Construction d'hypersurfaces minimales par méthodes de min-max

Introduction à un domaine de recherche

Antoine Song
sous la direction de Fernando Codá Marques

Juin 2015

Table des matières

Introduction

Les hypersurfaces minimales d'une variété riemannienne M^{n+1} sont définies comme étant les sous-variétés de codimension 1 dont la courbure moyenne est nulle. Ce sont en fait exactement les hypersurfaces minimisant localement le volume n-dimensionnel, que l'on appellera l'aire. Une méthode naturelle pour obtenir des hypersurfaces minimales est donc de tenter de minimiser l'aire dans une famille topologique, comme une classe d'homotopie ou d'homologie. Par exemple, sur une surface compacte sans bord, toute classe d'homotopie non triviale contient une géodésique fermée. Toutefois cet argument ne fonctionne pas sur les sphères par exemple, ce qui suggère qu'il est bien plus difficile de construire des hypersurfaces minimales sans contraintes topologiques. L'objectif originel des théories du min-max consistait précisément à prouver l'existence d'hypersurfaces minimales, possiblement très instables.

Les idées du min-max remonteraient à Birkhoff, qui s'en est servi pour trouver des géodésiques fermées sur la 2-sphère munie d'une métrique quelconque. Ces arguments ont ensuite été affinés par Lyusternik et Schnirelmann (existence de 3 géodésiques fermées sur une 2-sphère quelconque) puis par Lyusternik et Fet (existence d'une géodésique fermée sur une variété riemannienne compacte quelconque). Le problème de l'existence d'hypersurfaces minimales fut d'abord étudié par Almgren qui trouva une procédure pour produire des varifolds stationnaires (une notion qu'il a spécialement conçue pour ce problème). La question de la régularité des varifolds obtenus fut enfin répondue par Pitts dans sa monographie [9], où il prouva le théorème suivant :

Theorem 1. *Soit (M^{n+1}, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n+1$, avec $2 \leq n \leq 5$. Alors il existe une hypersurface minimale compacte plongée*

$$\Sigma^n \subset M.$$

Ce résultat fut peu après étendu à toutes les dimensions par Schoen et Simon [10] ; l'hypersurface surface obtenue peut alors avoir des singularités lorsque $n \geq 7$. Leur preuve est essentiellement celle de Pitts, mais repose sur de nouvelles estimations de courbure qu'ils ont prouvées. La théorie d'Almgren et Pitts est au fondement de toutes les autres théories du min-max.

La preuve de Pitts utilise des familles discrètes de courants. Dans le cas particulier des surfaces dans les 3-variétés riemanniennes, les idées d'Almgren et Pitts ont été modifiées par Simon et Smith entre autres en une théorie "lisse" : celle-ci s'exprime uniquement avec des objets lisses comme des surfaces lisses et des isotopies (voir [12], [2]). Enfin, De Lellis et Tasnady ont réécrit une version de la preuve de Pitts en développant une théorie "continue" qui se base sur la théorie lisse.

Ce texte est organisé comme suit : la première section donne une présentation générale des différentes théories du min-max et quelques applications célèbres. La deuxième section est consacrée à l'explication de la théorie lisse, plus simple à décrire que la théorie d'Almgren et Pitts. Enfin dans la troisième section, je présenterai un résultat prouvé durant mon stage de M2 en partant d'une question posée par Fernando Codá Marques.

Remerciements

Je tiens à remercier Fernando Codá Marques pour m'avoir fait réfléchir sur une version du théorème de la dernière section, pour les nombreuses discussions et pour m'avoir guidé dans la littérature ancienne et récente. Je remercie également Olivier Biquard pour m'avoir aidé à trouver ce stage.

1 Présentation générale des théories du min-max

Dans cette section, les idées fondamentales communes aux théories du min-max sont décrites et quelques exemples frappants d'application sont également présentés.

1.1 Idées principales

Pour trouver une géodésique non triviale sur une 2-sphère quelconque $\mathbf{S}^2$, Birkhoff proposa la méthode suivante. Considérons une famille à un paramètre $\{\sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ de courbes simples dans $\mathbf{S}^2$, appelée "sweepout" (terme que l'on pourrait traduire par "famille de balayage"), telle que σ_0 et σ_1 sont des courbes points et l'application induite $F : \mathbf{S}^2 \to \mathbf{S}^2$ est de degré non nul. Puis on déforme continûment la famille $\{\sigma_t\}$ de sorte à minimiser la quantité $\max_t \mathrm{Long}(\sigma'_t)$, la famille $\{\sigma'_t\}$ étant obtenue en déformant $\{\sigma_t\}$. En d'autres termes, on resserre le sweepout $\{\sigma_t\}$ pour minimiser la longueur maximale. On peut alors montrer qu'il existe une géodésique fermée dont la longueur est cette quantité de min-max. Un argument basé sur le flot de la courbure moyenne permet de s'assurer que l'on peut trouver une telle géodésique qui est en plus simple.

Les théories du min-max sont nées de la volonté de généraliser ces idées aux dimensions supérieures. Etant donné que la preuve de Birkhoff s'appuie sur des techniques ne fonctionnant qu'en dimension 1, de nouvelles difficultés apparaissent : comment montrer la régularité des objets obtenus et comment prouver que ces hypersurfaces sont plongées ? Globalement, deux théories sont utilisées : la théorie discrète d'Almgren et Pitts, et la théorie continue (incluant la théorie lisse). Cette dernière a été developpée plus tard et pour l'essentiel suit de près les travaux d'Almgren et Pitts. L'avantage de la théorie discrète est la généralité des objets manipulés (courants, varifolds), en contrepartie elle est plus difficile à mettre en place dans des situations pourtant géométriquement naturelles. Il est plus simple de travailler avec la théorie continue, l'inconvénient étant que les sweepouts doivent être constitués d'hypersurfaces lisses plongées sauf en un nombre fini de points.

Décrivons les idées communes à ces théories. Pour ce faire, on se place dans le cas de la théorie lisse, plus simple à visualiser. Il s'agit ici de donner une intuition et une vue d'ensemble ; dans la section suivante, le lecteur trouvera une présentation plus rigoureuse de cette théorie. Considérons une 3-variété riemannienne compacte N et une famille de sweepout $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$, où les Σ_t sont des surfaces compactes lisses. Défnissons la quantité de min-max également appelée largeur :

$$W = \inf_{\psi} \sup_{t\in[0,1]} \text{Aire}(\psi(t,\Sigma_t))$$

où ψ parcourt l'ensemble

$$\{\psi \in C^\infty([0,1]\times N, N); \forall t, \psi(t,.) \text{ est un difféomorphisme de } N \text{ isotope à Id}\}.$$

Soit $\{\psi_n\}$ une suite minimisante. Une suite min-max est une suite $\{\Sigma^j\}$ telle que $\Sigma^j = \psi_j(t_j, \Sigma_{t_j})$ pour une suite de temps t_j et $\text{Aire}(\Sigma^j) \to W$.

Etape 1

Bien entendu, une surface $\psi_n(t_n, \Sigma_{t_n})$ peut est très différente d'un varifold stationnaire, même si son aire est proche de W. Il faut alors se débarrasser de ces surfaces gênantes en resserrant le sweepout et réduire leurs aires pour que toute suite min-max contienne une sous-suite convergeant vers un varifold stationnaire au sens des varifolds.

Etape 2

Dans cette étape est introduite une notion importante mise en avant par Pitts, la propriété "almost minimizing" ou encore "presque minimisant". L'idée générale est d'exploiter les surface minimales stables, dont la seconde forme fondamentale est bien contrôlée. Pour cela, considérons les surfaces S qui dans un ouvert U sont presque minimisantes au sens suivant : pour décroître de façon substantielle l'aire de S par déformations continues, il faut augmenter fortement l'aire de S. On espère alors qu'une limite varifold de telles surfaces gardera certaines "bonnes" propriétés. Le but de cette étape est de prouver qu'il existe un varifold V limite d'une suite min-max qui est "presque minimisante".

Etape 3

Enfin, la dernière étape montre qu'un varifold V limite d'une suite "presque minimisante" est lisse et plongée. En fait, un tel V admet des "remplacements" dans tout anneau suffisamment petit. Un "remplacement" de V dans un anneau An est un varifold stationnaire V' qui coïncide avec V hors de An, tel que la masse de V et V' restreints à An est la même et tel que V' est une surface minimale stable dans An. Il est vrai que le V' ainsi obtenu admet aussi des "remplacements" dans tout anneau suffisamment petit, et ainsi de suite. L'existence de ces "remplacements" force V à être lisse et plongé.

1.2 Quelques applications

Application 1 - Extinction du flot de Ricci en temps fini.

Une variété M est première si elle ne peut s'écrire comme somme connexe de deux variétés dont aucune n'est une sphère. M est asphérique si $\pi_l(M) = 0$ pour tout $l > 0$.

Le flot de Ricci, introduit par Hamilton en 1981, est un flot géométrique intrinsèque : une variété M compacte munie d'une famille de métrique $\{g(t)\}_{t\in[0,T)}$ suit le flot de Ricci si la métrique se déforme au cours du temps selon l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}\,.$$

Cet outil est à la base de la solution par Perelman de la conjecture de Poincaré. Le flot de Ricci peut produire des singularités (la courbure explose en temps fini) mais on peut passer outre ces singularités grâce à une extension du flot, appelée flot de Ricci avec chirurgies. L'idée générale est que le flot de Ricci avec chirurgies aura tendance à uniformiser la métrique, et donc pour comprendre la variété M, il suffira d'analyser ce que produit le flot après un certain temps. Le théorème suivant affirme qu'il n'y a pas besoin d'étudier ce qui pourrait éventuellement se passer en temps infini.

Theorem 2 ([3])**.** *Soit (M^3, g) une 3-variété riemannienne compacte orientable dont la décomposition en facteurs premiers n'admet que des facteurs non-asphériques et muni d'une métrique $g = g(0)$. Alors la solution $g(t)$ du flot de Ricci avec chirurgies s'éteint en temps fini.*

Si M est première et non asphérique (voir [3]), alors il est connu que $\pi_3(M)$ est non-trivial. Fixons une classe d'homotopie non triviale $\beta \in \pi_3(M)$. La largeur W associée à β est alors forcément strictement positive. L'idée est ensuite de trouver une borne supérieure à la dérivée en temps de la largeur $W(g(t))$ et remarquer que cela implique l'extinction du flot de Ricci.

Application 2 - Rigidité des sphères minimales produites par min-max lorsque la courbure de Ricci est strictement positive.

Theorem 3 ([5])**.** *Soit g une métrique à courbure de Ricci strictement positive sur $M = S^3/\Gamma$, telle que la courbure scalaire $R \geq 6$. Si (M, g) n'est pas isométrique à la 3-sphère euclidienne, alors il existe une surface minimale Σ plongée, d'indice 0 ou 1, et Aire$(\Sigma) < 4\pi$.*

Application 3 - Indice, volume et multiplicité des hypersurfaces produites par min-max lorsque la courbure de Ricci est strictement positive.

Soit (M^{n+1}, g) une $(n+1)$-variété riemannienne connexe compacte orientable avec $2 \leq n \leq 6$. Ici, une "hypersurface" est supposée connexe compacte plongée. Notons

$$\mathcal{S}_M = \{\Sigma^n \subset M; \Sigma \text{ est une hypersurface minimale dans } M\}.$$

Soit

$$W_M = \min_{\Sigma\in\mathcal{S}_M} \left\{ \begin{array}{cc} \mathrm{Vol}(\Sigma) & \text{si } \Sigma \text{ est orientable,} \\ 2\mathrm{Vol}(\Sigma) & \text{si } \Sigma \text{ est non-orientable.} \end{array} \right\}.$$

Theorem 4 ([13])**.** *Soit (M^{n+1}, g) une $(n+1)$-variété riemannienne connexe comapcte orientable avec $2 \leq n \leq 6$. Alors l'hypersurface Σ produite par la théorie d'Almgren et Pitts correspondant à la classe fondamentale $[M] \in H_{n+1}(M)$ est :*

1. *ou bien orientable de multiplicité* 1*, d'indice* 1 *et* $Vol(\Sigma) = W_M$*,*
2. *ou bien non-orientable de multiplicité* 2 *avec* $2\,Vol(\Sigma) = W_M$*.*

Application 4 - La conjecture de Willmore.
En 2012, Marques and Neves ont prouvé la célèbre conjecture de Willmore :

Theorem 5 ([7])**.** *Si* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ *est une surface compacte immergée de genre strictement positif, alors*

$$\int_\Sigma |H|^2 \geq 2\pi^2.$$

Dans cet énoncé, $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ désigne la courbure moyenne de la surface, k_1 et k_2 étant les courbures principales.

Application 5 - Existence d'une infinité d'hypersurfaces minimales lorsque la courbure de Ricci est strictement positive.

Theorem 6 ([6])**.** *Soit* (M, g) *une* $(n+1)$*-variété riemannienne compacte avec* $2 \leq n \leq 6$*. Supposons que* M *satisfait la propriété de Frankel. Alors* M *contient une infinité d'hypersurfaces minimales distinctes, compactes, plongées.*

On dit que (M, g) satisfait la propriété de Frankel si tout couple d'hypersurfaces minimales compactes plongées de M s'intersectent. En particulier, cette propriété est verifiée si la courbure de Ricci est strictement positive.

2 Théorie du min-max lisse pour les surfaces

La théorie du min-max lisse permet de construire des surfaces minimales dans une 3-variété riemannienne compacte ; elle se distingue des autres théories par le fait qu'elle donne un contrôle topologique précis des surfaces produites. Les références utilisées sont [2] et [4].

2.1 Le théorème de Simon-Smith

Soit M une 3-variété riemannienne compacte. On note Diff_0 la composante connexe dans le groupe des difféomorphismes de M contenant Id, $\mathfrak{Is}$ l'ensemble des isotopies et $\mathcal{H}^2$ la mesure de Hausdorff 2-dimensionnelle.

Definition 7. *Une famille* $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ *de surfaces dans* M *est dite continue si*

- $\mathcal{H}^2(\Sigma_t)$ *est continue en* t*,*
- $\Sigma_t \to \Sigma_{t_0}$ *dans la topologie de Hausdorff lorsque* $t \to t_0$*.*

Une famille $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ *continue (i.e. satisfaisant les deux points précécents) est appelée famille généralisée s'il existe un sous-ensemble fini* T *de* $[0,1]$ *et une famille finie de points* P *dans* M *tels que*

1. *Σ_t est une surface pour tout $t \notin T$,*

2. *pour $t \in T$, Σ_t est une surface dans $M \backslash P$.*

Un ensemble Λ de familles généralisées est dit saturé si pour toute famille $\{\Sigma_t\} \in \Lambda$ et toute $\phi \in C^\infty([0,1] \times M, M)$ telle que $\phi(t,.) \in \mathrm{Diff}_0$ pour tout t, $\{\Sigma_t'\} = \{\phi(t, \Sigma_t)\}$ est une famille généralisée appartenant à Λ, et si le P apparaissant dans la définition précédente a un cardinal borné par un entier $N(\Lambda)$ ne dépendant pas de la famille généralisée $\{\Sigma_t\}$.

Soit Λ un ensemble saturé. Notons

$$W(\Lambda) = \inf_{\{\Sigma_t\} \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{H}^2(\Sigma_t)$$

la largeur de Λ. Si $\lim_{n \to \infty} \max_{t \in [0,1]} \mathcal{H}^2(\Sigma_t^n) \to W(\Lambda)$, alors $\{\{\Sigma_t^n\}\}_n$ est appelée suite minimisante. Lorsque $\{\{\Sigma_t^n\}\}_n$ est minimisante et $\mathcal{H}^2(\Sigma_{t_n}^n) \to W(\Lambda)$, $\{\Sigma_{t_n}^n\}$ est appelée une suite de min-max.

La proposition suivante permet de s'assurer que la largeur peut être non nulle.

Proposition 8. *Soit M une 3-variété riemannienne compacte. Soit $\{\Sigma_t\}$ les lignes de niveau d'une fonction de Morse. Le plus petit ensemble saturé Λ contenant $\{\Sigma_t\}$ vérifie $W(\Lambda) > 0$.*

Le théorème principal de cette sous-section est le résultat suivant dû à Simon-Smith :

Theorem 9. *Soit M une 3-variété riemannienne compacte. Pour tout ensemble saturé de familles généralisées Λ, il existe une suite de min-max de Λ convergeant au sens des varifolds vers une surface minimale plongée d'aire $W(\Lambda)$ (comptée avec multiplicité).*

2.2 Preuve du théorème de Simon-Smith

Présentons les principaux arguments de la preuve en reprenant plus précisément les trois étapes esquissées dans la sous-section 1.1. La définition des varifolds est supposée connue (voir [11] par exemple pour plus d'informations). Seuls des 2-varifolds seront considérés. Par abus de langage, on confondra une surface lisse et le varifold associé.

Etape 1

Soit X l'ensemble des varifolds de masse bornée par $4W(\Lambda)$, muni de la topologie faible* et soit $\mathcal{V}_\infty$ l'ensemble des varifolds stationnaires dans X. Il est connu que X est compact et métrisable ; on se fixe une telle métrique $\mathfrak{d}$.

Proposition 10. *Il existe une suite minimimisante $\{\{\Sigma_t^n\}\}_n \subset \Lambda$ telle que si $\{\Sigma_{t_n}^n\}$ est une suite de min-max, alors $\mathfrak{d}(\Sigma_{t_n}^n, \mathcal{V}_\infty) \to 0$.*

Démonstration. La suite $\{\{\Sigma_t^n\}\}_n$ étant donnée, on peut voir chaque surface Σ_t^n comme un élément de X. Si un varifold $x \in X$ est "loin" de l'ensemble $\mathcal{V}_\infty$, alors on peut réduire sa masse au premier ordre grâce à un difféomorphisme engendré par un champ de vecteurs (la vitesse de décroissance au temps zéro ne dépendant que de $\mathfrak{d}(x, \mathcal{V}_\infty)$). L'idée est alors de construire une application continue H associant à chaque élément x de X un champ de vecteurs faisant décroître la masse de x, puis en poussant le long des ces champs de vecteurs, de déformer chaque famille $\{\Sigma_t^n\}$ en $\{\Gamma_t^n\}$ vérifiant : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\text{si } n > N \text{ et } \mathcal{H}^2(\Gamma_{t_n}^n) > W(\Lambda) - \delta, \text{ alors } \mathfrak{d}(\Gamma_{t_n}^n, \mathcal{V}_\infty) < \epsilon.$$

Cette nouvelle suite minimisante $\{\{\Gamma_t^n\}\}_n$ satisfait alors la conclusion de la proposition.
□

Etape 2

Défnissons la notion de "presque minimisant" (notée a.m. pour "almost minimizing") :

Definition 11. *Soit $\epsilon > 0$, $U \subset M$ un ouvert, Σ une surface. On dit que Σ est ϵ-a.m. dans U s'il n'existe pas d'isotopie ψ à support dans U telle que*

$$\mathcal{H}^2(\psi(t, \Sigma)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma) + \epsilon/8 \text{ pour tout } t, \tag{1}$$

$$\mathcal{H}^2(\psi(1, \Sigma)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma) - \epsilon. \tag{2}$$

Une suite $\{\Sigma^n\}$ est dite a.m. dans U si chaque Σ^n est $1/n$-a.m. dans U.

Proposition 12. *Il existe une fonction $r : M \to \mathbb{R}^+$ et une suite de min-max $\{\Sigma^j\}$ telle que :*

- *$\{\Sigma^j\}$ est a.m. dans tout anneau An centré en x de rayon extérieur $r(x)$,*
- *dans chaque tel anneau, Σ^j est lisse pour j suffisamment grand,*
- *Σ^j converge vers un varifold stationnaire V dans M lorsque $j \to \infty$.*

Démonstration. Soit $\{\{\Sigma_t^n\}\} \subset \Lambda$ telle que $\max_t \mathcal{H}^2(\Sigma_t^n) < W(\Lambda) + 1/n$ et satisfaisant la conclusion de la proposition 10. Fixons $L \in \mathbb{N}$. On veut montrer qu'il existe $n > L$ et $t_n \in [0, 1]$ tels que $\Sigma^L = \Sigma_{t_n}^n$ est $1/L$-a.m. dans tout anneau au rayon extérieur suffisamment petit. Supposons par l'absurde l'hypothèse suivante :

(Hyp) : pour tout temps t appartenant à $K_n = \{t \in [0, 1]; \mathcal{H}^2(\Sigma_t^n) < W(\Lambda) - 1/L\}$, il existe un point x tel qu'il existe des anneaux An centrés en x dont le rayon extérieur tend vers zéro sans que Σ_t^n soit $1/L$-a.m. dans An.

On sait que si $\Sigma_{t_0}^n$ n'est pas $1/L$-a.m. dans un ouvert U, il existe une isotopie ψ satisfaisant (1) et (2). Fixons un intervalle ouvert I contenant t_0 et choisissons une fonction bosse $\varphi \in C_c^\infty(I, [0, 1])$ avec $\varphi(t_0) = 1$. Definissons

$$\Gamma_t^n = \psi(\varphi(t), \Sigma_t^n).$$

Si l'intervalle est choisi assez petit, alors d'après (1), l'aire de Γ_t^n ne sera pas beaucoup plus grande que celle de Σ_t^n. Par contre d'après (2), pour les temps t proches de t_0, l'aire de Γ_t^n sera bien plus petite que celle de Σ_t^n. En utilisant ce fait, on aimerait construire une nouvelle suite $\{\{\Gamma_t^n\}\}$ telle que $\limsup_n \max_t \mathcal{H}^2(\Gamma_t^n) < W(\Lambda)$, ce qui sera la contradiction recherchée (puisque $\{\Gamma_t^n\}_{t\in[0,1]} \in \Lambda$). Il s'agit alors de trouver pour chaque n un recouvrement de K_n par de tels intervalles I, où chaque I est associé à un ouvert U égal à un anneau. L'ensemble de ces anneaux est en fait choisi pour pouvoir recoller toutes les petites déformations ψ en une seule déformation qui va grosso modo diminuer l'aire de chaque surface Σ_t^n ($t \in [0,1]$). Ce choix est rendu possible par l'hypothèse de contradiction **(Hyp)** et un argument combinatoire.

□

Etape 3
a) Être a.m. ⇒ existence de remplacements

Definition 13. *Soit V un varifold stationnaire dans M et $U \subset M$ un ouvert. Un varifold stationnaire V' est un remplacement pour V dans U si :*

$$V' = V \text{ dans } G(M\backslash\bar{U}) \text{ (grassmannienne des 2-plans) et } ||V'||(M) = ||V||(M), \quad (3)$$

$$V \restriction U \text{ est une surface minimale stable } \Sigma \text{ avec } \bar{\Sigma}\backslash\Sigma \subset \partial U. \quad (4)$$

Notons $\mathcal{AN}_r(x)$ l'ensemble des anneaux centrés sur x de rayon exterieur inférieur à $r > 0$, et $An(x, s, r)$ l'anneau de centre x, de rayons $s < r$.

Definition 14. *Soit V un varifold stationnaire et $U \subset M$ un ouvert. On dit que V satisfait la bonne propriété de remplacement dans U si :*

1. *V a un remplacement V' dans tout anneau $An \in \mathcal{AN}_{r(x)}(x)$ pour une fonction $r : U \to \mathbb{R}_+^*$,*
2. *V' a un remplacement V'' dans tout anneau $An \in \mathcal{AN}_{r(x)}(x)$ et tout anneau $An \in \mathcal{AN}_{r'(y)}(y)$ pour une fonction $r' > 0$,*
3. *V'' a un remplacement V''' dans tout anneau $An \in \mathcal{AN}_{r(y)}(y)$ pour une fonction $r'' > 0$.*

Proposition 15. *Soit $\{\Sigma^j\}$ une suite de surfaces compacte dans M convergeant vers un varifold stationnaire V. S'il existe une fonction $r : M \to \mathbb{R}_+^*$ telle que dans tout anneau de $\mathcal{AN}_{r(x)}(x)$ et tout j, Σ^j est une surface lisse $1/j$-a.m., alors V satisfait la bonne propriété de remplacement dans M.*

Démonstration. Fixons un anneau $An \in \mathcal{AN}_{r(x)}(x)$. Definissons

$$\mathfrak{Is}_j(An) = \{\psi \in \mathfrak{Is}(An); \mathcal{H}^2(\psi(\tau, \Sigma^j)) \leq \mathcal{H}^2(\Sigma^j) + 1/(8j) \text{ pour tout } \tau \in [0,1]\}.$$

On peut prouver que si une suite $\{\Sigma^{j,k}\}_k$ est minimisante pour le problème $(\Sigma^j, \mathfrak{Is}_j(An))$ et converge vers un varifold V^j, alors V^j est une surface minimale stable dans An. Ce lemme découle d'un résultat de Meeks-Simon-Yau [8]. Ensuite, si un varifold V^* est limite d'une sous-suite de $\{V^j\}_j$, alors V^* satisfait (3) et (4). De plus il n'est pas difficile de montrer que V^* est a fortiori stationnaire, donc c'est bien un remplacement de V dans An. Pour finir la preuve, il suffit de remarquer que cette construction fonctionne également pour V^* et ainsi de suite, ce qui donne en fait une infinité de remplacements (on n'en a besoin que de trois). En effet, V^* est limite d'une suite de surfaces de la forme Σ^{j,k_j} qui est $1/j$-a.m. dans les mêmes anneaux que Σ^j. □

b) Existence de remplacements ⇒ être lisse plongé

Proposition 16. *Un varifold V satisfaisant la bonne propriété de remplacement dans M est une surface minimale lisse plongée.*

Démonstration. Soit $x \in V$, on veut montrer que V est lisse plongé dans un voisinage de x. Soit $An(x, s_1, r_1) \in \mathcal{AN}_{r(x)}(x)$ $(0 < s_1 < r_1 < r(x))$. On remplace dans cet anneau V par V'. Puis on remplace V' par V'' dans $An(x, s_2, r_2)$ où $s_2 < s_1$ et $s_1 < r_2 < r_1$. Rappelons que V' (resp. V'') est alors lisse dans $An(x, s_1, r_1)$ (resp. $An(x, s_2, r_2)$). On peut montrer (en utilisant un troisième remplacement) que les parties lisses de V' et V'' se recollent le long de $\{y \in V; d(x, y) = r_2\}$ en une unique surface minimale lisse. Notons Σ' (resp. Σ'') la restriction de V' (resp. V'') à $An(x, s_1, r_1)$ (resp. $An(x, s_2, r_2)$). On prouve que pour y dans un sous-ensemble dense de $\operatorname{spt} ||V|| \cap B(x, s_1)\backslash\{x\}$, si $d(x, y) = s_2$, alors y est dans l'adhérence de Σ''. Par conséquent, en faisant tendre s_2 vers 0, on prouve que le support de $V \restriction_{B(x,s_1)\backslash\{x\}}$ est contenu dans l'unique surface minimale lisse S de $B(x, s_1)\backslash\{x\}$ qui se recolle avec Σ'. La propriété (3) des recollements et le "Constancy Theorem" montrent alors que $V = S$ dans $B(x, s_1)\backslash\{x\}$. La dernière chose a vérifiée est que le point $\{x\}$ n'est pas une singularité dans V, ce qui se vérifie en analysant les cônes tangents en x et utilisant le théoreme d'Allard. □

2.3 Contrôle du genre

Notons par $\mathbf{g}$ le genre d'une surface et $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble des surfaces orientable (resp. non-orientable) compacte plongée de M. Le théorème suivant, prouvé dans [4], constitue un aspect spécifique à la théorie lisse pour les surfaces. Il permet de contrôler la topologie des surfaces produites par cette théorie.

Theorem 17. *Soit $\{\Sigma^j_{t_j}\}$ une suite a.m. dans tout anneau de rayon extérieur suffisamment petit. Soit $V = \sum_i n_i \Gamma^i$ le varifold limite des $\Sigma^j_{t_j}$, où les Γ^j sont les composantes connexes de V comptées sans multiplicité, et $n_i \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\sum_{\Gamma^i \in \mathcal{O}} \mathbf{g}(\Gamma^i) + \frac{1}{2} \sum_{\Gamma^i \in \mathcal{N}} (\mathbf{g}(\Gamma^i) - 1) \leq \liminf_{j\to\infty} \liminf_{\tau\to t_j} (\Sigma^j_\tau).$$

Ce théorème est utile entre autres parce que toute 3-variété compacte orientable admet un scindement de Heegaard. Rappelons qu'une surface Σ orientable compacte plongée de M est un scindement de Heegaard de M si $M\backslash\Sigma$ a deux composantes et celles-ci sont difféomorphes à une boule à laquelle on attache des poignées (i.e. un "handlebody"). Le genre de Heegaard de M est le plus petit genre possible d'un scindement de Heegaard de M. Un scindement de Heegaard de genre $\mathbf{g}$ donne naturellement lieu à un ensemble saturé de familles généralisées constituées de surfaces de genre $\mathbf{g}$. Ansi, les théorèmes 9 et 17 impliquent par exemple que si M est orientable et ne contient pas de surface plongée non-orientable, alors il existe une surface minimale compacte plongée orientable dans M de genre inférieur au genre de Heegaard de M.

3 Hypersurfaces d'aire minimale

Dans cette dernière section, je présente un résultat prouvé durant mon stage de M2 puis quelques questions ouvertes relatives aux théories du min-max.

3.1 Une extension d'un théorème de Calabi et Cao

Calabi et Cao ont prouvé dans [1] que sur une 2-sphère à courbure de Gauss positive ou nulle, la plus courte géodésique non triviale est simple. Leur preuve s'appuie sur un argument de min-max. Supposons par l'absurde qu'une géodésique de longueur minimale γ est non simple. On construit un sweepout $\{\sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ non trivial constitué de 1-cycles rectifiables vérifiant

$$\sigma_{1/2} \text{ est le cycle associé à } \gamma,$$

$$\mathbf{M}(\sigma_t) < \mathrm{Long}(\gamma) \text{ si } t \neq 1/2.$$

Puis on trouve un autre sweepout $\{\sigma'_t\}_{t\in[0,1]}$ dans la même classe d'homotopie que $\{\sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ (qui peut être vu comme un chemin continu dans l'espace des 1-cycles rectifiables) tel que

$$\max_t \mathbf{M}(\sigma'_t) < \mathrm{Long}(\gamma).$$

Ainsi la largeur associée à la classe de sweepouts de $\{\sigma'_t\}_{t\in[0,1]}$ est strictement plus petite que $\mathrm{Long}(\gamma)$ et par la théorie du min-max d'Almgren-Pitts, il existe une géodésique fermée plus courte que γ, ce qui est absurde. La géodésique γ est donc bien simple.

Il est alors naturel de se demander si par exemple le résultat analogue reste vrai dans le cas d'une 3-sphère à courbure de Ricci strictement positive (question posée par mon directeur de mémoire). La réponse est oui ; en fait, j'arrive à ce résultat qui étend le théorème de Calabi-Cao jusqu'à la dimension 7 :

Theorem 18. *Soit M^{n+1} une variété compacte simplement connexe dont la courbure de Ricci est positive ou nulle, et $2 \leq n \leq 6$. Alors il existe une hypersurface minimale d'aire minimale et une telle hypersurface est toujours plongée.*

Fondamentalement, la preuve est similaire à celle de Calabi-Cao. Toutefois, leur preuve utilise des techniques propres à la dimension 1 : par exemple le flot de Birkhoff, qui est exploité, n'a pas de bon analogue en dimension supérieure, de plus la structure d'une géodésique fermée est très simple, ce qui n'est plus du tout vrai dès le cas des surfaces minimales immergées. Les restrictions sur la dimension proviennent des limitations de la théorie du min-max (en dimension $n+1 \geq 8$, même les hypersurfaces "stables" peuvent avoir des singularités). La théorie d'Almgren-Pitts est nécessaire car on considère des familles d'hypersurfaces non plongées.

3.2 Quelques questions ouvertes

Terminons par quelques questions de recherche.

1. Dans le théorème 18, il me semble que les hypothèses sur la courbure de Ricci et le groupe fondamental ne sont pas nécessaires. Cela peut sembler surprenant à première vue puisqu'il existe des contre-exemples au théorème de Calabi-Cao si la courbure de Gauss a un signe quelconque. Cependant, rappelons qu'en dimension $n+1 \geq 3$, un n-varifold a.m. au sens d'Almgren-Pitts est une hypersurface lisse plongée, fait qui devient faux lorsque $n = 1$. Cette observation est en cours de vérification.

2. Un problème important est de borner l'indice de Morse des hypersurfaces minimales produites par les théories du min-max. Une conjecture affirme que pour un k-sweepout (sweepout à k paramètres), l'indice est borné par k et est égal à k de façon générique. La première moitié de cette conjecture est vérifiée dans des cas très particuliers, par exemple $Ric > 0$ et $k = 1$.

3. Etudier la relation entre le volume et l'indice des hypersurfaces produites par min-max avec un k-sweepout, où $k \to \infty$. Dans le cas des surfaces, étudier la relation entre le genre et l'indice.

4. A un k-sweepout on associe une k-largeur. Etant donnée la caractérisation par min-max des valeurs propres du laplacien, il est naturel de poser des questions provenant de l'analogie entre les k-largeurs et les valeurs propres (voir [6] Section 9). Par exemple, y a-t-il une loi de Weyl pour les k-largeurs ?

Références

[1] E. Calabi and J. Cao. Simple closed geodesics on convex surfaces. *J. Differential Geom.*, 36(3) :517–549, 1992.

[2] T. H. Colding and C. De Lellis. The min-max construction of minimal surfaces. *Surveys in differential geometry*, VIII :75–107, 2003.

[3] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II. Estimates for the extinction time for the Ricci flow on certain 3-manifolds and a question of perelman. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(3) :561–569, 2005.

[4] C. De Lellis and F. Pellandini. Genus bounds for minimal surfaces arising from the min-max construction. *J. Reine Angew. Math*, 2010(644) :47–99, 2010.

[5] F. C. Marques and A. Neves. Rigidity of min-max minimal spheres in three-manifolds. *Duke Math. J.*, 161(14) :2725–2752, 2012.

[6] F. C. Marques and A. Neves. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive ricci curvature. arXiv :1311.6501 [math.DG], 2013.

[7] F. C. Marques and A. Neves. Min-max theory and the Willmore conjecture. *Ann. of Math.*, 179(2) :683–782, 2014.

[8] B. Meeks, L. Simon, and S. T. Yau. Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. *Ann. of Math.*, 116 :621–659, 1982.

[9] J. T. Pitts. *Existence and regularity of minimal surfaces on Riemannian manifolds*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1981.

[10] R. Schoen and L. Simon. Regularity of stable minimal hypersurfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34 :741–797, 1981.

[11] L. Simon. *Lectures on Geometric Measure Theory.* Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, 1984.

[12] F. Smith. *On the existence of embedded minimal* 2*-spheres in the* 3*-sphere, endowed with an arbitrary Riemannian metric.* PhD thesis, 1982.

[13] X. Zhou. Min-max minimal hypersurface in $(M^{n+1}, g))$ with $Ric \geq 0$ and $2 \leq n \leq 6$. *J. Differential Geom.*, 100(1) :129–160, 2015.