèses 1 $\mathbb{P}$ *est* i.i.d *et* $\mathbb{P}[\omega(0,e) = q(e)]$*pour tout* $e \in E_1$.

On peut décomposer $X = X^1 + X^2$ où X^1 et X^2 sont respectivement les projections de X sur $\mathbb{Z}^{d_1}$ et $\mathbb{Z}^{d_2}$. L'hypothèse précédente équivaut alors à dire que X_1 est une marche aléatoire classique dont les probabilités de transitions sont données par q. Dans ce cadre là, on a un théorème de loi des grands nombres agréable :

Théorème 3.1 *Si q n'est pas symétrique ($\sum_{e \in E_1} q(e)e \neq 0$) ou si $d_1 \geq 5$ alors il existe un vecteur déterministe v_∞ tel que :*

$$\frac{X_n}{n} \underset{n \to \infty}{\overset{P\text{-}ps}{\longrightarrow}} v_\infty.$$

On peut aussi, en renforçant légèrement les hypothèses obtenir un théorème de type limite centrale.

Théorème 3.2 *Si q n'est pas symétrique ou si $d_1 \geq 13$ alors le processus $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_{[\cdot n]} - [\cdot n]v_\infty)$ converge en loi dans l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers un mouvement brownien.*

Donnons maintenant une esquisse de la démonstration des deux théorèmes précédents, les démonstrations complètes sont faites dans [15].

Dans le modèle que l'on considère, X_1 est une marche aléatoire de probabilités de transition données par q. Nous allons utiliser le fait que sous de bonnes hypothèses, X_1 admet des temps de coupure, c'est-à-dire des temps tels que le passé et le futur de la marche ne se recoupent pas. Afin d'utiliser des propriétés de stationnarité pour la marche, il est utile d'étendre X_1 au temps négatifs : c'est à dire que l'on considère plutôt une marche aléatoire X_1 définie par q et indexée par $\mathbb{Z}$, telle que $X_0^1 = 0$. On définit alors l'ensemble C des temps de coupure de X_1 :

$$C = \{n \in \mathbb{Z} \ , \ X_{]-\infty,n-1]} \cap X_{[n,\infty[} = \emptyset\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Si q n'est pas symétrique ou si $d_1 \geq 5$, on a $\mathbf{P}[0 \in C] > 0$.*

En conséquence, $C \cap]-\infty, 0]$ et $C \cap]0, \infty]$ sont de cardinal infini ps.

Idée de preuve : dans le cas ou q n'est pas symétrique, on sait que X^1 a une vitesse limite non nulle et le résultat est simple à obtenir. Dans le cas où q est symétrique, on note R le nombre d'intersections de $(X_n^1)_{n \neq 0}$ et $(X_{-n}^1)_{n \geq 0}$:

$$E[R] = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} P[X_i^1 = X_{-j}^1] = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \mathbf{P}[X_{i+j}^1 = 0]$$

car (X^1_n) et (X^1_{-n}) sont indépendantes, symétriques et de même loi. On sait de plus que $\mathbf{P}[X^1_n = 0] \sim \frac{\alpha}{n^{d/2}}$ pour n tendant vers l'infini (*cf* [2]). On en déduit alors $E[R] < \infty$.

On dit que (i, j) est une intersection finale si $X^1_i = X^1_{-j}$ et si $X^1_{i'} \neq X^1_{-j'}$ pour tout $i' \geq i$ et tout $j' > j$. Comme $E[R] < \infty$, le nombre d'intersections de (X^1_n) et (X^1_{-n}) est fini presque sûrement, donc pour presque toutes trajectoires de X il y a au moins une intersection finale. Ainsi

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} \mathbf{P}[(i,j) \text{ est une intersection finale}] = E[\#\{\text{intersections finales}\}] \geq 1$$

et d'autre part : $\mathbf{P}[(i, j) \text{ est une intersection finale}] = \mathbf{P}[X^1_i = X^1_{-j}]\mathbf{P}[0 \in \mathrm{C}]$. En sommant sur i et j, on obtient $E[R]\mathbf{P}[0 \in \mathrm{C}] \geq 1$, ce qui montre que $\mathbf{P}[0 \in C] > 0$. La seconde affirmation résulte de l'utilisation du théorème ergodique. □

On peut donc maintenant considérer la suite ordonnée $(T_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ des temps (aléatoires) de coupure pour X^1 avec $T_0 \leq 0 < T_1$. On a un résultat intéressant sur la vitesse de décroissance de la queue de distribution de T_1.

Théorème 3.4 *Lorsque $d_1 > 4$, il existe une constante positive A telle que*

$$\mathbf{P}[T_1 > n] \leq A(\ln n)^{1+\frac{d_1-4}{2}} n^{-\frac{d_1-4}{2}},$$

si de plus q n'est pas symétrique, on a une majoration plus forte :

$$\mathbf{P}[T_1 > n] \leq Ae^{-\lambda\sqrt{n}}.$$

Idée de preuve des théorèmes 3.1 et 3.2.

Remarquons que l'existence de temps de coupure pour X^1 implique l'existence de temps de coupure pour la marche aléatoire en milieu aléatoire X (elle est donc transiente). On peut voir informellement la marche X de la manière suivante : conditionnellement à la marche X^1 sur $\mathbb{Z}^{d_1}$ et donc à la suite des temps de coupure (T_i), les "morceaux" de marche aléatoire en milieu aléatoire $(X_j - X_{T_i})_{T_i \leq j < T_{i+1}}$ sont indépendants (ils évoluent chacun dans des environnements aléatoires indépendants).

On pose donc $Z_i = X_{T_{i+1}} - X_{T_i}$ et conditionnellement à X^1, les variables (Z_i) sont indépendantes. Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $T_{k_n} \leq n < T_{k_n+1}$, grâce au théorème 3.4 qui assure que les temps de coupure sont suffisamment fréquents, on peut voir que la quantité : $\frac{1}{n}(X_n - (Z_1 + .. + Z_{k_n}))$ tend vers 0 presque sûrement quand n tend vers l'infini. Ainsi, pour montrer la loi forte des grands nombres, on est ramené à montrer la convergence de

$$\frac{1}{n}(Z_1 + .. + Z_{k_n}),$$

résultat que l'on obtient finalement en appliquant un théorème d'ergodicité. La démonstration du théorème de la limite centrale se fait aussi par une méthode similaire, l'hypothèse $d_1 > 13$ dans le cas symétrique étant faite afin d'augmenter la fréquence des temps de coupure et donc de diminuer la différence $X_n - (Z_1 + .. + Z_{k_n})$.

4 Marches avec un drift fort

On va maintenant appliquer le même type d'idées à un cas différent. Considérons donc une marche aléatoire en milieu aléatoire X sur $\mathbb{Z}$ avec $d \geq 1$. On fait sur la marche l'hypothèse suivante :

Hypothèses 2 *l'environnement est* i.i.d *et il existe un vecteur* $e_1 \in E$ *et* $\varepsilon > 0$ *tel que :*

$$\mathbb{P}[\omega(0, e_1) - \omega(0, -e_1) \geq \varepsilon] = 1.$$

4.1 Existence de temps de coupure

Soit la marche X^1 sur $\mathbb{Z}$ obtenue comme projection de X sur $\mathbb{Z}e_1$. On définit la suite M_i des temps de saut de de X^1 par :

$$\begin{cases} M_1 = \inf(n > 0 \ , \ X^1_{n+1} - X^1_n \neq 0) \\ M_{i+1} = \inf(n > M_i \ , \ X^1_{i+1} - X^1_i \neq 0) \end{cases}$$

L'hypothèse faite sur la marche assure que pour tout i, on a $M_i < 0$ *ps.* Définissons alors le processus U par :

$$U_n = X^1_{M_n} \text{ pour tout } n.$$

On a le lemme calculatoire suivant.

Lemme 4.1 *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$P_\omega[U_{n+1} - U_n = 1 | U_1, \ldots, U_n] \geq \frac{1}{2} + \alpha \qquad \textit{pour tout } n > 0.$$

Remarquons que la proposition précédente équivaut à

$$E^{P_\omega}[U_{n+1} - 2\alpha n | U_1, \ldots, U_n] \geq U_n.$$

Ceci montre donc que sous P_ω, $(U_n - 2\alpha n)$ munie de sa filtration naturelle est une sous-martingale.

A l'instar de la décomposition d'une sous-martingale comme somme d'une martingale et d'un processus croissant, on peut représenter U comme la somme d'un processus croissant et d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ biaisée vers la droite. Plus précisément :

Lemme 4.2 *Il existe un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ *et deux processus* A *et* V *tels que :*

1. $(A_n)_{n\geq 0}$ *est un processus croissant (* ie $A_0 = 0$ *et* $A_{n+1} - A_n \geq 0$ *Q-ps.),*
2. $(V_n)_{n\geq 0}$ *est une chaîne de Markov telle que :*
   - $V_0 = 0$ *Q-ps,*
   - $Q[V_{n+1} - V_n = 1 | V_0, \ldots, V_n] = \frac{1}{2} + \alpha$,
   - $Q[V_{n+1} - V_n = -1 | V_0, \ldots, V_n] = \frac{1}{2} - \alpha$,
3. *le processus* $(A + V)_{n\geq 0}$ *sous* Q *a même loi que* $(U)_{n\geq 0}$ *sous* P_ω.

Quitte à changer d'espace, on peut maintenant écrire

$$U_n = A_n + V_n.$$

D'après le théorème 3.3 pour la marche aléatoire non symétrique, on sait que V admet presque sûrement une infinité de temps de coupure que l'on note $(S_i)_{i\geq 1}$ avec $S_i < S_{i+1}$. Puisque A est un processus croissant, tout temps de coupure S_i pour V est également un temps de coupure pour U et M_{S_i} est donc un temps de coupure pour X^1. On a donc montré le résultat suivant :

Théorème 4.3 *Sous l'hypothèse 2, la marche X admet P-ps une infinité de temps de coupure $T_i = M_{S_i}$.*

Le théorème 3.4 donne la majoration :

$$P_\omega[S_1 > n] < Ce^{-\lambda\sqrt{n}} \text{ pour n>0}$$

où C et λ sont des constantes. Soit $k \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} P_\omega[T_1 > n] &\leq P_\omega[M_{S_1} > n \text{ et } M_k \leq n] + P_\omega[M_k > n] \\ &\leq P_\omega[S_1 > k] + P_\omega[M_k > n]. \end{aligned}$$

Utilisons alors le lemme suivant que l'on obtient en appliquant un principe de grandes déviations.

Lemme 4.4 *Il existe deux constantes $C' > 0$ et $\lambda' > 0$ telles que lorsque $\frac{k}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ on a l'inégalité :*

$$P_\omega[M_k > n] < C'e^{-\lambda' n}.$$

Choisissons $k = [\frac{\varepsilon n}{2}]$, il vient :

$$P_\omega[T_1 > n] \leq Ce^{-\lambda\sqrt{[\frac{\varepsilon n}{2}]}} + C'e^{-\lambda' n}.$$

Il existe donc deux constantes D et β telles que :

$$P_\omega[T_1 > n] \leq De^{-\beta\sqrt{n}} \text{pour tout } n.$$

Remarquons que l'événement $\{\forall n\ X^1_n \geq 0\} = \{\forall n\ U_n \geq 0\}$ contient l'événement $\{\forall n\ V_n \geq 0\ \}$ qui est de probabilité non nulle, en conséquence :

$$P_\omega[T_1 > n | \forall n\ X^1 \geq 0] \leq \frac{P_\omega[T_1 > n]}{P_\omega[\forall n\ X^1_n \geq 0]} \leq \frac{D}{P_\omega[\forall n\ X^1_n \geq 0]} e^{-\beta\sqrt{n}}$$

et on a démontré :

Théorème 4.5 *Sous l'hypothèse 2, il existe des constantes $C, \lambda > 0$ telles que :*

$$E^P[T_1 > n \mid \forall k > 0\ X^1_k > 0] \leq Ae^{-\lambda\sqrt{n}}.$$

4.2 Théorèmes limites

Remarquons que les temps de coupure que l'on considère ici sont très différents de ceux de la partie précédente, en effet, ici, la suite $(T_i)_{i\geq 1}$ représente seulement les temps de coupure de X qui sont aussi temps de coupure pour X^1. Cela signifie que l'hyperplan normal à e_1 et passant par X_{T_i} sépare la trajectoire passée de la marche de sa trajectoire future, ainsi la marche après le temps de coupure évolue dans un demi-espace constitué d'un environnement indépendant de l'environnement rencontré jusqu'au temps T. Elle se comporte donc après le temps de coupure comme une marche aléatoire en milieu aléatoire indépendante de la trajectoire avant le temps de coupure mais conditionnée à ne pas sortir du demi-espace. Formellement, cela signifie que l'on a le théorème suivant :

Théorème 4.6 *Sous P, pour tout $i > 0$, la famille $(X_{T_{i+1}} - X_{T_i})_{i\geq 1}$ est* i.i.d *et de même loi que X conditionnée par $\{\forall k > 0\ X^1_k > 0\}$. De plus, la famille $(T_{i+1} - T_i)_{i\geq 1}$ est* i.i.d *de même loi que T_1 conditionnée par $\{\forall k > 0\ X^1_k > 0\}$.*

Une fois ce théorème obtenu, il est simple de déduire un théorème de loi des grands nombres pour X. Notons R la probabilité $R(\cdot) = P(\cdot \mid \forall k > 0\ X_k^1 > 0)$.

Théorème 4.7 *On a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{E^R[X_{T_1}]}{E^R[T_1]}\ P\text{-ps.}$$

Preuve : on sait par le théorème précédent que les variables $Z_i = X_{T_{i+1}} - X_{T_i}$ forment une suite de variables *i.i.d* de même loi que X_{T_1} sous la probabilité R, de plus, T_1 est intégrable sous R d'après 4.5 donc il en est de même pour Z_i. Par la loi forte des grands nombres, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_{T_n}}{n} = E^R[X_{T_1}]\ P\text{-}ps.$$

On définit alors $(k_n)_{n\geq 0}$ par :

$$\begin{cases} k_n = 0 & \text{si } 0 \leq n \leq T_1, \\ T_{k_n} < n \leq T_{k_{n+1}} & \text{lorsque } n > T_1. \end{cases}$$

Comme la famille $(T_{n+1} - T_n)_{n\geq 1}$ est *i.i.d* et intégrable, encore par la loi forte des grands nombres :

$$\frac{T_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E^R[T_1]\ P\text{-}ps$$

d'où $\frac{k_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/E^R[T_1]$ P-*ps* ceci implique alors :

$$\frac{X_{T_{k_n}}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{E^R[X_{T^1}]}{E^R[T_1]}\ P\text{-}ps.$$

D'autre part, comme X est une marche au plus proche voisin, on a pour $n \geq T_1$:

$$|\frac{X_{T_{k_n}}}{n} - \frac{X_n}{n}| \leq \frac{T_{k_n} - T_{k_n - 1}}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ P\text{-ps}$$

ce qui permet de conclure. □

Théorème 4.8 *Sous P, la suite de processus $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_{[\cdot n]} - [\cdot n]v)$ converge en loi dans l'espace de Skorokhod $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers un mouvement brownien de matrice de covariance A donnée par :*

$$A = \frac{E^R[(X_{T_1} - vT_1)(X_{T_1} - vT_1)^t)]}{E^R[T_1]},$$

où $v = E^R[X_{T_1}]/E^R[T_1]$ désigne la vitesse limite de X.

Preuve : définissons :

$$V_i = X_{T_{i+1}} - X_{T_i} + v(T_{i+1} - T_i) \qquad \text{pour } i \geq 1.$$

On voit que les variables V_i sont *i.i.d* sous P et ont même loi que $X_{T_1} - vT_1$ sous R. On a donc

$$E^P[V_i] = E^R[X_{T_1} - vT_1] = E^R[X_{T_1}] - \frac{E^R[X_{T_1}]}{E^R[T_1]} E^R[T_1] = 0.$$

D'après le théorème 4.5, on sait que $T_1 \in L^p(R)$ pour tout $p \geq 1$, de plus $|X_n| < n$, on en déduit donc que V_i a une variance finie. Le théorème de Donsker appliqué à la suite $(V_i)_{i\geq 1}$ affirme donc que la suite de processus

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^{[\cdot n]-1} V_i = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{T_{[\cdot n]}} - vT_{[\cdot n]}) - \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{T_1} - vT_1)$$

converge en loi sous P, dans l'espace de Skorokhod vers un mouvement brownien B de matrice de covariance $\widehat{A} = E^P[(V_1)(V_1)^t] = E^R[(X_{T_1} - vT_1)(X_{T_1} - vT_1)^t)]$. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}}(X_{T_1} - vT_1)$ converge P-ps pour la topologie de Skorokhod vers 0, ceci implique la convergence en loi de $\frac{1}{\sqrt{n}}L_{[\cdot n]} = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{T_{[\cdot n]}} - vT_{[\cdot n]})$ vers le même mouvement brownien. Notons $(L_t)_{t\geq 0}$ l'interpolation linéaire de $(L_m)_{m\geq 0}$.

On sait que $\frac{k_n}{n}$ tend P-ps vers $\frac{1}{E^R[T_1]}$, il est alors facile de constater que pour $t_0 > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq t_0} |\frac{k_{[tn]}}{n} - \frac{t}{E^R[T_1]}| = 0 \qquad P\text{-}ps.$$

Ceci signifie que la suite de processus $\phi_n : t \mapsto \frac{k_{[\cdot n]}}{n}$ converge P-ps pour la topologie de Skorokhod vers $\phi = t \mapsto \frac{t}{E^{\widehat{\mathbf{P}}}[T_1]}$. Ainsi $(\frac{1}{\sqrt{n}}L_{\cdot n}, \phi_n)$ converge en loi dans l'espace de Skorokhod vers $(B_\cdot, \phi)$. Comme B et ϕ sont des processus continus, la suite de processus $\frac{1}{\sqrt{n}}L_{k_{[\cdot n]}} = \frac{1}{\sqrt{n}}L_{n\phi_n}$ converge vers B_ϕ (cf [6] page 145) et B_ϕ est un mouvement brownien de matrice de covariance $A = \widehat{A}/E^P[T_1]$. Soit $t_0 > 0$,

$$\begin{aligned}
\sup_{t<t_0} \frac{|L_{k_{[tn]}} - (X_{[tn]} - [nt]v)|}{\sqrt{n}} &\leq \sup_{t<t_0} \frac{|X_{T_{k_{[tn]}}} - X_{[tn]}|}{\sqrt{n}} + \sup_{t<t_0} \frac{|(T_{k_{[nt]}} - [nt])v|}{\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{(|v|+1)}{\sqrt{n}} \sup_{t<t_0} |T_{k_{[nt]}} - [nt]| \\
&\leq \frac{(|v|+1)}{\sqrt{n}} \sup_{0\leq i\leq [t_0 n]} |T_{i+1} - T_i|.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait $T_{i+1} - T_i$ sous P a même loi que T_1 sous R (*cf* théorème 4.6) et comme que $T_1 \in L^2(R)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
P(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{0\leq i\leq [t_0 n]} |T_{i+1} - T_i| > \varepsilon) &\leq P_0(T_1 > \sqrt{n}\varepsilon) + [t_0 n]R(T_1 > \sqrt{n}\varepsilon) \\
&\leq P_0(T_1 > \sqrt{n}\varepsilon) + [t_0 n]R(T_1^2 > n\varepsilon^2) \\
&\leq P_0(T_1 > \sqrt{n}\varepsilon) + \frac{[t_0 n]}{n\varepsilon^2} E^R[T_1^2 \mathbf{1}_{\{T_1 > \sqrt{n}\varepsilon\}}],
\end{aligned}$$

ainsi

$$P(\sup_{t<t_0} \frac{|L_{k_{[tn]}} - (X_{[tn]} - [nt]v)|}{\sqrt{n}} > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La suite de processus $\frac{1}{\sqrt{n}}L_{k_{[\cdot n]}} - \frac{1}{\sqrt{n}}(X_{[tn]} - [nt]v)$ converge donc en probabilité dans l'espace de Skorokhod vers 0, ce qui termine la preuve du théorème. □

5 Retour sur la marche en dimension 1

Soit $(\xi)_{i\geq 0}$ une suite de variables aléatoires $i.i.d$ de loi $P[\xi = -1] = P[\xi = 1] = \frac{1}{2}$. Posons $S_0 = 0$ et $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. S_n est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ qui est récurrente, par le théorème de la limite centrale, on a :

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{loi}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1).$$

Informellement, ceci nous dit que la distance moyenne de la marche S_n à l'origine est $\sqrt{n}$. Considérons alors une marche aléatoire en milieu aléatoire X en dimension 1 dans un environnement ω que l'on suppose *i.i.d.* On est naturellement conduit à se demander quel est dans ce cas la distance moyenne de la marche X à l'origine. Le résultat suivant se trouve dans [14] :

Théorème 5.1 [SINAI, 1982]
Supposons que l'environnement est elliptique. Ceci implique que $\log(\rho)$ *admet des moment de tout ordre. Supposons de plus :*

1. $E[\log\rho] = 0$ *(ce qui signifie que la marche est récurrente),*
2. $E[(\log\rho)^2] = \sigma^2 > 0$ *(*i.e *l'environnement est véritablement aléatoire),*

alors

$$\frac{\sigma^2}{(\log n)^2} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{loi} b_\infty$$

où b_∞ *est une loi non dégénérée sur* $\mathbb{R}$.

Ce résultat montre que X se déplace beaucoup moins vite qu'une marche aléatoire simple. Afin d'expliquer la raison de ce comportement atypique, définissons la fonction V appelée potentiel aléatoire par :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_n - V_{n-1} = \log\rho_n = \log\frac{1-\omega_n}{\omega_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On a donc $V_n = \sum_{i=1}^n \log\rho_i$ pour $n > 0$ et $V_n = -\sum_{i=n+1}^0 \log\rho_i$ pour $n < 0$.
On note $(V_t)_{t\in\mathbb{R}}$ l'interpolation polygonale de $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

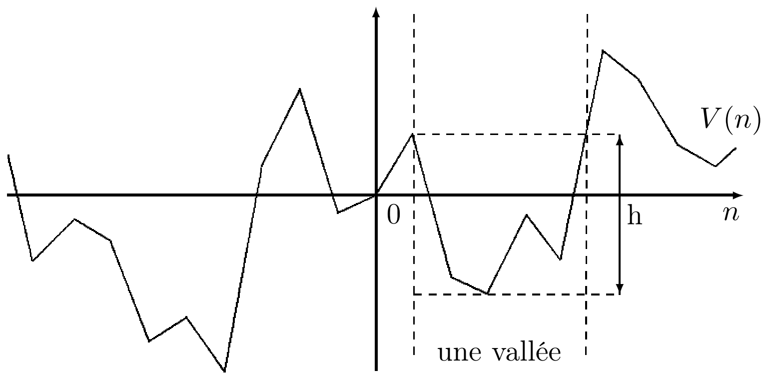

FIG. 2 – exemple de potentiel V

On voit alors que, pour un potentiel fixé, la marche a tendance à descendre la ligne de potentiel plutôt qu'à la remonter. En fait, l'espérance du temps de la marche pour sortir d'une vallée du potentiel (*cf* fig 2) est exponentiellement proportionnel à la hauteur h de la vallée (*cf* fig 3, où [11] pour une définition rigoureuse d'une vallée).

C'est ce phénomène qui ralentit la marche X (dans le cas d'une marche aléatoire simple, il n'y a pas de vallées puisque le potentiel est identiquement nul).

5.1 Lien avec les diffusions aléatoires

Nous allons maintenant voir comment on peut obtenir des résultats sur la marche aléatoire en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$ via l'étude d'un processus continu : Une diffusion aléatoire.

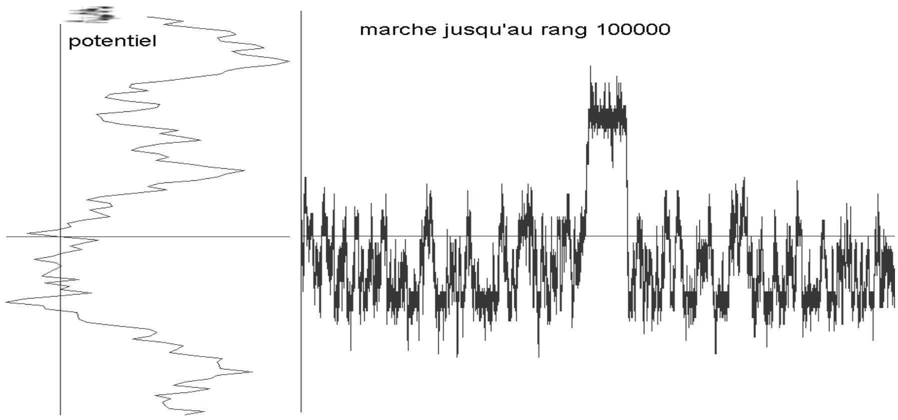

FIG. 3 – simulation d'une marche aléatoire dans un potentiel aléatoire

Formellement, on se donne un processus $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}}$ que l'on appelle encore potentiel. Nous commencerons par supposer que ce processus est de classe C^1. Soit $\beta = (\beta_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard indépendant de W. On considère alors l'équation différentielle stochastique :

$$Z_t = \beta_t - \frac{1}{2}\int_0^t W'(Z_s)ds. \qquad (*)$$

Supposons alors que Z est une solution de $(*)$, alors, pour tout fonction f de classe C^2, la formule d'Itô donne :

$$f(Z_t) = f(0) + \int_0^t f'(Z_s)dZ_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)d < Z_s, Z_s >$$

or par (*), on déduit $dZ_t = d\beta_t - \frac{1}{2}W'(Z_t)$ et $< Z_t, Z_t >=< \beta_t, \beta_t >= t$ donc :

$$f(Z_t) = \int_0^t f'(Z_s)d\beta_s - \frac{1}{2}\int_0^t f'(Z_s)W'(Z_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_s)ds,$$

en définissant l'opérateur $G = \frac{1}{2}e^{W_t}\frac{d}{dt}\left(e^{-W_t}\frac{d}{dt}\right)$ on constate alors que :

$$f(Z_t) - \int_0^t G(f)(Z_s)ds = \int_0^t f'(Z_s)d\beta_s \text{ est une martingale.}$$

Ceci nous montre donc que Z est une diffusion dont le générateur infinitésimal est G. En appliquant de nouveau la formule d'Itô, il est facile de vérifier que la fonction

$$A_t = \int_0^t e^{W_s}ds$$

est la fonction d'échelle de Z, c'est-à-dire est telle que A_{Z_t} soit une martingale locale. L'intérêt de la fonction d'échelle réside dans le théorème suivant :

Théorème 5.2 *Soit Z une diffusion de fonction d'échelle A issu de $x \in [a,b]$. Soit T_a et T_b les premiers temps d'atteinte des niveaux a et b, alors*

$$P_x[T_b < T_a] = \frac{A_x - A_a}{A_b - A_a}$$

On cherche maintenant à remplacer le potentiel W par V (le potentiel de la marche aléatoire en milieu aléatoire X défini dans la section précédente). V est donc le processus suivant :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V(x) = \sum_{i=1}^{n} \log \rho_i & \text{pour } x \in [n, n+1[\text{ et } n \in \mathbb{N}^*, \\ V(x) = -\sum_{i=n}^{0} \log \rho_i & \text{pour } x \in [n, n+1[\text{ et } n \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

Le processus V n'est donc pas de classe C^2 (il n'est même pas continu) donc l'équation $(*)$ n'a plus de sens. Toutefois, on peut tout de même construire explicitement une diffusion Z de fonction d'échelle $A_t = \int_0^t e^{V_s} ds$ telle que son générateur soit

$$G = \frac{1}{2} e^{V_t} \frac{d}{dt} \left(e^{-V_t} \frac{d}{dt} \right).$$

Théorème 5.3 *Soit B un mouvement brownien standard et soit $T_t = \int_0^t e^{-2V_{A^{-1}_{B_s}}} ds$. Alors le processus Z défini par :*

$$Z_t = A^{-1}_{B_{T_t^{-1}}}$$

est une diffusion de fonction d'échelle A et de générateur G.

Montrons alors que Z a le même comportement que la marche aléatoire en milieu aléatoire X, pour cela, définissons :

$$\begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_{i+1} = \inf\{t > \mu_i \ / \ |Z_t - Z_{\mu_i}| = 1\} \end{cases}$$

Ces temps sont bien définis car $\limsup Z_t = \infty$ et $\liminf Z_t = -\infty$ ps. En utilisant le théorème 5.2, on a alors :

$$P[Z_{\mu_{n+1}} = i+1 \mid Z_{\mu_n} = i \ , V] = \frac{A_i - A_{i-1}}{A_{i+1} - A_i} = \omega_i.$$

Ceci signifie donc que le processus $(Z_{\mu_i})_{i \in \mathbb{N}}$ a même loi que la marche aléatoire X sous la loi annealed, de plus :

Théorème 5.4 [SCHUMACHER, 1985]
$(\mu_{i+1} - \mu_i)_{i \geq 0}$ *est une suite de variables aléatoires* i.i.d *de même loi que celle du premier temps d'atteinte en 1 du module d'un mouvement brownien standard.*

On a donc $E[\mu_1] = 1$ et par la loi des grands nombres : $\mu_n \sim n$. On peut donc ramener l'étude de la marche (X_n) à celle de (Z_n), l'avantage de considérer un modèle continu étant de pouvoir appliquer des résultats de calcul stochastique. Cette approche permet par exemple d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 5.5 [SHI, HU , 1998]
Sous les mêmes hypothèses que le théorème 5.1, on a :

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{X_n}{(\log n)^2 \log \log \log n} = \frac{8}{\pi^2 \sigma^2}.$$

La démonstration de ce théorème est faite dans [9].

6 Conclusion, extension au cas stable

Les résultats de la partie précédente ne sont valables que lorsque le potentiel est suffisamment régulier. L'hypothèse d'ellipticité de la marche permet en effet d'assurer que $\log \rho_0$ admet des moments de tout ordre, en particulier, $\log \rho_0$ a une variance σ^2 finie. Comme V est une somme de variables aléatoires *i.i.d* de loi $\log \rho_0$, d'après le théorème de Donsker, la suite de processus

$$U_t^n = \frac{V_{[nt]}}{\sqrt{n}}$$

converge en loi dans l'espace de Skorokhod vers un mouvement brownien de variance σ^2. On dit alors que la marche aléatoire en milieu aléatoire évolue dans un potentiel brownien.

Il semble intéressant de chercher à s'affranchir de cette hypothèse afin de pouvoir étudier le comportement de la marche aléatoire en milieu aléatoire dans des environnements plus irréguliers. Pour ce faire, on peut simplement supposer que la quantité

$$\frac{V_n}{n^\alpha}$$

converge en loi vers une variable aléatoire strictement stable d'indice α (on a $\alpha = 2$ dans le cas brownien). Ceci comprend donc le cas où $\log \rho_0$ n'admet pas de moment d'ordre 2 (on peut même ne pas avoir de moment d'ordre 1, bien que la marche soit récurrente, par exemple lorsque la distribution de $\log \rho_0$ est symétrique). Dans un tel potentiel, la marche aléatoire sera *à priori* encore plus lente que dans le cas précédent car le potentiel présente alors des vallées plus profondes. Plus précisément, on peut montrer que dans ce cas, l'ordre de grandeur de la marche est $\log(n)^\alpha$ (*cf* [12]) mais on ne connaît pas pour l'instant de résultat de convergence presque-sûre analogue au théorème 5.5 lorsque l'on suppose simplement que le potentiel est asymptotiquement stable.

Références

[1] A. S. Sznitman, E. Bolthausen, O. Zeitouni : *Cut points and diffusive random walks in random environment*, to appear in Ann. Inst. Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, 2002.

[2] F. Spitzer : *Principles of random walk*, Springer, Graduate Texts in Mathematics, second edition, 1976.

[3] G. F. Lawler : *Intersection of random walks*, Birkhaüser, Basel, 1991.

[4] O. Zeitouni : *Note of Saint Flour lectures 2001*, preprint.

[5] F. Solomon : *Random walk in random environment*, Ann. Probab. 3, 1976.

[6] P. Billingsley : *Convergence of Probability Measures*, Wiley series in Probability and Maths. Stats. , Wiley & son, New York, 1968.

[7] O. Kallenberg : *Foundations of Modern Probability*, Springer, second edition, 2001.

[8] A. S. Sznitman, E. Bolthausen : *On the static and dynamic points of views of certain random walks in random environment*, to appear in Methods and Applications of Analysis.

[9] Y. Hu, Z. Shi : *The limits of Sinai's simple random walk in random environment*, Ann. Probab. 26, 1998.

[10] K. Itô, H.P. McKean Jr : *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer, Berlin, 1974.

[11] H. Kesten : *The limit distribution of Sinai's random walk in random environment*, Physica, 138A, 1986.

[12] K. Kawazu, Y. Tamura, H. Tanaka : *Localisation of diffusion processes in one-dimensional random environment*, J. Math. Soc. Japan, 44, 1992.

[13] T. Brox : *A one-dimensional diffusion process in a wiener medium*, Ann. Probab. 14, 1986.

[14] Ya.G. Sinai : *The limiting behavior of a one-dimensional random walk in a random medium*, Th. Probab. Appl. 27, 1982

[15] A. Singh : *Marches aléatoires en milieu aléatoire et temps de coupure*, Mémoire de D.E.A.