

**Exposé de 1ère année :
Une population peut-elle tenir l'allure
d'un changement climatique ?**

Valentin Strach et Simon Weber

Sous la direction de Vincent Calvez

Le 15 Juin 2016

Table des matières

1	Introduction	2
2	Étude complète d'un cas particulier	3
2.1	Modélisation du problème	3
2.2	Étude au bord et stabilité	4
2.3	Étude du L critique	6
2.4	Linéarisation autour de zéro	10
3	Analyse d'une classe plus générale d'équations	12
3.1	Comportement asymptotique des ondes progressives	12
3.2	Étude de la valeur propre dominante	15
3.3	Unicité des ondes progressives	18
3.4	Comportement asymptotique en temps	19
4	D'autres modèles possibles	21
4.1	Effet Allee faible	21
4.2	Compétition entre deux espèces	21
5	Simulation numérique	22
A	Code Python	25
	Références	26

1 Introduction

Le réchauffement climatique entraîne de profonds changements concernant la répartition géographique du climat. Cela perturbe les écosystèmes et déplace certains climats, certains nouveaux climats sans analogue existants risquent d'apparaître et d'autres, notamment dans les massifs montagneux, risquent de disparaître.

Il est possible de définir une vitesse du climat, c'est à dire la vitesse à laquelle une condition climatique donnée se déplace. Selon le scénario choisi de RCP 2.6 à RCP 8.5 (Representative Concentration Pathways), il a été retenu une vitesse moyenne de déplacement du climat entre 0.11 et $1.46 km.an^{-1}$, plus le réchauffement est rapide, plus le climat se déplace vite. Selon le scénario intermédiaire de réchauffement climatique calculé pour la période 2000-2100, la vitesse moyenne de déplacement du climat est de $0.42 km.an^{-1}$ [4]. Cette vitesse peut varier localement, par exemple 28.8% de la surface du globe aurait une vitesse de déplacement du climat supérieur à $1 km.an^{-1}$. Cela entraîne que les êtres vivants naturellement sous ces conditions climatiques doivent se déplacer pour survivre.

Nous allons considérer tout au long de notre exposé que cette vitesse de déplacement c est constante. Nous allons considérer une population représentée par une densité de population u avec certaines caractéristiques, plus ou moins réalistes, concernant les conditions sa survie. Nous allons donc étudier les conditions de la survie de cette population en fonction de la vitesse de déplacement du climat.

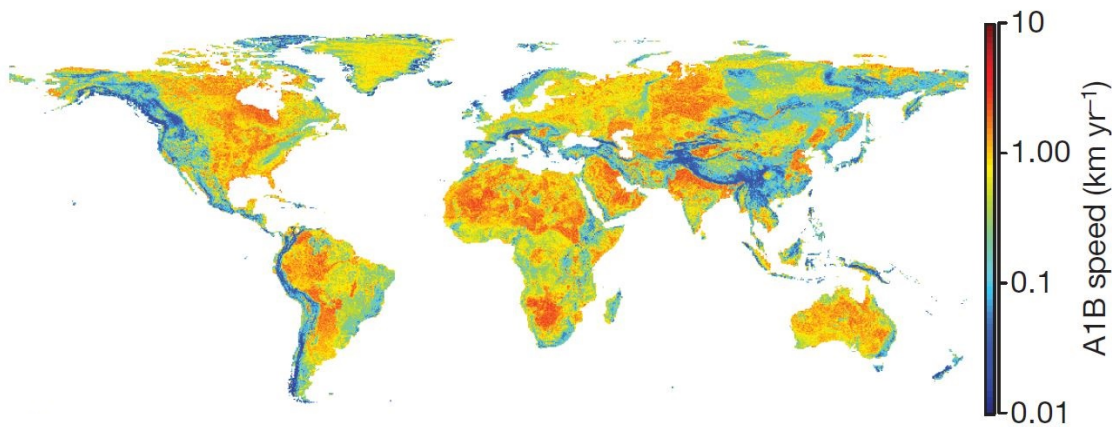


FIGURE 1 – Vitesse de déplacement du climat en $km.an^{-1}$ selon le scénario intermédiaire du réchauffement climatique [4]

2 Étude complète d'un cas particulier

Pour cette partie ainsi que la suivante nous nous sommes aidés de l'article de Berestycki, Nagelkerke et Zegeling [1].

2.1 Modélisation du problème

Nous allons nous intéresser à un modèle en 1 dimension. Nous noterons u la densité de population, u est une fonction de la position et du temps que nous noterons respectivement x et t .

Nous allons étudier un modèle de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, x - ct) \quad (1)$$

Où :

- c est un réel positif donné
- $-\infty < x < +\infty$
- u représente la densité de la population étudiée. u est comme nous l'avons défini une fonction de t et de x .
- D est un coefficient de diffusion en adéquation avec la population choisie. D est supposé indépendant du climat.
- f décrit l'effet de la reproduction et de la mortalité et de leur dépendance au climat.

Nous allons supposer que

$$f(u, x) = ug(u, x) \quad (2)$$

où la croissance par habitant g est négative pour des valeurs de $|x|$ suffisamment grandes.

Nous allons supposer que

$$\{x : g(0, x) > 0\} \quad (3)$$

est un intervalle de la forme $[0, L]$.

Nous allons nous demander à propos de l'équation (1) s'il existe des solutions de la forme

$$u(t, x) = w(x - ct) \quad (4)$$

Nous allons nous intéresser à leur stabilité et leur convergence quand $t \rightarrow +\infty$.

Posons

$$\xi = x - ct \quad (5)$$

Nous allons noter w_ξ la dérivée de w et $w_{\xi\xi}$ la dérivée seconde de w .

Nous avons :

- $\frac{\partial u}{\partial t} = -cw_\xi$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = w_{\xi\xi}$

Nous pouvons donc réécrire (1) en supposant que g est constante par morceaux par rapport à la variable x en :

$$Dw_{\xi\xi} + cw_\xi + wg(w, \xi) = 0 \quad (6)$$

2.2 Étude au bord et stabilité

Nous allons maintenant supposer que g est de la forme

$$g(u, x) = \begin{cases} -\tilde{r} & \text{si } x < 0 \text{ et } x > L \\ r \left(1 - \frac{u}{K}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad (7)$$

où \tilde{r}, r, K, L sont 4 paramètres positifs donnés.

Nous allons rechercher les solutions de classe C^1 ce qui permet de garantir que la diffusion conserve la masse, c'est à dire que le flux $D\frac{\partial u}{\partial x}$ est continu.

Nous avons donc, en comptant w et c , 6 paramètres.

Modifions les paramètres r, L, c, w , pour simplifier l'écriture des équations.

$$\begin{aligned} r_{\text{now}} &= \frac{r}{\tilde{r}} \\ L_{\text{now}} &= \sqrt{\frac{\tilde{r}}{D}} L \\ c_{\text{now}} &= \frac{c}{\sqrt{\tilde{r}D}} \\ w_{\text{now}} &= \frac{w}{K} \end{aligned} \quad (8)$$

Dans les régions où $\xi < 0$ et $\xi > L$, la fonction w satisfait l'équation linéaire :

$$w_{\xi\xi} + cw_\xi - w = 0 \quad (9)$$

L'équation caractéristique s'écrit

$$r^2 + cr - 1 = 0 \quad (10)$$

Dont les solutions notées μ_+ et μ_- sont

$$\mu_{\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad (11)$$

Nous avons donc $\mu_+ > 0$ et $\mu_- < 0$.

Sur le domaine $\xi < 0$ nous avons alors l'existence de A_1 et B_1 tels que

$$w_{\xi < 0}(\xi) = A_1 \exp(\mu_+ \xi) + B_1 \exp(\mu_- \xi)$$

Nous voulons que w soit bornée sur ce domaine. Nécessairement $B_1 = 0$.

Sur le domaine $\xi > L$ nous avons alors l'existence de A_2 et B_2 tels que

$$w_{\xi > L}(\xi) = A_2 \exp(\mu_+ \xi) + B_2 \exp(\mu_- \xi)$$

Nous voulons que w soit bornée sur ce domaine. Nécessairement $A_2 = 0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} w_{\xi < 0}(\xi) &= A \exp(\mu_+ \xi) \\ w_{\xi > L}(\xi) &= B \exp(\mu_- \xi) \end{aligned} \quad (12)$$

Sur le domaine $0 \leq \xi \leq L$ avec les nouveaux paramètres définis en (8) l'équation s'écrit :

$$w_{\xi\xi} + cw_{\xi} + rw(1-w) = 0 \quad (13)$$

Réécrivons d'ailleurs l'équation (13) sous la forme d'un système de façon à tracer des portraits de phase :

$$\begin{cases} w_{\xi} = & v \\ v_{\xi} = -rw(1-w) - cv \end{cases} \quad (14)$$

Les équilibres du système, c'est à dire ceux à dérivées nulles sont les points $(w, v) = (1, 0)$ et $(w, v) = (0, 0)$.

Si on linéarise (14) autour du point $(1, 0)$, on a l'équation

$$\begin{cases} w_{\xi} = & v \\ v_{\xi} = rw - cv & -r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_{\xi} \\ v_{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ r & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX + B \quad (15)$$

Les valeurs propres de A sont

$$\theta_{\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{r + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad (16)$$

On a $\theta_- < 0$ et $\theta_+ > 0$ ce qui signifie que le point $(1, 0)$ est un point col ce qui nous donne un **équilibre instable autour du point** $(1, 0)$.

Si on linéarise (14) autour du point $(0, 0)$, on a l'équation

$$\begin{cases} w_{\xi} = & v \\ v_{\xi} = -rw - cv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_{\xi} \\ v_{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -r & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \Leftrightarrow X' = AX \quad (17)$$

Les valeurs propres de A sont

$$\sigma_{\pm} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{-r + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \quad (18)$$

Si $-r + \left(\frac{c}{2}\right)^2 < 0$ alors le point $(0, 0)$ est un point stable dont l'orbite est une spirale.

Si $-r + \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$ alors le point $(0, 0)$ est aussi un point stable.

2.3 Étude du L critique

Définition 2.1. Soit u_0 une solution positive, bornée à support compact qui est une donnée initiale et $u(t, x)$ une solution de (1) avec la condition initiale u_0 . On dit que :

- Une **extinction** se produit si $u(t, x)$ converge uniformément vers 0 selon la variable x lorsque $t \rightarrow +\infty$
- Une **état fondamental** se produit si $u(t, x)$ converge uniformément vers un état fondamental critique selon la variable x lorsque $t \rightarrow +\infty$
- Une **diffusion** se produit si $u(t, x)$ converge localement uniformément vers l'état d'invasion lorsque $t \rightarrow +\infty$

Lemme 2.2. Soient (v^1, w^1) et (v^2, w^2) deux solutions de (14) définies sur $[a^1, b^1]$ et $[a^2, b^2]$ et vérifiant

$$v^i(a^i) = \mu_+ w^i(a^i), \quad v^i(b^i) = \mu_- w^i(b^i)$$

Où μ_+ et μ_- ont été définis à l'égalité (11)

Et tels que pour $i = 1, 2$

$$\mu_- < \frac{v^i}{w^i} < \mu_+ \text{ et } w^i > 0 \text{ sur }]a^i, b^i[$$

Supposons que $v^2(a^2) > v^1(a^1)$.

Alors $b^2 - a^2 > b^1 - a^1$

Démonstration. Quitte à considérer $w^i(x + a^i)$ nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $a^1 = a^2 = 0$. Nous allons donc montrer que $b^2 > b^1$

Rappelons-nous que $w_x = v$, on tire de l'équation (14) que

$$-(e^{cx} w_x)_x = e^{cx} w g(w) \tag{19}$$

où $g(w) = r(1 - w)$.

De (19), en faisant une intégration par parties, on obtient pour $\alpha, 0 < \alpha < \min(b^1, b^2)$ la relation suivante :

$$[e^{cx} (-w_x^1 w^2 + w_x^2 w^1)]_0^\alpha = \int_0^\alpha e^{cx} w^1 w^2 (g(w^1) - g(w^2)) dx \tag{20}$$

Supposons que $w^1 < w^2$ sur $]0, \alpha[$, comme $w^1(0) < w^2(0)$ (fait qui provient de $v^1(0) < v^2(0)$ et de la relation $v^i(0) = \mu_+ w^i(0)$), cela est vrai si α est assez petit.

L'équation (20) et le fait que $g(w^1) > g(w^2)$ sur $]0, \alpha[$ nous permet de déduire :

$$\frac{w_x^2(\alpha)}{w^2(\alpha)} > \frac{w_x^1(\alpha)}{w^1(\alpha)} \tag{21}$$

Maintenant si $\alpha < \min(b^1, b^2)$ est tel que $w^1 < w^2$ sur $]0, \alpha[$ et $w^1(\alpha) = w^2(\alpha)$ alors l'inégalité (21) nous donne $w_x^2(\alpha) > w_x^1(\alpha)$ ce qui est impossible.

Par conséquent, les courbes de w^1 et w^2 ne se croisent pas sur $[0, \min(b_1, b_2)]$

Supposons maintenant que $b^1 \geq b^2$. On prend $\alpha = b^2$ dans l'équation (21), on obtient alors

$$\frac{w_x^1(\alpha)}{w^1(\alpha)} < \mu_-$$

ce qui contredit nos hypothèses de départ.

Ainsi, $b^2 > b^1$ ce qui termine notre preuve. \square

On en déduit que le plus petit L possible est obtenu à la limite où les points sur les droites $v = \mu_{\pm}w$ approchent l'origine. A cette limite, on peut remplacer le terme non linéaire $-rw(1-w)$ de la seconde équation de (14) par $-rw$

Donc, si on veut relier les demi-droites $v = \mu_{\pm}w, w > 0$ par une orbite correspondant à

$$\begin{cases} w_{\xi} = v \\ v_{\xi} = -rw - cv \end{cases} \quad (22)$$

La solution générale réelle de (22) pour $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < r$ est donnée par

$$\begin{cases} w(\xi) = k \exp(\sigma_+ \xi) + \bar{k} \exp(\sigma_- \xi) \\ v(\xi) = \sigma_+ k \exp(\sigma_+ \xi) + \sigma_- \bar{k} \exp(\sigma_- \xi) \end{cases} \quad (23)$$

où σ_+ et σ_- sont définies à l'égalité (18) et $k \in \mathbb{C}$.

Si on impose

$$\begin{cases} v(0) = \mu_+ w(0) \\ v(l) = \mu_- w(l) \end{cases} \quad (24)$$

Nous allons déterminer les inconnues k et l . Nous avons 2 équations pour 3 inconnues, k comptant pour 2 inconnues réelles. Mais nous remarquons que si k satisfait l'équation alors tout multiple de k réel aussi. Nous pouvons donc choisir que

$$Re(k) = 1 \quad (25)$$

La première équation de (24) implique en écrivant $k = 1 + iIm(k)$:

$$\begin{aligned} (k + \bar{k})\mu_+ &= \sigma_+ k + \sigma_- \bar{k} \\ \Leftrightarrow 2\mu_+ &= \sigma_+(1 + iIm(k)) + \sigma_-(1 - iIm(k)) \\ \Leftrightarrow 2\mu_+ &= \sigma_+ + \sigma_- + iIm(k)(\sigma_+ - \sigma_-) \\ \Leftrightarrow 2\mu_+ &= 2Re(\sigma_+) + iIm(k)(2iIm(\sigma_+)) \end{aligned}$$

Donc

$$Im(k) = \frac{Re(\sigma_+) - \mu_+}{Im(\sigma_+)} \quad (26)$$

k est maintenant totalement connu, il s'écrit

$$k = 1 + i \frac{Re(\sigma_+) - \mu_+}{Im(\sigma_+)} \quad (27)$$

Nous allons maintenant déterminer l . Considérons la seconde équation de (24). Après quelques calculs que nous passerons sous silence, on peut extraire $\tan(Im(\sigma_+)l)$:

$$\begin{aligned} \tan(Im(\sigma_+)l) &= \frac{(\mu_+ - \mu_-)Im(\sigma_+)}{|\sigma_+|^2 - Re(\sigma_+)(\mu_- + \mu_+) + \mu_+\mu_-} \text{ ou encore} \\ \tan\left(\sqrt{r - \left(\frac{c}{2}\right)^2} l\right) &= \frac{2\sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \sqrt{r - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{r - \frac{c^2}{2} - 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Donc si $\left(\frac{c}{2}\right)^2 < r \Leftrightarrow c < 2\sqrt{r}$ il existe une onde progressive si et seulement si $L > l$ i.e

$$L > \frac{1}{\sqrt{r - \left(\frac{c}{2}\right)^2}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{1 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \sqrt{r - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{r - \frac{c^2}{2} - 1}\right) \quad (29)$$

En remplaçant par les données initiales avec les relations (8), nous obtenons

$$L > L_{crit} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{D} - \frac{c^2}{4D^2}}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{\tilde{r} + \frac{c^2}{4D}} \sqrt{r - \frac{c^2}{4D}}}{r - \frac{c^2}{2D} - \tilde{r}}\right) \quad (30)$$

Nous allons alors poser

$$c_0 = 2\sqrt{rD} \quad (31)$$

Et nous allons alors réécrire L_{crit} .

$$L_{crit} = \frac{\sqrt{\frac{D}{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}} \arctan\left(\frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2} \sqrt{\frac{r}{\tilde{r}} + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}}{1 - \frac{\tilde{r}}{r} - 2\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}\right) \quad (32)$$

En réécrivant (28) à l'aide de la formule

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

Nous pouvons obtenir une deuxième expression de L_{crit} sous la forme

$$L_{crit} = \frac{2\sqrt{\frac{D}{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{\tilde{r}}{r} + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}}\right) \quad (33)$$

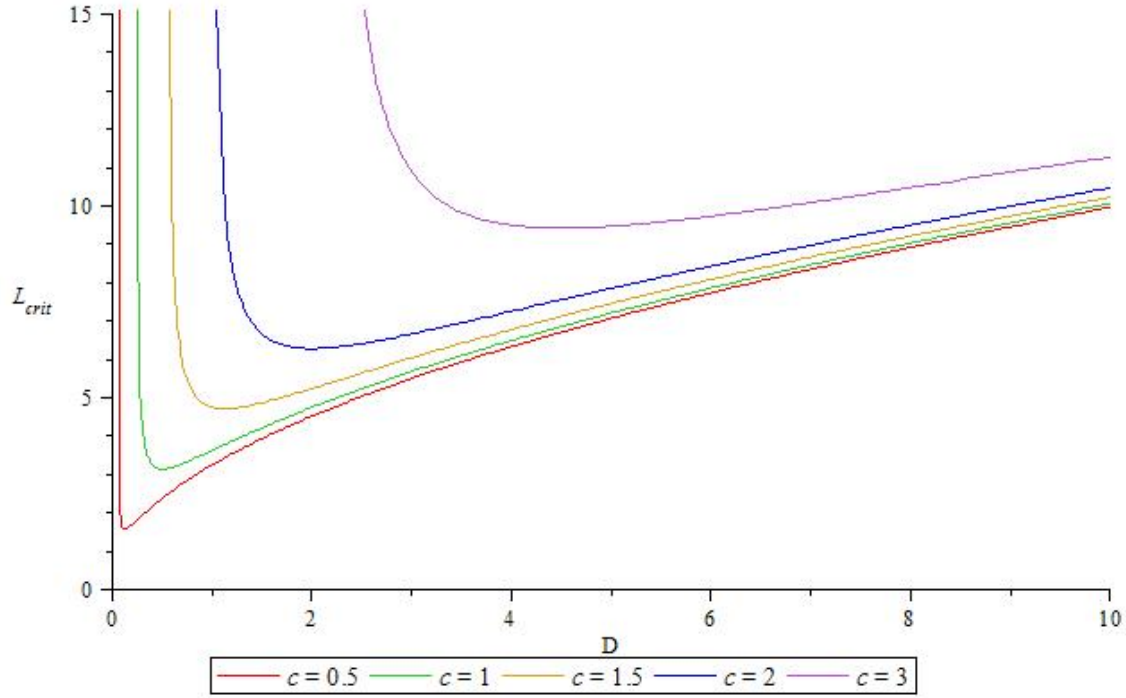


FIGURE 2 – Tracé de L_{crit} défini à l'équation (34) pour $r = 1$ en fonction de D pour différentes valeurs de c

Nous pouvons alors faire tendre \tilde{r} vers $+\infty$, ce qui correspond à un environnement très hostile, nous obtenons alors une expression beaucoup plus simple pour L_{crit} :

$$L_{crit} = \frac{\pi \sqrt{\frac{D}{r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\right)^2}} \quad (34)$$

Si l'on étudie ceci comme une fonction de D (sans oublier que c_0 issu de l'équation (31) dépend de D), on remarque que pour $\frac{1}{2} < \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 < 1$, c'est à dire pour $\frac{c^2}{4r} < D < \frac{c^2}{2r}$, cette fonction est décroissante ce qui signifie que l'espèce peut survivre dans une bande moins large si l'espèce à un plus grand coefficient de diffusion.

Nous pouvons aussi écrire la condition $L > L_{crit}$ sous la forme

$$\frac{rL^2}{2\pi} - \sqrt{\frac{r^2L^4}{4\pi^4} - \frac{c^2L^2}{4\pi^2}} < D < \frac{rL^2}{2\pi} + \sqrt{\frac{r^2L^4}{4\pi^4} - \frac{c^2L^2}{4\pi^2}} \quad (35)$$

La constante de diffusion ne doit donc être ni trop grande ni trop petite pour pouvoir avoir la survie de l'espèce à c et L fixés, nous avons une valeur minimale et une valeur maximale de D .

2.4 Linéarisation autour de zéro

Définition 2.3. *Valeur propre dominante*

Soit T une application linéaire. Une valeur propre λ est dite dominante (ou principale) si

$$\forall \lambda' \in Sp(T) \setminus \{\lambda\}, |\lambda'| < |\lambda|$$

La définition qui nous concerne le plus dans le cas d'opérateur appliqué à des fonctions régulières sur un ouvert Ω et dont nous nous intéresserons plus particulièrement à la partie 3.2 :

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda | \exists \varphi \in \Omega, (T + \lambda)\varphi \leq 0\}$$

Nous allons étudier dans cette partie la stabilité de l'état d'extinction. Nous allons voir que la valeur propre principale caractérise l'existence et la non-existence de solutions non triviales et détermine la dynamique de ce modèle. La valeur propre dominante détermine la vitesse à laquelle la population décline vers son extinction.

La linéarisation autour de l'état $u := 0$ s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(0, x - ct)u \quad (36)$$

Nous allons pour étudier cette équation chercher des solutions de la forme.

$$u(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x - ct) \quad (37)$$

En remplaçant dans l'équation, on remarque que φ doit être un vecteur propre associé à la valeur propre λ pour l'opérateur T défini par

$$(T\varphi)(\xi) = D\varphi''(\xi) + c\varphi'(\xi) + g(0, \xi)\varphi(\xi) \quad (38)$$

Nous allons prendre les simplifications définies aux équations (8) ce qui nous autorise à prendre $D = 1$ dans (38) et nous avons :

$$g(0, \xi) = \begin{cases} -1 & \text{pour } \xi < 0 \text{ et } \xi > L \\ r & \text{pour } 0 \leq \xi \leq L \end{cases} \quad (39)$$

Nous avons donc que la solution bornée de

$$T\varphi = \lambda\varphi \quad (40)$$

Où l'on peut normaliser par

$$\varphi(0) = 1 \quad (41)$$

Et donnée pour $\xi < 0$ par

$$\varphi(\xi) = e^{(-\frac{c}{2} + \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + \lambda + 1})\xi} \quad (42)$$

Si $0 \leq \xi \leq L$, la solution est représentée par

$$\varphi(\xi) = ke^{(-\frac{c}{2} + \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + \lambda - r})\xi} + \bar{k}e^{(-\frac{c}{2} - \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + \lambda - r})\xi} \quad (43)$$

Où k est un nombre complexe que nous allons déterminer. Cette manière d'écrire la solution nous permet de balayer toutes les solutions réelles.

Si $\xi > L$, nous avons une solution de la forme

$$\varphi(\xi) = Ce^{(-\frac{c}{2} - \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + \lambda + 1})\xi} \quad (44)$$

Où C est un réel.

Comme φ est totalement déterminée pour $\xi < 0$ et que φ est au moins de classe C^1 nous écrivons l'égalité de φ et de φ' définies pour $\xi < 0$ et pour $0 \leq \xi \leq L$ et nous obtenons grâce à φ la partie réelle de k et grâce φ' la partie imaginaire de k .

On obtient la formule

$$k = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + \lambda + 1}}{2\sqrt{r - \lambda - (\frac{c}{2})^2}} \quad (45)$$

On obtient C grâce à la continuité en $\xi = L$. Puis avec le même type de manipulations qui permettent d'obtenir (28) nous obtenons

$$\tan\left(\sqrt{r - \lambda - \left(\frac{c}{2}\right)^2} L\right) = \frac{2\sqrt{1 + \lambda + \left(\frac{c}{2}\right)^2} \sqrt{r - \lambda - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{r - 2\lambda - \frac{c^2}{2} - 1} \quad (46)$$

On remarque que λ et c apparaissent seulement ensemble sous la forme $\lambda + \left(\frac{c}{2}\right)^2$.

Ce qui est bien avec cela, c'est qu'à paramètres fixés, si on connaît un λ et qu'on fait varier c , alors on connaît le nouveau λ par translation. On a en outre la formule

$$\lambda(c) = \lambda(0) - \frac{c^2}{4D} \quad (47)$$

La valeur propre dominante est donc une fonction décroissant quadratiquement en tant que fonction de c .

3 Analyse d'une classe plus générale d'équations

Nous allons toujours considérer l'équation (1). Sans perte de généralité, quitte à modifier la variable nous allons supposer que $D = 1$.

Les fonctions f et g qui sont toujours reliées par la relation (2) n'auront plus une expression explicite mais nous allons supposer qu'elles satisfont les conditions suivantes :

- a *Dépendance négative de la densité* : $u \mapsto g(u, x)$ est décroissante $\forall x \in \mathbb{R}$ et strictement décroissante pour $x \in I_0$ où I_0 est un intervalle ouvert non vide.
- b *Droit à des discontinuités* : Il existe un ensemble fini de points $F = \{a_1, \dots, a_p\}$ tel que g soit continue sur $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R} \setminus F)$ tels que les 2 limites $\lim_{x \uparrow a_i} g(u, x)$ et $\lim_{x \downarrow a_i} g(u, x)$ existent.
- c Il existe $\delta > 0$ tel que $u \mapsto g(u, x)$ soit C^1 sur $[0, \delta] \times (\mathbb{R} \setminus F)$ et les 2 limites $\lim_{x \uparrow a_i} g(u, x)$ et $\lim_{x \downarrow a_i} g(u, x)$ existent, uniformément pour $u \in [0, \delta]$
- d $g(0, x) \rightarrow -1$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. Nous avons pris les mêmes limites en $\pm\infty$ pour simplifier les calculs. Mais les preuves ne changent pas si on change ces limites. Remarquons qu'un changement linéaire en t permet de changer les valeurs de ces limites.
- e *Saturation* : Il existe $M > 0$ tel que $g(u, x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ dès que $u \geq M$. Cela garantit que la population décline si l'on excède une certaine densité M . Cela permet que la population reste finie ce qui est plutôt réaliste.

Nous allons, pour des facilités d'écriture dans toute cette section remplacer ξ par x

3.1 Comportement asymptotique des ondes progressives

Reprenons l'équation (6) en dépendance selon x (anciennement appelé ξ) sachant que nous avons pris $D = 1$:

$$w_{xx} + cw_x + wg(w, x) = 0 \quad (48)$$

Nous allons étudier le comportement de w au voisinage de $\pm\infty$.

En utilisant les quantités μ_+ et μ_- définies à l'égalité (11), il n'est pas absurde de se dire qu'il existe des constantes positives a, b telles qu'au au voisinage de $-\infty$ on ait $w(x) \sim be^{\mu_+ x}$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on ait $w(x) \sim be^{\mu_- x}$.

Proposition 3.1. *Soit w une solution bornée positive de (48). Alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x) = 0$.*

Nous avons même mieux :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)e^{(-\mu_- - \varepsilon)x} = 0 \quad (49)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x)e^{(-\mu_+ + \varepsilon)x} = 0 \quad (50)$$

Démonstration. Nous allons commencer par prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0$.

D'après la condition (d) il existe $R > 0$ tel que $\forall x \geq R, g(0, x) \leq -\frac{1}{2}$

La condition (a) de décroissance selon u implique alors que pour $x > R$,

$$w_{xx} + cw_x - \frac{1}{2}w \geq 0$$

Soit $a > 0$, considérons Ψ^a l'unique solution de

$$\begin{cases} \Psi^a_{xx} + c\Psi^a_x - \frac{1}{2}\Psi^a = 0, R < x < R + a \\ \Psi^a(R) = M = \Psi^a(R + a) \end{cases}$$

Avec $M = \sup w$

Le principe du maximum implique que $\forall x \in]R, R + a[, w \leq \Psi^a$

Calculons alors explicitement Ψ^a , on a

$$\Psi^a(x) = M \left(\frac{1 - e^{\rho_- a}}{e^{\rho_+ a} - e^{\rho_- a}} \right) e^{\rho_+(x-R)} + M \left(\frac{e^{\rho_+ a} - 1}{e^{\rho_+ a} - e^{\rho_- a}} \right) e^{\rho_-(x-R)}$$

où $\rho_- < 0 < \rho_+$ sont les 2 racines du polynôme $r^2 + cr - \frac{1}{2}$.

On a $\lim_{a \rightarrow +\infty} \Psi^a(x) = M e^{\rho_-(x-R)}$

$w \leq \Psi^a$ étant vraie pour tout $a > 0$, on obtient

$$\forall x \geq R, w(x) \leq M e^{\rho_-(x-R)} \quad (51)$$

En appliquant exactement le même raisonnement avec un $R' < 0$ tel que

$$\forall x \leq R', g(0, x) \leq -\frac{1}{2}$$

On obtient alors

$$\forall x \leq R', w(x) \leq M e^{\rho_+(x-R')} \quad (52)$$

On conclut alors pour la première partie de la preuve :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x) = 0 \quad (53)$$

Maintenant, obtenons le raffinement voulu. $\forall 0 < \nu < 1, \exists R = R(\nu)$ tel que $g(0, x) \leq -\nu$ dès que $x \geq R$.

Du fait que $\rho_{\pm} \Rightarrow \mu_{\pm}$ quand $\nu \uparrow 1$, on en déduit que $\forall \delta > 0, \exists R = R(\delta) > 0$ tel que

$$\begin{aligned} w(x) &\leq Me^{(\mu_- + \delta)x} \text{ pour } x \geq R \\ w(x) &\leq Me^{(\mu_+ - \delta)x} \text{ pour } x \leq -R \end{aligned} \quad (54)$$

Soit $\varepsilon > 0$ choisissons $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ dans l'équation (54) et nous obtenons

$$\begin{aligned} w(x)e^{(-\mu_- - \varepsilon)x} &\leq Me^{(-\frac{\varepsilon}{2})x} \text{ pour } x \geq R \\ w(x)e^{(-\mu_+ + \varepsilon)x} &\leq Me^{(\frac{\varepsilon}{2})x} \text{ pour } x \leq -R \end{aligned} \quad (55)$$

Ce qui conclut la preuve en faisant tendre $x \rightarrow \pm\infty$ □

Cherchons maintenant une borne dans l'autre sens :

Proposition 3.2.

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)e^{(-\mu_- + \varepsilon)x} = +\infty \quad (56)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} w(x)e^{(-\mu_+ - \varepsilon)x} = +\infty \quad (57)$$

Démonstration. La preuve est sensiblement la même :

Soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positive, de classe C^2 par morceaux et telle que pour tout x sur un intervalle de la forme $]R, \infty[$, sauf en un nombre fini de points, on ait l'inégalité :

$$v_{xx} + v_x - v\nu \leq 0$$

où ν est choisi tel que $\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \nu > 0$. Alors il existe une constante $K > 0$ telle que

$$v(x) \geq Ke^{(\frac{-c}{2} - \sqrt{\frac{c}{2} + \nu})x} \text{ pour } w \geq R$$

De même, pour un intervalle de la forme $] -\infty, R[$ il existe une constante $K > 0$ telle que

$$v(x) \geq Ke^{(\frac{-c}{2} + \sqrt{\frac{c}{2} + \nu})x} \text{ pour } w \leq -R$$

On peut alors conclure facilement. □

Nous allons maintenant établir une borne pour w_x la dérivée de w .

Proposition 3.3. *Soit w une solution bornée positive de (48). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$|w_x(x)| \leq e^{(\mu_- + \varepsilon)x} \text{ pour } w \geq R \quad (58)$$

$$|w_x(x)| \leq e^{(\mu_+ - \varepsilon)x} \text{ pour } w \leq -R \quad (59)$$

Démonstration. Nous allons seulement faire la preuve dans le cas où $x > 0$ le cas négatif nécessitant la même démonstration.

De l'équation (48), en intégrant de y à z , nous obtenons

$$w_x(z) - w_x(y) + cw(z) - cw(y) = - \int_y^z w(x)g(w(x), x)dx$$

Soit z fixé, au vu des majorations que nous avons obtenu précédemment, nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} cw(z) = 0$

Nous obtenons aussi que $\int_{\infty}^z w(y)g(w(y), y)$ existe ce qui provient notamment du fait que $g(w(x), x) \sim g(0, x) \sim -1$. Nous avons alors cette égalité

$$w_x(z) + cw(z) + \int_{\infty}^z w(y)g(w(y), y)dy = 0 \tag{60}$$

On conclut alors à l'aide de la majoration obtenue à la proposition 3.1 et à l'aide des propriétés connues sur g .

On montre assez facilement que $\int_{\infty}^z w(y)g(w(y), y)dy \sim \int_z^{\infty} w(x)dx$ lorsque $z \rightarrow +\infty$. \square

3.2 Étude de la valeur propre dominante

Nous allons définir le plus proprement possible du problème linéarisé autour de $w := 0$. Comme nous considérons des solutions définies sur \mathbb{R} certaines précautions sont nécessaires.

Posons L_R l'opérateur défini par

$$L_r\varphi = \varphi_{xx} + c\varphi_x + g(0, \cdot)\varphi \tag{61}$$

Soit λ_R la valeur propre dominante associée aux conditions

$$\varphi(-R) = \varphi(R) = 0 \tag{62}$$

Le vecteur propre φ^R associé est strictement positif sur $] - R, R[$

De la définition 2.3, il est assez clair que si $\Omega' \subset \Omega$ alors $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega')$.

En prenant, dans ce cas $\Omega' =] - R', R'[$ et $\Omega =] - R, R[$ avec $R' < R$, on obtient que $R \mapsto \lambda_R$ est une fonction monotone.

Il est donc légitime de définir

Définition 3.4.

$$\lambda_{\infty} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \lambda_R$$

Nous allons chercher les fonctions φ^∞ positives telles que

$$\varphi_{xx}^\infty + c\varphi_x^\infty + g(0, \cdot)\varphi^\infty = \lambda_\infty\varphi^\infty \quad (63)$$

Proposition 3.5. *Soit φ^∞ une solution positive satisfaisant (63) sur $\mathbb{R}\setminus F$ avec $\lambda_\infty < 0$. Pour tout δ tel que $\max\{0, -1 - \lambda_\infty\} < \delta$ il existe $R(\delta)$ et $K(\delta)$ tels que*

$$\varphi(x) \geq Ke^{(-\frac{c}{2} - \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + 1 + \delta + \lambda_\infty})x} \text{ pour } x \geq R \quad (64)$$

$$\varphi(x) \geq Ke^{(-\frac{c}{2} + \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + 1 + \delta + \lambda_\infty})x} \text{ pour } x \leq -R \quad (65)$$

Démonstration. Une fois de plus, nous nous intéresserons seulement aux $x > 0$ pour montrer seulement la première inégalité.

Pour tout $\delta > 0$ si x est assez grand, φ^∞ vérifie l'inégalité

$$\varphi_{xx} + c\varphi_x - (1 + \delta + \lambda_\infty)\varphi \leq 0$$

La démonstration de (3.5) est alors la même qu'à la proposition 3.2 en utilisant le fait que le réel $(\frac{c}{2})^2 + 1 + \delta + \lambda_\infty$ sous la racine est > 0 . \square

Proposition 3.6. *Soit φ^∞ une solution positive satisfaisant (63) sur $\mathbb{R}\setminus F$ avec $\lambda_\infty = 0$. Alors φ^∞ a les propriétés de w obtenues aux propositions 3.1 et 3.3.*

Démonstration. Les preuves ressemblent aux preuves des propositions 3.1 et 3.3. On sait seulement que φ^∞ est positive, pas si elle est bornée. L'idée est alors de remplacer les fonction Ψ^a de la proposition 3.1 par des fonction z^R qui satisfont

$$\begin{cases} z_{xx} + cz_x - \nu z, & p < x < R \\ z(p) = \alpha & z(R) = 0 \end{cases}$$

\square

Où p est tel que $g(0, x) \leq \nu$ pour $x > p$ et $\alpha = \sup_R \varphi^R(p)$. On utilise ensuite le fait que $\varphi^R(x) \leq z^R(x)$ pour $x \in]p, R[$ et on obtient alors en faisant tendre $R \rightarrow +\infty$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} z^R(x) = \alpha e^{\rho - (x-p)}$$

Théorème 3.7. *L'équation (48) a une solution positive bornée si et seulement si $\lambda_\infty > 0$*

Démonstration. Supposons $\lambda_\infty > 0$. Nous allons prouver qu'une telle solution existe en construisant une sous-solution et une sur-solution.

Définissons :

$$v(x) = \begin{cases} \varepsilon\varphi^R(x) & \text{pour } |x| < R \\ 0 & \text{pour } |x| \geq R \end{cases}$$

On a alors pour $-R < x < R$

$$v_{xx}(x) + cv_x(x) + g(v(x), x) = [g((v, x), x) - g(0, x)]v(x) + \lambda_R v(x)$$

Si R est assez grand et $\varepsilon > 0$ assez petit, v est une sous-solution. Comme $\lambda_R \rightarrow \lambda_\infty > 0$ lorsque $R \rightarrow \infty$, on sait que $\lambda_R > 0$ si R est assez grand. De plus, $g(v(x), x) - g(0, x) \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \downarrow 0$. De plus $\varphi^R(\pm R) = 0$, on étend $\varepsilon\varphi^R$ par 0 en dehors de $] -R, R[$ ce qui nous donne une sous solution v . L'hypothèse e . nous garantit que la fonction constante prenant la valeur M est une sur-solution.

On conclut qu'une telle solution existe.

Supposons maintenant que $\lambda_\infty \leq 0$. Supposons alors qu'il existe une solution w bornée à l'équation (48) et trouvons une contradiction.

Nous allons d'abord faire le cas $\lambda_\infty < 0$. Soit $\varphi^\infty \geq 0$ et satisfaisant (63). On a alors

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\varphi^\infty(x)}{w(x)} = \infty$$

En effet, en utilisant la proposition 3.5 en choisissant un δ avec une condition supplémentaire : $\max\{0, -1 - \lambda_\infty\} < \delta < -\lambda_\infty$. On a alors $\sqrt{(\frac{c}{2})^2 + 1 + \delta + \lambda_\infty} < \sqrt{(\frac{c}{2})^2 + 1}$ donc en choisissant $\varepsilon > 0$ assez petit dans la proposition 3.1, le quotient $\frac{\varphi^\infty(x)}{w(x)} \geq e^{\alpha x}$ avec $\alpha > 0$ pour $x \rightarrow +\infty$ et $\frac{\varphi^\infty(x)}{w(x)} \geq e^{\beta x}$ avec $\beta < 0$ lorsque $x \rightarrow -\infty$.

Comme $\varphi^\infty > 0$ et $w > 0$, d'après ce qui vient d'être établi, l'ensemble, $A = \{\alpha : \alpha\varphi^\infty \geq w \text{ sur } \mathbb{R}\}$ est non vide et minoré par 0.

Soit $\alpha_0 = \inf A$. Alors $\alpha_0 > 0$ et $\alpha_0 \in A$. En effet, puisque $\frac{\varphi^\infty(x)}{w(x)} \rightarrow \infty$, il existe $R > 0$ tel que $\alpha\varphi^\infty \geq w$ pour $|x| \geq R$ et $\frac{1}{2}\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Si $\min\{\alpha_0\varphi^\infty(x) - w(x), |x| \leq R\}$ est positif on arrive à une contradiction avec la définition de α_0 . Donc ce minimum doit être 0. Donc α_0 est bien un minimum. Comme

$$v_{xx} + cv_x + g(0, \cdot)v = (g(w(\cdot), \cdot) - g(0, \cdot))w + \lambda_\infty\alpha_0\varphi^\infty$$

Le membre de droite est négatif, le principe maximum montrer que cela est possible si et seulement si $v = 0$ ce qui est impossible. Donc $\lambda_\infty < 0$ exclut l'existence de w .

Supposons maintenant $\lambda_\infty = 0$. Écrivons l'équation pour φ^∞ sous la forme.

$$(e^{cx}\varphi_x^\infty)_x + g(0, x)e^{cx}\varphi^\infty = 0$$

La forme analogue de l'équation pour w s'écrit

$$(e^{cx}w_x)_x + g(w(x), x)e^{cx}w = 0$$

Si on multiplie cette équation φ^∞ et celle d'avant par w et qu'on intègre par parties sur $[-A, A]$ et qu'on soustrait, on obtient

$$[e^{-xc}\varphi_x^\infty w + e^{cx}w_x\varphi^\infty]_{x=-A}^{x=A} = \int_{-A}^A (g(0, x) - g(w(x), x))e^{cx}\varphi^\infty(x)w(x)dx$$

Maintenant, $g(0, x) - g(w(x), x) \geq 0$ pour tout x mais avec inégalité stricte pour $x \in I_0$. Donc le membre de droite est strictement positive dès que $] - A, A[\cap I_0 \neq \emptyset$. Les majorations des propositions 3.1, 3.3 et 3.6 nous donnent que le membre de gauche tend vers 0 lorsque $A \rightarrow \infty$. Mais le membre de droite est positif, croissant par rapport à A donc ne tend vers 0 ce qui nous donne une contradiction et conclut notre preuve. \square

3.3 Unicité des ondes progressives

Théorème 3.8. *L'équation (48) a au plus une unique solution bornée*

Démonstration. La difficulté principale réside dans le fait que notre domaine d'étude est non borné.

Supposons que nous avons 2 solutions distinctes que nous noterons $w^i, i = 1, 2$. Écrivons l'équation (48) sous la forme

$$(e^{cx}w_x^i)_x + g(w^i(x), x)e^{cx}w^i = 0$$

Par le même genre de manipulation qu'à la fin de la preuve précédente pour tout $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$, nous obtenons

$$[-e^{cx}w_x^1w^2 + e^{cx}w^1w_x^2]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} e^{cx}(g(w^1(x), x) - g(w^2(x), x))w^1(x)w^2(x)dx$$

Supposons, quitte à échanger w^1 et w^2 que $\{x, w^2(x) > w^1(x)\}$ est non vide et soit $]a, b[$ une composante connexe inclus dans cet ensemble avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$. On a alors, par continuité de w^1 et w^2 , $w^1(a) = w^2(a)$ et $w^1(b) = w^2(b)$. Supposons d'abord que a et b sont finis et on prend $a = \alpha$ et $b = \beta$ de l'égalité précédente.

Comme $x \mapsto g(u, x)$ est décroissante, le côté droit de l'égalité précédente est positif. Il est même strictement positif car si $g(w^1(x), x) = g(w^2(x), x)$ pour presque tout $x \in]a, b[$ alors comme les w^i satisfont la même équation linéaire avec les mêmes conditions aux limites alors $w^1 = w^2$ sur $]a, b[$ ce qui n'est pas possible.

Si on s'intéresse au côté gauche de l'égalité, on a forcément, $w_x^2(a) > w_x^1(a)$ et $w_x^2(b) < w_x^1(b)$ donc le membre de gauche est strictement négatif et on aboutit alors à une contradiction.

Si $\alpha = -\infty$ ou $\beta = +\infty$ alors à l'aide de la proposition 3.1, on en déduit que l'intégrale converge et que le terme de gauche devient nul lorsque $\alpha \rightarrow -\infty$ ou $\beta \rightarrow +\infty$. On a donc le

terme de gauche négatif et le terme de droite strictement positif ce qui nous permet d'aboutir à une contradiction. \square

Corollaire 3.9. *L'équation (48) a exactement une solution positive bornée si $\lambda_\infty > 0$ et aucune solution positive bornée si $\lambda_\infty \leq 0$*

3.4 Comportement asymptotique en temps

Nous revenons pour cette partie à l'équation (1) en rajoutant la condition initiale

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (66)$$

Où u_0 est une solution bornée positive définie sur \mathbb{R} . Nos hypothèses sur g garantissent l'unicité d'une telle solution $u = u(t, x)$

Théorème 3.10. *Soit u une solution au problème de Cauchy (1)-(66)*

1. *Si $\lambda_\infty \leq 0$ alors $u(t, x) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie que toute population est vouée à s'éteindre quelle que soit son état initial.*
2. *Si $\lambda_\infty > 0$ et u_0 n'est pas triviale alors $u(t, x) - w(x - ct) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$ uniformément selon $x \in \mathbb{R}$. Ici, w est la solution unique bornée de (48). Donc, toute population est vouée à persister en voyageant selon le changement climatique.*

Démonstration. Posons, $v(t, x) = u(t, x + ct)$. (1) peut alors s'écrire

$$v_t = v_{xx} + cv_x + f(v, x) \quad (67)$$

Soit $M' > \max\{M, \sup_x u_0(x)\}$ et soit $z = z(t, x)$ la solution de

$$z_t = z_{xx} + cz_x + f(z, x), \quad z(0, x) = M' \quad (68)$$

z est alors une sur-solution. Nous allons admettre que $z_t < 0$. Comme z est minorée par 0, $z(t, \cdot)$ doit converger pour $t \rightarrow \infty$ vers une solution positive de (48). Si $\lambda_\infty \leq 0$ la seule solution possible est la fonction nulle. Donc, pour tout x , $z(t, x)$ converge vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.

Comme $0 \leq u(t, x) = v(t, x - ct) \leq z(t, x - ct)$, on conclut que si $\lambda_\infty \leq 0$, $u(t, x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, nous montrerons à la fin de cette partie que cela converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

Intéressons nous maintenant au point 2. Si u_0 n'est pas nulle, $u(\delta, x)$ est strictement positive pour $\delta > 0$ et on a aussi $v(\delta, x) > 0$. Donc pour R est grand et ε assez petit, on a $v(x, \delta) \geq \varepsilon \varphi^R(x)$ pour $-R \leq x \leq R$. Supposons maintenant que $\lambda_\infty > 0$, en s'inspirant de la preuve du théorème 3.8 pour R assez grand, on obtient une sous-solution en étendant $\varepsilon \varphi^R(x)$ par zéro en dehors de l'intervalle $[-R, R]$. Comme $z(t, \cdot)$ ne peut pas converger vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ quand $\lambda_\infty > 0$ la limite est alors nécessairement l'unique solution positive w de (48). Donc la sous-solution converge vers w . v est encadré par 2 fonctions convergeant

vers w donc converge aussi vers w .

Montrons maintenant que la convergence est uniforme pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous nous concentrons sur la sur-solution z . Supposons que z ne converge pas uniformément vers w lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela signifie qu'il existe $\delta > 0$ et une suite $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui tend vers ∞ et une suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telles que

$$z(t_j, x_j) - w(x_j) \geq \delta$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$x_j \rightarrow x_\infty \text{ lorsque } j \rightarrow \infty$$

où $x_\infty \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Posons

$$z^j(t, x) = z(t, x + x_j)$$

z^j est une fonction décroissante de t . Comme z^j est uniformément bornée, on peut extraire une sous-suite qu'on notera aussi z^j qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction $z^\infty(t, x)$. z^∞ est une fonction décroissante de t et $z^\infty(t_j, 0) - w(x_\infty) \geq \delta$

Si x_∞ est fini alors z^∞ est une solution de

$$z_t = z_{xx} + cz_x + f(z, x + x_\infty)$$

et donc sa limite lorsque $t \rightarrow \infty$ est une solution non nulle de

$$\tilde{w}_{xx} + c\tilde{w}_x + \tilde{w}g(\tilde{w}, x + x_\infty) = 0$$

Nécessairement, $\tilde{w}(x) = w(x + x_\infty)$ ce qui nous donne en prenant $x = 0$ en en faisant tendre $j \rightarrow \infty$ dans $z^\infty(t_j, 0) - w(x_\infty) \geq \delta$ nous obtenons $\tilde{w}(0) - w(x_\infty) \geq \delta$ ce qui aboutit à une contradiction et donc x_∞ ne peut pas être fini.

Supposons maintenant que $x_\infty = \infty$. Puisque $g(z, x) \leq g(0, x)$ et que $g(0, x) \rightarrow -1$ lorsque $x \rightarrow \infty$ on en déduit que z^∞ vérifie l'inégalité $z_t \leq z_{xx} + cz_x - z$

Et en prenant la limite quand $t \rightarrow \infty$, on a

$$\tilde{w}_{xx} + c\tilde{w}_x - \tilde{w} \geq 0$$

Mais une fonction satisfaisant une telle inégalité ne peut avoir de maximum positif et donc aucune solution bornée positive ne peut exister. Comme nous avons $\tilde{w}(0) \geq \delta$, on conclut que $x_\infty = \infty$ n'est pas possible.

De même, $x_\infty = -\infty$ n'est pas possible par la même démonstration.

On en déduit alors que la sur-solution converge uniformément. La démonstration pour la sous-solution suit le même plan. Le cas λ_∞ utilise les mêmes arguments pour prouver que $z(t, \cdot)$ converge uniformément vers 0. \square

4 D'autres modèles possibles

Nous allons succinctement présenter dans cette partie deux modélisations un peu plus complète qui essaient de s'accorder mieux à la réalité.

4.1 Effet Allee faible

La présence d'un effet Allee dans une population se traduit par l'existence d'une densité dépendance inverse pour des faibles effectifs. C'est-à-dire l'existence d'une corrélation positive entre la densité d'une population et son taux de croissance lorsque la population comporte relativement peu d'individus. Cela résulte en une diminution du taux de croissance de la population quand sa taille diminue, et inversement une augmentation de ce taux quand sa taille augmente. Ce principe s'oppose à l'idée qu'il existe toujours une corrélation négative entre la densité d'une population et son taux de croissance, liée essentiellement aux phénomènes de compétition.

Voici une modélisation succincte :

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx} u = f(x - ct, u) & t \in]0, +\infty[, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (69)$$

Avec $c \leq 0$ et u_0 bornée, positive à support compact et

$$f(z, s) = \begin{cases} -s & \text{si } z < 0 \\ g(s) & \text{si } z \geq 0 \end{cases} \quad (70)$$

Avec g telle que $g(0) = g(1) = 0, \forall s \in]0, 1[, g(s) > 0, \forall s \notin [0, 1], g(s) < 0, g'(1) < 0 < g'(0)$

Ceci permet de modéliser le fait que lorsque qu'une densité de population est faible, il n'y a plus assez d'individus pour assurer sa survie et donc elle doit s'éteindre.

4.2 Compétition entre deux espèces

Dans cette modélisation, on s'intéresse au fait de savoir dans quelle mesure dans un environnement où deux espèces sont en compétition, le fait de déplacer le climat influence la répartition de ces deux espèces.

Nous considérons donc 2 espèces et noterons leur densité $u_i(x, t)$. Les équations étudiées pour ce type de modélisation sont alors :

Si $0 \leq x \leq L$

$$\begin{cases} u_{1t} = D_1 u_{1xx} + c u_{1x} (r_1 - \alpha_{11} u_1 - \alpha_{12} u_2) u_1 \\ u_{2t} = D_2 u_{2xx} + c u_{2x} (r_2 - \alpha_{21} u_1 - \alpha_{22} u_2) u_2 \end{cases} \quad (71)$$

et si $x < 0$ ou $x > L$

$$\begin{cases} u_{1t} = D_1 u_{1xx} + c u_{1x} - k_1 u_1 \\ u_{2t} = D_2 u_{2xx} + c u_{2x} - k_2 u_2 \end{cases} \quad (72)$$

1. Les D_i représentent le coefficient de diffusion
2. Les r_i représentent les taux intrinsèques de croissance de chaque espèce
3. Les α_{ij} représentent les coefficients de compétition inter-espèces
4. Conditions aux limites : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_i(x, t) = 0$
5. Les flux $D_i u_{i,xx}$ sont continus en $x = 0$ et $x = L$

5 Simulation numérique

On va tâcher dans cette dernière partie de faire une modélisation informatique de l'équation étudiée à la section 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u)$$

où

$$f(u) = ur \left(1 - \frac{u}{K} \right) \text{ pour } 0 \leq x - ct \leq L$$

Nous allons utiliser la méthode des différences finies

On discrétise le temps en un pas Δt définie par

$$0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$$

Et on a $\Delta t = \frac{T}{N}$

On discrétise l'espace en un pas Δx .

On pose u_j^n l'approximation de $u(x_j, t^n) = u(j\Delta x, n\Delta t)$

L'équation étudiée devient alors

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = f(u_j^n) \quad (\text{Schéma implicite}) \quad (73)$$

Ou

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - D \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = f(u_j^n) \quad (\text{Schéma explicite}) \quad (74)$$

Le schéma explicite fait intervenir w à l'instant n dans le terme de diffusion tandis que le schéma implicite fait intervenir w à l'instant $n + 1$ dans le terme de diffusion.

Le défaut du schéma explicite est qu'il peut devenir instable s'il ne respecte pas une condition de type CFL. On va donc s'intéresser au schéma implicite que l'on écrit en multipliant par Δt :

$$u_j^{n+1} - u_j^n - \frac{D}{(\Delta x)^2} \Delta t (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \Delta t u_j^n r \left(1 - \frac{u_j^n}{K}\right)$$

Ce qui se réécrit en laissant les termes en $n + 1$ à gauche et ceux en n à droite :

$$u_j^{n+1} - \frac{D}{(\Delta x)^2} \Delta t (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = \Delta t u_j^n r \left(1 - \frac{u_j^n}{K}\right) + u_j^n \quad (75)$$

On pose la matrice $A =$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors matriciellement

$$\left(I_d + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} DA\right) U^{n+1} = U^n + \Delta t F^n \quad (76)$$

où $F_j^n = u_j^n r \left(1 - \frac{u_j^n}{K}\right)$

On implémente un programme sur Python, ce qui permet de tracer pour quatre temps différents, et pour des valeurs de r , K et D arbitraires.

On a pris des conditions aux limites arbitraires. On voit bien la formation et le déplacement et d'un front d'ondes.

En diminuant par un rapport de 2 la valeur de r , c'est-à-dire en augmentant l'hostilité de l'environnement, on trace aux mêmes quatre temps.

On voit que le déplacement du front d'onde est beaucoup moins rapide.

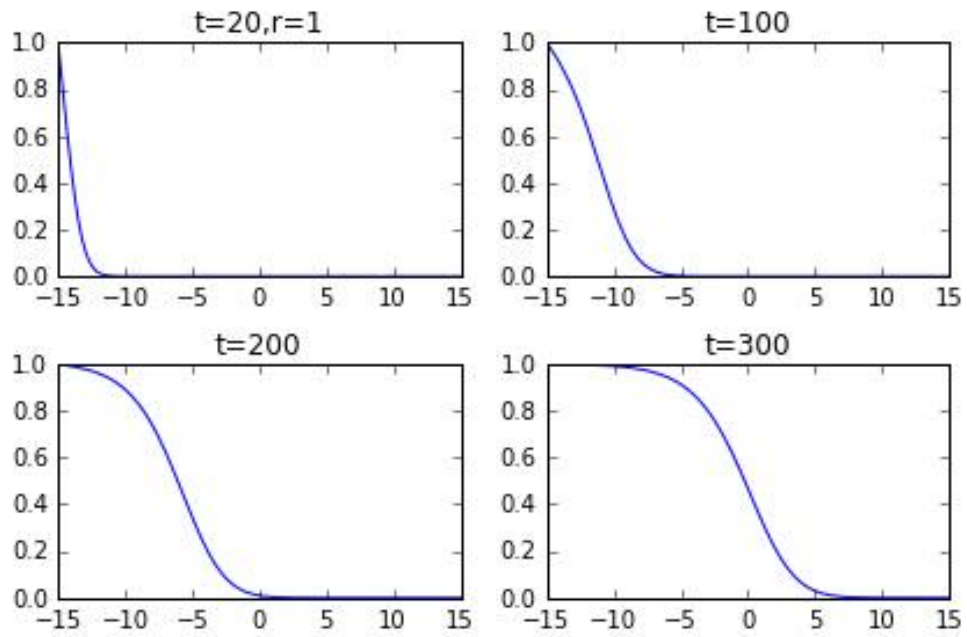


FIGURE 3 – Résolution numérique pour $r = 1$

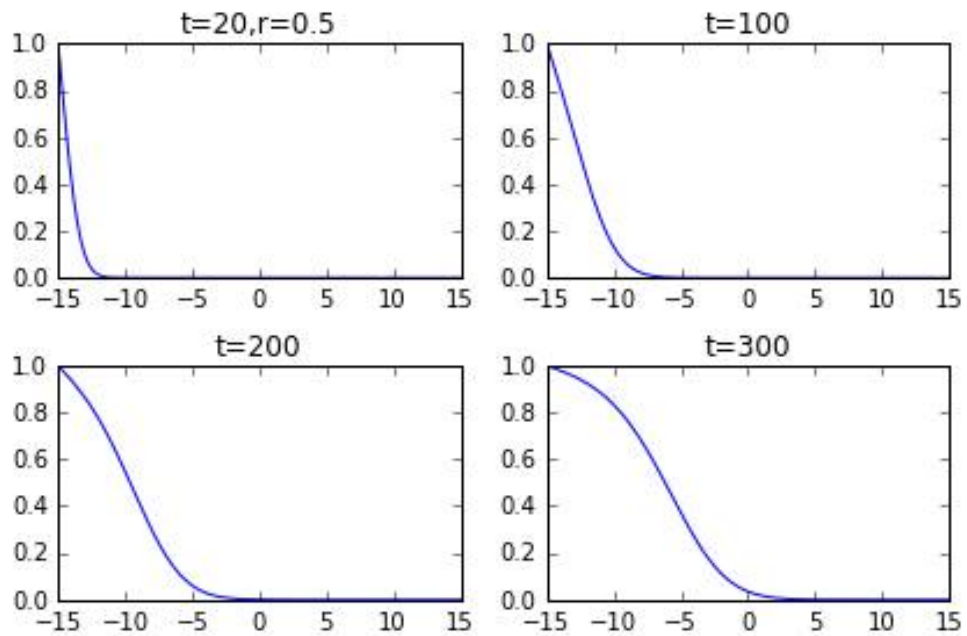


FIGURE 4 – Résolution numérique pour $r = 0.5$

A Code Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Wed Jun  8 14:41:03 2016

@author: Simon
"""

import numpy as np
from numpy.linalg import solve
import matplotlib.pyplot as plt

def schem_impl(T, a, M, N, r, K, D):
    dx = 2*a/(N+1) #pas d'espace
    dt = T/(M+1) #pas de temps
    A=2*np.diag(np.ones(N))-np.diag(np.ones(N-1),-1)\
    -np.diag(np.ones(N-1),1) #matrice de Dirichlet
    G=np.eye(N)+dt*D/(dx**2)*A #GU(j+1)=U(j) + dt*F(j)
    Y=np.zeros((M+2,N+2))
    tpt=np.linspace(0,T,M+2)
    xpt=np.linspace(-a,a,N+2)
    Y[0,:]=0 #conditions initiales
    Y[:,0]=1 #conditions aux limites
    F=np.zeros(N)
    for i in range(M+1): #boucle
        F=r*Y[i,1:-1]*(1-Y[i,1:-1]/K)
        F[0]=F[0]+1/(dx**2)
        Y[i+1,1:-1]=solve(G, Y[i,1:-1]+dt*F)
        #resolution du systeme lineaire
    return tpt, xpt, Y

tpt, xpt, Y = schem_impl(10,15,300,800,1,1,1)

fig, ((ax1, ax2), (ax3, ax4)) = plt.subplots(nrows=2, ncols=2)
ax1.plot(xpt,Y[20,:])
ax1.set_title("t=20,r=0.1")
ax2.plot(xpt,Y[100,:])
ax2.set_title("t=100")
ax3.plot(xpt,Y[200,:])
```

```
ax3.set_title("t=200")
ax4.plot(xpt, Y[300,:])
ax4.set_title("t=300")
fig.tight_layout()
plt.show()
```

Références

- [1] H Berestycki, O Diekmann, CJ Nagelkerke, and PA Zegeling. Can a species keep pace with a shifting climate? *Bulletin of mathematical biology*, 71(2) :399–429, 2009.
- [2] Henri Berestycki, Louis Nirenberg, and SR Srinivasa Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 47(1) :47–92, 1994.
- [3] J. Bouhours and T. Giletti. Extinction and spreading of a species under the joint influence of climate change and a weak Allee effect : a two-patch model. *ArXiv e-prints*, January 2016.
- [4] Scott R Loarie, Philip B Duffy, Healy Hamilton, Gregory P Asner, Christopher B Field, and David D Ackerly. The velocity of climate change. *Nature*, 462(7276) :1052–1055, 2009.
- [5] AB Potapov and MA Lewis. Climate and competition : the effect of moving range boundaries on habitat invasibility. *Bulletin of mathematical biology*, 66(5) :975–1008, 2004.