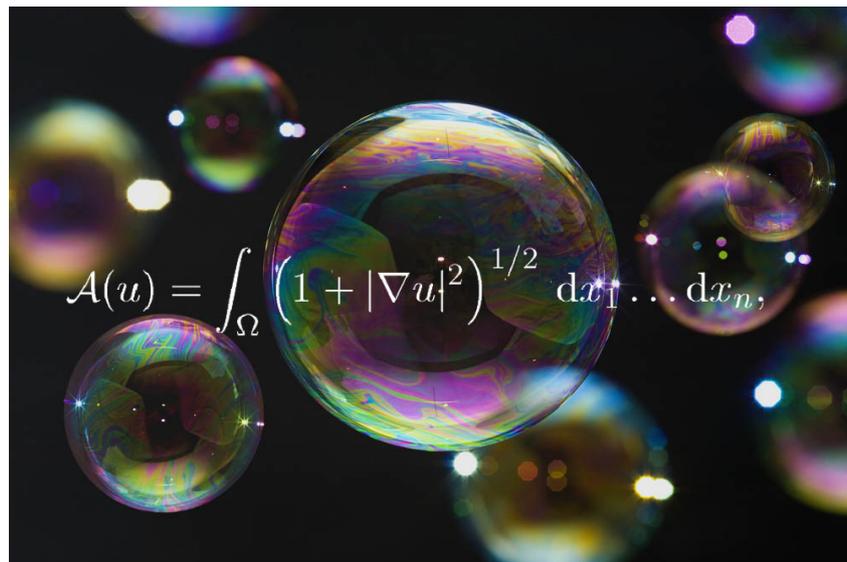


Quelques aspects des surfaces minimales

Alexis Michelat, Sheng Yuan Zhao



Encadré par Jeremy Daniel

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE 2013-2014

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Première définition	2
1.2	Surfaces à courbure moyenne nulle	2
1.3	Annonce du plan	4
2	Structure complexe, représentation de Weierstrass-Enneper	5
2.1	Surface de Riemann	5
2.2	Métrique riemannienne	5
2.3	Surfaces de Riemann versus surfaces riemanniennes, coordonnées isothermales	6
2.3.1	Quelques outils d'analyse	6
2.3.2	Démonstration du théorème du Gauss sur la paramétrisation conforme	7
2.4	Fonctions harmoniques, formes harmoniques	9
2.5	Représentation de Weierstrass-Enneper	10
2.6	Famille associée	14
3	Omissions de l'application de Gauss des surfaces minimales complètes	16
3.1	Surfaces minimales globales, surfaces complètes	16
3.2	Un premier théorème sur les omissions de l'application de Gauss	18
3.3	Théorème de Fujimoto	20
4	Intermède mesurable	23
4.1	Mesures de Hausdorff	23
4.2	Formule de l'aire	24
4.3	Ensembles rectifiables, espace tangent	27
4.4	Fonctions à variation bornée	28
5	Théorie des courants, problème de Plateau	30
5.1	Problème de Plateau	30
5.1.1	Énoncé du problème de Plateau	30
5.1.2	Résultats connus	30
5.2	Définitions	30
5.2.1	Courants	30
5.3	Opérations sur les courants	32
5.3.1	Opérations élémentaires	32
5.3.2	Homotopie des courants	33
5.4	Classes particulières de courants	33
5.5	Théorème de compacité	34
5.5.1	Courants de dimension 0	35
5.5.2	Preuve du critère mesurable	35
5.5.3	Inégalités maximales	38
5.5.4	Fin de la preuve	39
5.5.5	Existence pour le problème de Plateau	39
5.6	Perspectives	41

Chapitre 1

Introduction

1.1 Première définition

Les premiers résultats obtenus sur les surfaces minimales datent des années 1760 et ont été réalisés par Lagrange. Le problème est de trouver quelles sont les surfaces d'aire minimale ayant un bord prescrit.

En termes contemporains, si on se donne une surface M (sous-variété de codimension 1) dans \mathbb{R}^3 , c'est localement le graphe d'une fonction lisse $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage V de x tel que

$$M \cap V = \{(x, f(x)), x \in U\}.$$

On ajoute des conditions sur le bord de U , supposé à présent borné, pour obtenir des surfaces d'aire finie, de la forme $f|_{\partial U} = f_0$. On a l'équation

$$\text{Vol}(M \cap V) = \int_U \sqrt{1 + |Df(x)|^2} dx.$$

On montre que f donne une surface d'aire minimale si et seulement si :

$$\text{div} \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} = 0.$$

Ce qui s'écrit également

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_{xy}f_x f_y + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Nous allons à présent donner une interprétation plus géométrique de cette équation.

1.2 Surfaces à courbure moyenne nulle

Définition 1.2.1. Soit M une surface orientée de \mathbb{R}^3 . On définit une application $\nu : M \rightarrow S^2$, par

$$\nu(x) = \frac{h_u \wedge h_v}{|h_u \wedge h_v|}$$

où $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation positive de M au voisinage de $x = h(u, v)$.

Cette définition ne dépend pas de la paramétrisation, car l'espace tangent s'identifie aux vecteurs orthogonaux à un vecteur normal, et le choix d'un signe (qui correspond à un choix d'orientation locale) pour ce vecteur donne un choix unique si l'on impose qu'il soit unitaire.

Remarque 1.2.2. Comme $\nu(x)$ est normale à $T_x M$, pour le produit scalaire euclidien, et que $T_{\nu(x)} S^2 = \{\nu(x)\}^\perp$, ces deux espaces tangents vus comme espaces vectoriels sont égaux ce qui permet de voir $d\nu(x)$ comme une application $T_x M \rightarrow T_x M$.

Avant de poursuivre mentionnons un point technique.

Définition 1.2.3. Sous les hypothèses de la définition 1.2.1, si $M \cap V = h(U)$ est l'image de h , l'aire de $M \cap V$ est donnée par :

$$\text{Vol}(M \cap V) = \int_U |h_u \wedge h_v| du dv.$$

On peut montrer que la forme volume a pour expression

$$\sqrt{EG - F^2} dudv.$$

où

$$E = \left| \frac{\partial h}{\partial u} \right|^2 \quad F = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial h}{\partial v} \quad G = \left| \frac{\partial h}{\partial v} \right|^2.$$

On dit que E, F et G sont les coefficients de la première forme fondamentale.

Lemme 1.2.4. Pour tout $x \in M$, l'application $d\nu(x) : T_x M \rightarrow T_x M$ est une forme bilinéaire symétrique pour le produit scalaire euclidien.

Démonstration. On a par définition que $\langle \nu(h(u, v)), h_u(u, v) \rangle = 0$, donc en dérivant par rapport à v , $\langle d\nu(x)(h_v(u, v)), h_u(u, v) \rangle = -\langle \nu(x), h_{uv}(u, v) \rangle$. En échangeant les rôles de u et v , la relation étant symétrique, on obtient

$$\langle d\nu(x)(h_u(u, v)), h_v(u, v) \rangle = \langle d\nu(x)(h_v(u, v)), h_u(u, v) \rangle$$

d'où le résultat.

L'application de Gauss étant symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée de valeurs propres réelles, on parle donc de seconde forme fondamentale, notée $\Pi = -d\nu$.

Définition 1.2.5. Soit M une surface de \mathbb{R}^3 . On définit la courbure moyenne $H = H(x)$ en $x \in M$, par $H = \text{Tr}(\Pi)$, et la courbure de Gauss $K = K(x)$ par $K = \det(\Pi)$.

Théorème 1.2.6 (Expression locale de la courbure). On définit les quantités suivantes :

$$e = \nu \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}, \quad f = \nu \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}, \quad g = \nu \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial v^2}$$

Alors

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}, \quad K = \frac{ef - f^2}{EG - F^2}.$$

Démonstration. Soit $\alpha :]-1, 1[\rightarrow M$, une courbe différentiable, telle que $\alpha(0) = x \in M$. Alors si $\alpha(t) = h(u(t), v(t))$, $\xi = \alpha'(0) = u'h_u + v'h_v$

$$d\nu(x) \cdot \xi = \nu'(u(t), v(t)) = \nu_u(u(t), v(t))u'(t) + \nu_v(u(t), v(t))v'(t)$$

Et d'autre part, si on note de manière moins lourde $d\nu(x) \cdot \xi = \nu_u u' + \nu_v v'$, on écrit ν_u et ν_v dans la base (h_u, h_v) de $T_x M$:

$$\begin{aligned} \nu_u &= a_{11}h_u + a_{12}h_v \\ \nu_v &= a_{21}h_u + a_{22}h_v \end{aligned}$$

donc

$$d\nu(x) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

Enfin, on obtient

$$\Pi_x(\xi) = -\langle d\nu(x) \cdot \xi, \xi \rangle = -\langle \nu_u u' + \nu_v v', h_u u' + h_v v' \rangle = e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2$$

en développant le produit scalaire. En prenant les produits scalaires entre e, f, g avec les expressions de ν_u et ν_v , on peut écrire

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

Ceci donne donc

$$A = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} fF - eG & eF - fE \\ gF - Fg & fF - gE \end{pmatrix}.$$

$$\text{D'où } H = -\text{Tr}(A^t) = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \text{ et } K = \det(-A^t) = \det(A) = \frac{ef - f^2}{EG - F^2}.$$

Nous pouvons maintenant interpréter l'équation des surfaces minimales établie dans la section 1.1.

Corollaire 1.2.7. *Si la paramétrisation h est donnée sous la forme $h(x, y) = (x, y, f(x, y))$. Alors*

$$H = \text{div} \frac{Df}{1 + |Df|^2} = \frac{(1 + f_x^2)f_{xx} - 2f_{xy}f_xf_y + (1 + f_y^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} h_x &= (1, 0, f_x), \quad h_y = (0, 1, f_y) \\ h_{xx} &= (0, 0, f_{xx}), \quad h_{yy} = (0, 0, f_{yy}) \\ \nu &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \end{aligned}$$

Ces relations donnent bien le membre de droite de H .

On peut enfin déduire une conséquence non triviale de la réunion des travaux de Lagrange et Gauss : une surface minimise l'aire localement si et seulement si sa courbure moyenne est toujours nulle.

Définition 1.2.8. On dit qu'une surface est minimale si sa courbure moyenne est identiquement nulle.

Cette définition sera généralisée dans plusieurs directions au cours de ce mémoire. Remarquons que l'on déduit ainsi que les surfaces minimales ont une courbure de Gauss négative, car si K_1 et K_2 sont les valeurs propres de Π , $\text{Tr}(\Pi) = K_1 + K_2 = 0$, d'où $K = \det(\Pi) = -K_1^2 \leq 0$.

1.3 Annonce du plan

Le mémoire se divise en deux parties principales. La première a pour objet l'étude des propriétés géométriques des surfaces minimales. Elle a pour objectif de mettre en lumière les propriétés de rigidité des surfaces minimales, en lien avec l'analyse complexe, qui permettent de paramétrer les surfaces minimales au moyen d'une fonction holomorphe. D'autre part, les connexions entre les surfaces minimales et l'analyse complexe permettent de prouver un théorème analogue au théorème de Picard en analyse complexe.

Dans la deuxième partie, nous étudions principalement le problème classique de Plateau, qui consiste à déterminer si une courbe donnée borde une surface minimale. On y développe la notion naturelle de courant, afin d'étudier ses généralisations, et d'établir des résultats d'existence.

Chapitre 2

Structure complexe, représentation de Weierstrass-Enneper

2.1 Surface de Riemann

Définition 2.1.1. (Surface de Riemann) Une surface de Riemann est un espace topologique connexe séparé X muni d'un atlas $(U_a, \varphi_a)_{a \in A}$ où $(U_a)_{a \in A}$ est un recouvrement ouvert de X et les $\varphi_a : U_a \rightarrow V_a \subset \mathbb{C}$ sont des homéomorphismes vers des ouverts de \mathbb{C} tels que les compositions $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1} : \varphi_a(U_a \cap U_b) \rightarrow \varphi_b(U_a \cap U_b)$ sont des biholomorphismes.

Définition 2.1.2. Une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre deux surfaces de Riemann est holomorphe si, pour tout $x \in X$, pour toute carte locale (U_a, φ_a) de X en x et pour toute carte locale (V_a, ψ_a) de Y en $f(x)$, l'application $\psi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1}$ est holomorphe. Une telle application est un isomorphisme de surfaces de Riemann si c'est un homéomorphisme et si son inverse est holomorphe.

Nous allons travailler avec des formes différentielles sur une surface de Riemann. Soit M une surface de Riemann et z une coordonnée holomorphe locale. Alors $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ sont des coordonnées locales réelles de la variété différentielle de dimension 2 sous-jacente.

Une forme différentielle à valeurs complexes est une section du complexifié $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ du fibré cotangent. Localement une base de ce fibré vectoriel complexe est donnée par $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$. On note $\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)$ la base duale de $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ces champs de vecteurs (à valeurs complexes) correspondent à des dérivations de $C^\infty(M, \mathbb{C})$. On rappelle qu'une fonction f est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, antiholomorphe si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

2.2 Métrique riemannienne

Une variété riemannienne est une variété différentielle munie d'une notion de métrique.

Définition 2.2.1. Une variété riemannienne est la donnée une variété différentielle M munie d'une section globale lisse du fibré des formes bilinéaires symétriques $m \rightarrow g_m$ telle qu'en tout point g_m est une forme quadratique définie positive. On appelle g la métrique riemannienne sur M .

Remarque 2.2.2. Le caractère lisse de g peut s'exprimer localement de la façon suivante. Si m est un point de M et (x_1, \dots, x_n) des coordonnées locales au voisinage de m , on note $g_{ij}(m) = g_m\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$. Alors g est lisse si et seulement si les g_{ij} sont des fonctions lisses. Ainsi si X et Y sont deux champs de vecteurs lisses sur M , alors $m \rightarrow g_m(X(m), Y(m))$ est une fonction lisse sur M .

Remarque 2.2.3. Soit $f : M \rightarrow N$ une immersion et soit N une variété riemannienne. Alors on peut tirer la métrique de N en arrière par f et ainsi obtenir une métrique riemannienne sur M . La stricte positivité découle de l'injectivité de df .

En particulier, une surface plongée dans \mathbb{R}^3 est munie d'une structure riemannienne.

Définition 2.2.4. Si (M, g_1) et (N, g_2) sont deux variétés riemanniennes, une isométrie locale $f : M \rightarrow N$ est une application différentiable telle que $f^*g_2 = g_1$. Une isométrie est une isométrie locale bijective.

Remarque 2.2.5. L'application f est une isométrie si et seulement si c'est un difféomorphisme tel que pour tout $m \in M$, $df_m : T_m M \rightarrow T_{f(m)} M$ est une isométrie entre espaces euclidiens.

Exemple 2.2.6. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si $x : U \rightarrow M$ et $x' : U \rightarrow M'$ sont des paramétrisations de deux surfaces de \mathbb{R}^3 telles que les coefficients de la première forme fondamentale E, F, G et E', F', G' soient égaux, alors $x' \circ x^{-1}$ est une isométrie.

Définition 2.2.7. Deux métriques riemanniennes g et h sont dites conformément équivalentes si $g = \lambda h$ où λ est une fonction différentiable strictement positive.

Un difféomorphisme $f : (M, g_1) \rightarrow (N, g_2)$ est dit conforme si f^*g_2 et g_1 sont conformément équivalentes.

Une structure conforme sur une variété différentielle est la donnée d'une classe de métriques riemanniennes conformément équivalentes.

Remarque 2.2.8. Les transformations conformes du plan sont exactement les transformations holomorphes et antiholomorphes.

Définition 2.2.9. Si (M, g) est une surface riemannienne, des coordonnées locales (x, y) sont isothermales si $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}) = g(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y})$ et $g(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 0$. En particulier pour une surface de \mathbb{R}^3 , des coordonnées locales sont isothermales si les coefficients de la première forme fondamentale E, F, G sont telles que $E = G, F = 0$.

Exemple 2.2.10. La projection stéréographique de la sphère vers le plan complexe est conforme mais pas une isométrie locale.

2.3 Surfaces de Riemann versus surfaces riemanniennes, coordonnées isothermales

Dans cette section on étudie les surfaces et le rapport entre structure complexe et structure riemannienne. On montrera qu'une surface de Riemann est à peu près la même chose qu'une surface riemannienne. Pourtant ceci est faux en dimension supérieure, c'est-à-dire une variété riemannienne de dimension paire est en général loin d'être une variété complexe. On comprendra mieux la notion de coordonnées isothermales via ce phénomène important et particulier de la dimension 2.

2.3.1 Quelques outils d'analyse

Nous aurons besoin de quelques propriétés sur les équations différentielles ordinaires holomorphes (EDO complexes), qui sont énoncées ci-dessous.

Toutes les fonctions dans cette section sont de variables complexes et les lettres $x, y, z \dots$ désignent des variables complexes.

Définition 2.3.1. Soit $D \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ est dite holomorphe (analytique) si f est développable en série entière en chaque point de D .

Pour des EDO complexes, il existe aussi des flots locaux :

Théorème 2.3.2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons données k fonctions holomorphes en $k+1$ variables complexes au voisinage d'un point (a, b_1, \dots, b_k) :

$$f_i(x, y_1, \dots, y_k), 1 \leq i \leq k.$$

On considère le système différentiel holomorphe

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_k), 1 \leq i \leq k.$$

Alors il existe un unique système de k fonctions y_i holomorphes au voisinage du point $x = a$, telles que $y_i(a) = b_i$, et satisfaisant ce système différentiel.

Si on note $y_i(x, x_1, \dots, x_k)$ le système de solution de valeurs initiales (x_1, \dots, x_k) en a , alors les y_i sont holomorphes en x, x_1, \dots, x_k au voisinage de (a, b_1, \dots, b_k) .

En particulier si $F = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ est un champ de vecteurs holomorphes au voisinage de (b_1, \dots, b_k) , alors il existe $Y = (y_1, \dots, y_k)$ définie sur un voisinage de $(0, b_1, \dots, b_k)$ tels que $\frac{dY}{dx} = F(Y)$ et $Y(0, x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k)$. On appelle Y le flot du champ F .

Même si les résultats des EDO complexes sont analogues à ceux des EDO réelles, les méthodes de démonstration diffèrent. Une méthode pour les EDO complexe est celle des séries majorantes : on cherche des séries formelles qui vérifient le système différentiel et on montre ensuite qu'elles ont un rayon de convergence non nulle (voir [Car61], chapitre 7 p.214).

2.3.2 Démonstration du théorème du Gauss sur la paramétrisation conforme

Proposition 2.3.3. *Soit M une surface de Riemann. En tant que variété différentielle réelle de dimension 2, M possède une orientation induite par sa structure complexe. De plus, la structure complexe de M détermine naturellement une classe conforme de métriques riemanniennes. On dit qu'une métrique riemannienne sur M est compatible avec sa structure complexe si la métrique appartient à cette classe conforme.*

Démonstration. Les changements de cartes de M étant holomorphes, ils préservent l'orientation standard du plan complexe. Ceci entraîne que M est orientée.

On prend un recouvrement de M par des cartes holomorphes (U_i, z_i) et une partition de l'unité subordonnée (μ_i) . On note g_0 la métrique riemannienne standard du plan euclidien (plan complexe). On pose

$$g = \sum_i \mu_i z_i^* g_0$$

qui est une métrique riemannienne sur M . Puisque les changements de cartes sont des fonctions holomorphes donc conformes, la métrique riemannienne définie par une autre famille de cartes locales est conformément équivalente à g .

Remarque 2.3.4. On dit qu'une métrique riemannienne sur M est compatible avec sa structure complexe si la métrique appartient à cette classe conforme.

On en vient au théorème principal :

Théorème 2.3.5. *Si (M, g) est une variété différentielle orientée de classe analytique de dimension 2 munie d'une métrique g qui est analytique réelle (les coefficients de g sont des fonctions réelles analytiques), alors M admet une unique structure de surface de Riemann induisant la même orientation et telle que g soit compatible avec la structure complexe.*

En particulier, M est localement conforme au plan euclidien, ce qui est encore équivalent à l'existence d'une paramétrisation locale par coordonnées isothermales.

Démonstration. L'unicité découle du fait que les applications, d'un ouvert de \mathbb{R}^2 dans lui-même, conformes et qui préservent l'orientation sont exactement les fonctions holomorphes.

L'unicité dans le théorème permet de se ramener à un problème local. Soit U un voisinage de l'origine de \mathbb{R}^2 , muni d'une métrique analytique g .

Lemme 2.3.6. *Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur un ouvert V de \mathbb{C}^n . Pour tout point x_0 de V tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage V_0 de x_0 et un biholomorphisme $\varphi : V_0 \rightarrow \varphi(V_0) \subset \mathbb{C}^n$ tels que*

$$\varphi_*(X|_{V_0}) = e_1$$

où e_1 désigne le champ de vecteurs constant $(1, 0, \dots, 0)$ sur \mathbb{C}^n .

Démonstration. (du lemme) On peut supposer que $x_0 = 0$ et que $X(x_0) = e_1$. Notons φ^t le flot local de X en 0. Posons

$$\gamma : (t, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \varphi^t(0, x_2, \dots, x_n)$$

qui est holomorphe au voisinage de l'origine. Puisque $\varphi^0 = \text{Id}$ et que $\frac{d\varphi^t(0)}{dt} \Big|_{t=0} = X(0) = e_1$, la différentielle de γ en 0 est Id . Donc par le théorème d'inversion locale holomorphe, γ est un biholomorphisme local en 0. Ainsi pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ suffisamment proche de 0,

$$d\gamma_x(e_1) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=x_1} \gamma(t, x_2, \dots, x_n) = X(\gamma(x)).$$

Donc l'inverse de γ convient.

Ce lemme nous dit qu'on peut localement redresser un champ de vecteurs holomorphe.

Remarque 2.3.7. On en déduit en particulier l'existence locale d'une submersion holomorphe $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ qui est constante le long de X : on considère $\pi \circ \varphi$ où $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)$.

Lemme 2.3.8. Soit X_1, X_2 deux champs de vecteurs sur un ouvert V de \mathbb{C}^2 linéairement indépendants en un point p . Alors il existe une paramétrisation d'un voisinage de p telle que pour chaque point q dans ce voisinage, les lignes de coordonnées passant par q sont tangentes aux X_1, X_2 .

Démonstration. (du lemme) : Soit V_0 un voisinage de p où sont définies deux fonctions f_1, f_2 qui sont constantes le long des trajectoires de X_1, X_2 comme dans la remarque précédente. Posons $\alpha : V_0 \rightarrow \mathbb{C}^2$ défini par

$$\alpha(q) = (f_1(q), f_2(q))$$

On a

$$d\alpha_p(X_1) = (0, a), d\alpha_p(X_2) = (b, 0)$$

où a, b sont non nuls. On en déduit que α est un biholomorphisme local. Alors α^{-1} est la paramétrisation voulue.

Remarque 2.3.9. Attention cela n'implique pas que les X_i soient vecteurs vitesses de lignes de coordonnées.

Maintenant revenons à la démonstration du théorème.

On complexifie l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ en un ouvert $U' \subset \mathbb{C}^2$ qui est un voisinage ouvert de U considéré contenu dans \mathbb{C}^2 . On introduit $g'_0 = dx^2 + dy^2$ la section standard sur \mathbb{C} dans le fibré des formes bilinéaires symétriques complexes (analogue à la métrique riemannienne, mais prenant des valeurs complexes). Puisque g est une métrique analytique réelle, ses coefficients sont développables en séries entières et on peut prolonger g en une métrique g' holomorphe sur U' .

Remarque 2.3.10. Le point crucial de la preuve est qu'en dimension 2, une forme bilinéaire symétrique complexe a toujours deux directions isotropes, et deux telles formes diffèrent par une constante complexe si et seulement si elles ont les mêmes directions isotropes.

D'après le lemme 2.3.8, on peut trouver une paramétrisation locale $\widehat{\psi} : W \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow U'$ telles que les lignes de coordonnées soient tangentes aux directions isotropes de g' . Or les directions isotropes de g'_0 sur \mathbb{C}^2 sont des droites d'équations $y = \pm ix$. Si on désigne par τ la rotation de \mathbb{C}^2 qui envoie les droites d'équation $y = \pm ix + C$ sur les droites parallèles aux axes, alors $\psi = \widehat{\psi} \circ \tau$ est une paramétrisation qui préserve les directions isotropes. D'après la remarque 2.3.10, ψ est une paramétrisation conforme, *i.e.* $\psi_* g'_0$ et g' diffèrent par une constante complexe.

On note $\sigma : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ la conjugaison sur \mathbb{C}^2 . Comme la métrique g est réelle analytique, son prolongement g' vérifie que $\sigma^*(g') = \overline{g'}$. Les directions isotropes de g' sont donc invariantes par conjugaison. Ainsi la paramétrisation ψ est aussi invariante par conjugaison, c'est-à-dire que $\psi(\sigma(x, y)) = \sigma(\psi(x, y))$. Cela implique que ψ induit un difféomorphisme $V = W \cap \mathbb{R}^2 \rightarrow \psi(W) \cap \mathbb{R}^2$. Le fait que ψ est conforme pour la métrique complexe entraîne que cette paramétrisation est conforme pour la métrique riemannienne initiale. Le théorème est donc démontré.

En fait, on peut démontrer ce théorème avec moins de régularité pour g . Körn et Lichtenshtein ont prouvé qu'une condition höldérienne sur g suffit pour conclure, ce qui est plus difficile à démontrer (voir [Kor16],[Lic16]). On pourra consulter [DK81] pour une preuve moderne de ces résultats de régularité.

Introduisons une nouvelle notion.

Définition 2.3.11. Une structure presque complexe $J : M \rightarrow \text{End}(TM)$ sur une variété différentielle M est une section du fibré des endomorphismes de TM telle que :

$$\forall x \in M, J_x \in \text{End}(T_x M) \text{ et } J_x^2 = -\text{Id}_{T_x M}.$$

Exemple 2.3.12. Si M est une surface de Riemann, avec $z = x + iy$ coordonnée holomorphe locale, on définit J par $J(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}$, $J(\frac{\partial}{\partial y}) = -\frac{\partial}{\partial x}$. On vérifie aisément que cette définition ne dépend pas de choix de la coordonnée z .

De plus si M est une surface orientée de \mathbb{R}^3 , on peut la munir d'une unique structure de surface de Riemann compatible avec son orientation et sa métrique, d'après le théorème 2.3.5.

Si on note ν l'application de Gauss de M ($\nu(p)$ est la normale orientée en p), on peut montrer que la structure presque complexe J associée est donnée par $J(v) = \nu(p) \times v$, où \times est le produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 .

En résumé, sur une variété différentielle de dimension 2, la donnée d'une structure de surface de Riemann est équivalente à celle d'une classe conforme de métriques riemanniennes et d'une orientation.

2.4 Fonctions harmoniques, formes harmoniques

Maintenant on considère une surface orientée M de \mathbb{R}^3 . En tout point de M , l'espace tangent est un plan euclidien, ce qui nous permet d'exprimer simplement la dualité via le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 2.4.1. Soit α une 1-forme différentielle réelle sur M , on lui associe un champ de vecteurs v_α par $\alpha(\cdot) = \langle v_\alpha, \cdot \rangle$.

L'opérateur J nous permet de faire tourner champs de vecteurs et 1-formes :

Définition 2.4.2. On définit l'opérateur de Hodge comme suit :

$$*v = J(v), \text{ si } v \text{ est un champs de vecteurs sur } M$$

$$*\alpha = -\alpha \circ J, \text{ si } \alpha \text{ est une 1-forme sur } M.$$

Remarque 2.4.3. On a la relation $v_{*\alpha} = *v_\alpha$.

Définition 2.4.4. Le gradient d'une fonction u est v_{du} le champ dual à sa différentielle et on dit que u est un potentiel de v .

Soit v un champ de vecteurs et α sa 1-forme duale. Le rotationnel de v est défini par $d\alpha = \text{rot}(v)\omega$ où ω est la forme volume canonique. La divergence de v est définie par $d(*\alpha) = \text{div}(v)\omega$.

Le laplacien d'une fonction u est $\Delta u = \text{div}(\text{grad}(u))$.

On peut alors définir des fonctions harmoniques sur une surface :

Théorème 2.4.5. Une fonction u est harmonique si $\Delta u = 0$, soit $d(*du) = 0$.

Remarque 2.4.6. Bien que le laplacien dépende de la métrique, la notion de fonction harmonique ne dépend que de la structure conforme.

Si v est tel que $\text{rot}(v) = \text{div}(v) = 0$. Alors sa forme duale α est fermée, et s'intègre localement en une fonction harmonique u . Comme $*v$ vérifie les mêmes conditions, elle est localement le gradient d'une fonction harmonique u^* .

2.5 Représentation de Weierstrass-Enneper

D'après le théorème 2.3.5, maintenant on peut supposer que toutes les surfaces de \mathbb{R}^3 sont orientées et paramétrées par des coordonnées isothermales, ou de façon équivalente, qu'une surface est toujours recouverte par des cartes conformes.

On rappelle que J est l'opérateur de la structure presque complexe, et $*$ l'opérateur de Hodge qui agit sur champs de vecteurs et 1-formes par dualité. On rappelle l'expression de J , vu dans l'exemple 2.3.12.

Remarque 2.5.1. Comme nous ne manipulons maintenant que des paramétrisations conformes, on a, en notant φ une telle paramétrisation, que J et $d\varphi$ commutent. Plus précisément, $d\varphi_x(J(v)) = J(d\varphi(v)) = \nu_x \times d\varphi_x(v)$. Dans la suite, on utilise implicitement ce fait.

Nous utiliserons par la suite une définition plus générale de surfaces minimales :

Définition 2.5.2. Soit U un ouvert de \mathbb{C}^2 . Une surface minimale est la donnée d'une application lisse $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ harmonique (coordonnée par coordonnée) sur U et conforme sur $U \setminus E$ où E est un ensemble discret dans U .

On définit l'application de Gauss $\mathcal{N} : U \setminus E \rightarrow S^2$ par $\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$.

On signale que cette définition générale de surfaces minimales n'exclut ni les auto-intersections ni les points de branchement (où la paramétrisation est singulière, autrement dit où le rapport de métriques de la paramétrisation conforme s'annule). Donc une surface minimale en général n'est ni une surface plongée dans \mathbb{R}^3 ni une surface immergée dans \mathbb{R}^3 .

Au voisinage V d'un point $p \in U \setminus E$, $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ est une surface immergée. On définit $\nu : \varphi(V) \rightarrow S^2$ par $\mathcal{N} = \nu \circ \varphi$ qui est appelé, par abus, aussi l'application de Gauss. L'application ν correspond à l'application de Gauss définie sur une surface. Attention ici ν est définie localement.

Faisons un nouveau calcul pour montrer que cette définition correspond bien aux surfaces de courbure moyenne nulle :

$*d\varphi$ est fermée si et seulement si la forme bilinéaire suivante est symétrique en $u, v \in T_x M$:

$$-d\nu_x(u) \times d\varphi_x(v) - \nu(x) \times \text{Hess}\varphi(u, v)$$

Or la matrice hessienne est symétrique, donc on obtient comme condition :

$$d\nu_x(u) \times d\varphi_x(v) = d\nu_x(v) \times d\varphi_x(u)$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2, \text{ i.e. } H(x) = \text{Tr } \Gamma(x) = 0.$$

Proposition 2.5.3. L'application de Gauss est conforme en x si et seulement si la surface a un ombilic en x (la matrice de la seconde forme fondamentale en x a une seule valeur propre) ou si $H(x) = 0$.

Démonstration. Soit $u, v \in T_x M$. L'application ν est conforme en x si et seulement si en notant Γ la matrice de $d\nu$ dans une base orthonormée, il existe un réel λ tel que

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^2 = \lambda \text{Id}$$

Ce qui est équivalent à ; si $a = c, b = 0, \lambda = a^2$ ou si $a = -c, \lambda = a^2 + b^2 = -\det(\Gamma)$, alors $\langle d\nu(x) \cdot u, d\nu(x) \cdot v \rangle = -\det(\Gamma) \langle u, v \rangle$.

Corollaire 2.5.4. Si $K \leq 0$ (ce qui est le cas si $H = 0$), pour que M soit minimale, il faut et il suffit que ν soit conforme.

Remarque 2.5.5. On rappelle que la projection stéréographique ζ est conforme. Alors $\zeta \circ \mathcal{N}$ est une fonction holomorphe (car g et ζ sont antiholomorphes) de U vers la sphère. Et $\zeta \circ \mathcal{N}$ est une fonction méromorphe sur U .

Soit $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale, où D est le disque unité ouvert. D étant simplement connexe, la paramétrisation harmonique φ , selon 2.4, admet une conjuguée φ^* .

Proposition 2.5.6. $d\nu^* = d\nu \circ J = J \circ d\nu$.

Démonstration. Puisque l'image de $d\varphi^*$ est la même que celle de $d\varphi$, on a

$$\nu \circ \varphi = \nu^* \circ \varphi^*.$$

Donc $d\nu \circ d\varphi = d\nu^* \circ d\varphi^*$. Or $d\nu \circ d\varphi = -d\nu \circ J^2 \circ d\varphi$ et $d\varphi^* = *d\varphi = -d\varphi \circ J = J \circ d\varphi$, on a

$$d\nu^* = d\nu \circ J = J \circ d\nu$$

car ν est conforme.

Ainsi la paramétrisation conjuguée donne une autre surface minimale qui possède la même première forme fondamentale et les mêmes courbures principales. Cependant, la conjugaison donne lieu à une rotation de $\pi/4$ des vecteurs propres de $d\nu$:

Proposition 2.5.7. Si u, v sont deux vecteurs propres unitaires de $d\nu_x$ tels que

$$d\nu_x(u) = \lambda u, d\nu_x(v) = -\lambda v, J_x(u) = v,$$

alors $\frac{u+v}{2}$ et $\frac{u-v}{2}$ sont deux vecteurs propres de $d\nu^*$.

Démonstration. En effet,

$$d\nu^* \left(\frac{u+v}{2} \right) = J \circ d\nu \left(\frac{u+v}{2} \right) = J \left(\frac{1}{2} (\lambda u - \lambda v) \right) = \lambda \left(\frac{u+v}{2} \right).$$

De même pour $\frac{u-v}{2}$.

Les deux paramétrisations conjuguées forment respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe.

$$\mathcal{W} = \varphi + i\varphi^* : D \rightarrow \mathbb{C}^3$$

On étend le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 à \mathbb{C}^3 tel qu'il soit bilinéaire complexe comme dans la démonstration du théorème principal du chapitre 2.

Définition 2.5.8. Une fonction holomorphe $Y : D \rightarrow \mathbb{C}^3$ est dite isotrope si $\langle dY(v), dY(v) \rangle = 0$ pour tout v . Autrement dit, Y paramétrise une courbe holomorphe isotrope dans \mathbb{C}^2 .

Proposition 2.5.9. Si φ est une paramétrisation d'une surface minimale comme précédemment, alors $\mathcal{W} = \varphi + i\varphi^*$ est isotrope.

Démonstration. Le calcul donne

$$\begin{aligned} \langle d\mathcal{W}(v), d\mathcal{W}(v) \rangle &= \langle d\varphi(v), d\varphi(v) \rangle - \langle d\varphi^*(v), d\varphi^*(v) \rangle + 2i\langle d\varphi(v), d\varphi^*(v) \rangle \\ &= \langle d\varphi(v), d\varphi(v) \rangle - \langle d\varphi(Jv), d\varphi(Jv) \rangle + 2\langle d\varphi(v), d\varphi(Jv) \rangle = 0 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve.

Réciproquement si on se donne une fonction isotrope non constante $\mathcal{W} : D \rightarrow \mathbb{C}^3$, alors $\text{Re}(\mathcal{W})$ est une surface minimale. On écrit \mathcal{W} dans la base canonique de \mathbb{C}^3 , $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3)$. Les \mathcal{W}_i étant des fonctions holomorphes usuelles, on peut définir une fonction

$$G = \frac{-d\mathcal{W}_1 + id\mathcal{W}_2}{d\mathcal{W}_3} = \left(\frac{d\mathcal{W}_1 + id\mathcal{W}_2}{d\mathcal{W}_3} \right)^{-1}$$

car $\langle d\mathcal{W}, d\mathcal{W} \rangle = 0$. On peut exprimer $d\mathcal{W}$ en utilisant G :

$$d\mathcal{W} = \int \left(\frac{1}{2}(1/G - G), \frac{i}{2}(1/G + G), 1 \right) d\mathcal{W}_3, \quad \varphi = \text{Re}(\mathcal{W}).$$

Pour le moment, les calculs sont tout à fait formels. Nous allons les rendre rigoureux pour donner le théorème de représentation de Weierstrass :

Théorème 2.5.10. – Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , G une fonction méromorphe sur Ω et h une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω . Si h a un zéro d'ordre au moins $2n$ là où G a un pôle d'ordre n , alors

$$\left(\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G \right) h$$

s'intègre en une fonction isotrope non identiquement nulle. Réciproquement une fonction isotrope $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3)$ non constante peut s'écrire sous cette forme si et seulement si $\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2$ est non identiquement nulle.

- **Formule de représentation de Weierstrass-Enneper** Soit φ une surface minimale non plane définie sur un domaine simplement connexe $D \subset \mathbb{C}$. Il existe une fonction méromorphe G et une fonction holomorphe h sur D , non identiquement nulles, telles que hG^2 soit holomorphe, et telle que

$$\varphi = \text{Re}(\mathcal{W}) = \text{Re} \int \left(\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G \right) h dz.$$

Réciproquement, deux telles fonctions G, h définissent une surface minimale $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ si D est simplement connexe.

Démonstration. Il nous reste à prouver que si $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3)$ est une fonction isotrope et si $\mathcal{W}'_1 + i\mathcal{W}'_2$ est non identiquement nulle, alors on peut trouver des fonctions G, h satisfaisant les conditions souhaitées dans l'énoncé :

- Le fait que \mathcal{W} soit une fonction isotrope est équivalent à ce que

$$0 = \mathcal{W}'_1{}^2 \mathcal{W}'_2{}^2 \mathcal{W}'_3{}^2 = (\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2)(\mathcal{W}'_1 + i\mathcal{W}'_2) + \mathcal{W}'_3{}^2.$$

donc $\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2 = 0$ implique que $\mathcal{W}'_3 = 0$, et puis $\mathcal{W}'_1 = \mathcal{W}'_2 = \mathcal{W}'_3 = 0$. Donc l'hypothèse $\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2$ non identiquement nulle est nécessaire.

- Supposons que cette hypothèse est vérifiée. Alors

$$G = \frac{-\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2}{\mathcal{W}'_3} = \frac{\mathcal{W}'_3}{\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2}, h := \mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2$$

est telle que $Gh = \mathcal{W}'_3$ et que $-\mathcal{W}'_1 - i\mathcal{W}'_2 = hG^2$. Les conditions sont donc vérifiées.

Proposition 2.5.11. Le rapport de métriques de la paramétrisation conforme est $\frac{1}{4}(|G|^2 + 1)^2|h|^2$.

Démonstration.

$$\langle d\varphi(v), d\varphi(v) \rangle = \frac{|d\mathcal{W}(v)|^2}{2} = \left(\frac{1}{4}(|G|^2 + 1)^2|h|^2 \right) \langle v, v \rangle.$$

Remarque 2.5.12. Si h s'annule en x , alors l'intégrande de la représentation s'annule en x et la métrique est dégénérée en x . Un tel point x est appelé un point de branchement. Comme h n'est pas identiquement nulle, les points de branchement sont isolés.

D'après ce que nous venons de faire, on obtient facilement certaines propriétés de la surface minimale conjuguée dont on donne un résumé :

Théorème 2.5.13. – φ et φ^* ont les mêmes points de branchement.

- φ et φ^* ont les mêmes première formes fondamentales et sont donc localement isométriques l'une à l'autre.

Le théorème suivant fournit une interprétation géométrique de la fonction G .

Théorème 2.5.14. G est l'application de Gauss holomorphe, et les surfaces minimales d'une famille associées ont la même fonction G .

Démonstration. La projection stéréographique sur la sphère de G est

$$N = (2\operatorname{Re}(G), 2\operatorname{Im}(G), |G|^2 - 1)/(|G|^2 + 1).$$

Il suffit de montrer que N est orthogonal à tous les vecteurs tangents. Un vecteur tangent s'écrit $V = \operatorname{Re}((\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G)h \cdot v)$. Puisque N est réel, il suffit de montrer que le "produit scalaire complexe" s'annule :

$$\left\langle N(|G|^2 + 1), \left(\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G \right) \right\rangle = 0.$$

Sachant que G est l'application de Gauss holomorphe, on peut obtenir facilement la courbure de Gauss et la seconde forme fondamentale :

Théorème 2.5.15. *La courbure de Gauss K s'exprime en terme de G et h . En effet,*

$$K = - \left(\frac{4|G'|}{|h|(1 + |G|^2)^2} \right)^2.$$

Démonstration. On note σ_0 la forme volume canonique du plan euclidien, σ_1 celle de la sphère et σ celle de la surface minimale considérée. Sachant que les transformations considérées sont toutes conformes, la proportionnalité de l'élément de l'aire et le carré de celle de longueur (c'est-à-dire la première forme fondamentale). On a

$$G = \varsigma \circ \nu \circ \varphi.$$

On sait que

$$\nu^* \sigma_1 = K \sigma, \quad \varsigma^* \sigma_1 = \left(\frac{2z'}{1 + |z|^2} \right)^2 \sigma_0 = L(z) \sigma_0.$$

Alors

$$K \varphi^* \sigma = \varphi^* \nu^* \sigma_1 = L(G) G^* \sigma_0.$$

Or

$$\varphi^* \sigma = \left(\frac{1}{4} (|G|^2 + 1)^2 |h|^2 \right)^2 \sigma_0.$$

D'où le résultat.

Théorème 2.5.16. *La seconde forme fondamentale s'écrit : $b(v, v) = \operatorname{Re} \left(\frac{G'v}{G} hv \right)$.*

Démonstration. Par définition,

$$b(v, v) = - \langle d^2 \varphi(v, v), \nu \rangle = - \langle \operatorname{Re}(\mathcal{W}'' \cdot v^2), \nu \rangle.$$

On a $\mathcal{W}' = (\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G)h$. Comme dans la démonstration du théorème 2.5.14 *begingroup* $(\frac{1}{2}(1 - G^2), \frac{i}{2}(1 + G^2), G)$ est déjà orthogonal à ν , on n'a pas besoin de dériver h :

$$\begin{aligned} b(v, v) &= - \operatorname{Re}(G' h' v^2 \langle (-G, iG, 1), \nu \rangle) \\ &= - \operatorname{Re}(G' h' v^2 \langle (-G, iG, 1), (2\operatorname{Re}(G), 2\operatorname{Im}(G), |G|^2 - 1) \rangle / (|G|^2 + 1)) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{G'v}{G} hv \right). \end{aligned}$$

Corollaire 2.5.17. *- v représente une direction isotrope si et seulement si $\frac{G'v}{G} hv \in i\mathbb{R}$.*

- v représente une direction principale de courbure si et seulement si $\frac{G'v}{G} hv \in \mathbb{R}$.

On suppose maintenant que l'application de Gauss holomorphe G est biholomorphe de D dans $G(D) = D'$. Ainsi $G'(w) \neq 0$ pour tout $w \in D$ et $K < 0$ sur la surface. Soit $F : D' \rightarrow D$ l'inverse de G . Alors $\psi = \varphi \circ F$ est encore une paramétrisation d'une surface minimale. Posons

$$\mathfrak{F}(w) = \frac{h(F(w))}{2G'(F(w))} = \frac{1}{2}F'(w)h(F(w))$$

qui est une fonction holomorphe sur D' . A partir de la représentation de Weierstrass-Enneper (théorème 2.5.10), on obtient une autre formule de représentation de Weierstrass :

$$\Phi = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \int (1 - w^2)\mathfrak{F}(w)dw \\ \int i(1 + w^2)\mathfrak{F}(w)dw \\ \int 2w\mathfrak{F}(w)dw \end{pmatrix}$$

Au lieu d'utiliser deux fonctions G, h , cette formule de représentation ne fait intervenir qu'une seule fonction arbitraire \mathfrak{F} . Réciproquement, pour tout fonction holomorphe $\mathfrak{F} \neq 0$ sur un domaine simplement connexe, cette formule définit une surface minimale. *Autrement dit, à tout fonction holomorphe $\mathfrak{F} \neq 0$ correspond une surface minimale, et réciproquement.*

2.6 Famille associée

Un fait remarquable sur les surfaces minimales est que si $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une surface minimale définie sur un domaine simplement connexe, alors non seulement on peut obtenir une autre surface minimale, sa surface minimale conjuguée φ^* , mais aussi une famille de surfaces minimales paramétrée par $\theta \in [0, 2\pi]$.

En effet soit $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale donnée par la partie réelle d'une courbe isotrope $\mathcal{W} : D \rightarrow \mathbb{C}^3$. C'est-à-dire

$$\mathcal{W}(z) = \varphi(z) + i\varphi^*(z), \quad z = u + iv$$

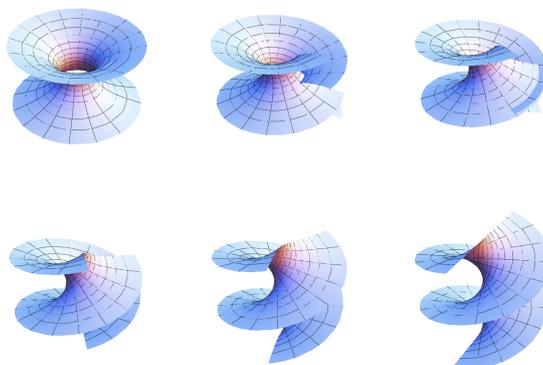
avec

$$\langle \mathcal{W}'(z), \mathcal{W}'(z) \rangle \equiv 0 \text{ sur } D$$

Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{W}_\theta(z) = e^{-i\theta}\mathcal{W}(z)$, $z \in D$ donne aussi une courbe isotrope, et par conséquent

$$\varphi_\theta(z) = \operatorname{Re}(\mathcal{W}_\theta(z)) = \varphi(z) \cos \theta + \varphi^*(z) \sin \theta$$

définit une famille paramétrée de surfaces minimales telle que $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_{\frac{\pi}{2}} = \varphi^*$. On l'appelle *la famille associée* de φ . On appelle les φ_θ les surfaces minimales associées à φ . Comme dans le théorème 2.5.13, on en déduit que les surfaces minimales associées sont localement isométriques l'une à l'autre. Un des premiers problèmes des surfaces minimales était d'en trouver, et avant la découverte de la paramétrisation de Weierstrass, la seule surface minimale connue (mis à part le plan...) était la caténoïde, surface de révolution obtenue par rotation d'une caténaire. En réalité, c'est la seule surface minimale de révolution. Un exemple est celui de la déformation de la caténoïde en l'hélicoïde, qui correspond à la figure ci-dessous.



Théorème 2.6.1. *Il existe une unique surface minimale de révolution plongée, qui correspond à la paramétrisation suivante :*

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = -\cosh u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

où $u, v \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface de révolution, c'est-à-dire une surface donnée par une expression de la forme $F(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, u)$, où $v \in \mathbb{R}$, et $u \in I$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse. On peut donc exprimer $M = F(U)$ sous la forme d'une équation du type $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Soit $m \in M$, et V un voisinage de M , tel que $F : F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit un plongement. Par conséquent, son inverse $f = g^{-1}$ existe et est lisse, et $M \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(\sqrt{x^2 + y^2})\}$. Après calculs, qu'on ne reproduit pas ici, on obtient la relation suivante pour x et y non simultanément nuls :

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = f'' + \frac{f'}{\sqrt{x^2 + y^2}} + f'^3$$

Par conséquent, la condition $(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$ se réécrit en :

$$t f''(t) = -f'(t)(1 + f'(t)^2)$$

Étudions l'équation différentielle $t\ddot{x} = -\dot{x}(1 + \dot{x}^2)$, sur un intervalle du type $[t_0, \infty[$, où $t_0 > 0$. Alors si $f = \operatorname{argch}$, $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}$, et $f''(t) = \frac{-t^2}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$, or

$$-f'(t)(1 + f'(t)^2) = -\frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) = -\frac{t^2}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, c'est la seule solution de l'équation différentielle, à translation et multiplication par des scalaires près. On en déduit que $f(t) = \lambda \operatorname{argch}(\alpha t + \beta)$.

De même on prouve que la seule surface minimale réglée est l'hélicoïde (voir par exemple [DHW91], chapitre 3), c'est-à-dire une surface qui est une union de droites, et admet une paramétrisation locale de la forme $F(u, v) = a(v) + ub(v)$, où $u, v \in U \subset \mathbb{R}^2$, et $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Notons que si X représente la caténoïde, $X(w) = \operatorname{Re}\mathcal{W}(w)$, où $\mathcal{W}(w) = (\cosh w, i \sinh w, w)$, et la fonction de Weierstrass \mathfrak{F} est égale à $\mathfrak{F}(w) = -\frac{1}{2w^2}$. Par conséquent, la surface adjointe, $X^*(w) = \operatorname{Im}\mathcal{W}(w)$, est donnée par

$$\begin{cases} x^* = \sinh u \cos v \\ y^* = \sinh u \sin v \\ z^* = u \end{cases}$$

qui correspond à l'hélicoïde. Les coordonnées de la famille associée $Z(w, \theta) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta}\mathcal{W}(w))$ sont donc

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \cos \theta + \sinh u \sin v \sin \theta \\ y = -\cosh u \sin v \cos \theta + \sinh u \cos v \sin \theta \\ z = u \cos \theta + u \sin \theta \end{cases}$$

pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, qui permet de déformer la caténoïde en l'hélicoïde, correspondant aux cas $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Chapitre 3

Omissions de l'application de Gauss des surfaces minimales complètes

Dans les sections précédentes, on a vu comment certaines propriétés des surfaces minimales étaient liées à leur structure complexe et aux fonctions holomorphes. Dans cette section, on développe encore ce point de vue complexe pour obtenir de belles propriétés des surfaces minimales. On va démontrer le théorème de Fujimoto qui est un analogue du théorème de Picard en analyse complexe, et qui affirme que l'application de Gauss d'une surface minimale complète régulière omet au plus quatre points sur la sphère.

3.1 Surfaces minimales globales, surfaces complètes

On étend maintenant le domaine de définition d'une surface minimale, non sur un ouvert simplement connexe, mais sur une surface de Riemann quelconque.

Soit M une surface de Riemann. On appelle une application non constante $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale si pour toute carte locale (U, φ) de M , $X = \mathcal{X} \circ \varphi^{-1}$ est une surface minimale au sens de la définition 2.5.2. En particulier \mathcal{X} est une fonction harmonique sur M . Le fait que la paramétrisation par coordonnées isothermes et l'harmonicité d'une fonction sont préservées par changement de cartes biholomorphe implique que la définition de surface minimale sur une surface de Riemann est compatible avec sa structure complexe.

Définition 3.1.1. Une surface minimale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est appelée *une surface minimale globale*.

De plus, un point $q \in M$ est dit un point de branchement si pour une carte locale (U, φ) , le point $\varphi(q)$ est un point de branchement pour $X = \mathcal{X} \circ \varphi^{-1}$. Une surface minimale globale est dite *régulière* si elle n'a aucun point de branchement.

On définit de même l'application de Gauss $\mathcal{N} : M \rightarrow S^2$ d'une surface minimale globale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que pour toute carte locale (U, φ) , $\mathcal{N} = N \circ \varphi$ avec $N = |X_u \wedge X_v|^{-1} X_u \wedge X_v$. L'application de Gauss \mathcal{N} est ainsi bien définie là où il n'y a pas de point de branchement. Sinon on montre facilement (voir [Dierkes], p.104) que $\mathcal{N}(w)$ tend vers une limite quand w tend vers un point de branchement w_0 , et on pose $\mathcal{N}(w_0) = \lim_{w \rightarrow w_0} \mathcal{N}(w)$.

On peut tirer en arrière la métrique induite par \mathbb{R}^3 sur M via l'application \mathcal{X} de sorte que M soit munie d'une métrique riemannienne. Cette métrique s'annule aux points de branchements qui sont isolés. Par conséquent, à proprement parler, si M est non régulière, alors elle n'est pas une véritable variété riemannienne, mais une variété riemannienne généralisée avec des singularités isolées.

Définition 3.1.2. Un chemin divergent sur un espace topologique X est une application continue $\gamma : [0, 1[\rightarrow X$ telle que, pour tout compact $K \subset X$, il existe $t_0(K) \in [0, 1[$ tel que $\gamma(t) \in X \setminus K$ pour tout $t > t_0(K)$.

Sur une variété riemannienne, on a une fonction distance d :

$$d(p, q) = \inf l(\gamma) = \inf \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

où l'infimum est pris parmi les courbes différentiables par morceaux reliant p et q .

Théorème-Définition 3.1.1. (Hopf-Rinow) Soit M une variété riemannienne, avec d sa distance induite. On dit que M est complète si les assertions suivantes, toutes équivalentes, sont vérifiées :

- 1) (M, d) est un espace métrique complet.
- 2) Si $B \subset M$ est borné, alors son adhérence est compacte.
- 3) Tout chemin de classe C^1 divergent est de longueur infinie.

Pour les détails sur les définitions de ces concepts, on renvoie par exemple à Do Carmo chapitres 4,5.

Définition 3.1.3. Un chemin divergent sur une surface minimale globale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe continue $\Gamma : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^3$ de la forme $\Gamma = \mathcal{X} \circ \gamma$ où $\gamma : [0, 1[\rightarrow M$ est un chemin divergent sur la variété riemannienne généralisée M .

Définition 3.1.4. Une surface minimale globale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est dite complète si la longueur de tout C^1 -chemin divergent est infinie.

Remarque 3.1.5. Une surface minimale globale régulière est complète si elle vérifie l'une des trois assertions dans le théorème de Hopf-Rinow 3.1.1.

Dans la suite on doit utiliser le théorème d'uniformisation qui est un théorème fondamental de la théorie des surfaces de Riemann, et qui est une généralisation du théorème de représentation de Riemann :

Théorème 3.1.6 (Théorème d'uniformisation). *Il n'y a que trois types de surfaces de Riemann simplement connexe : la sphère, le plan complexe et la disque unité. Autrement dit, le revêtement universel de toute surface de Riemann est biholomorphe soit à la sphère, soit au plan complexe, soit au disque unité.*

Soit $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale globale et soit $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . Alors $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \circ \pi$ définit aussi une surface minimale globale $\widehat{\mathcal{X}} : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$. On l'appelle *le revêtement universel de la surface minimale \mathcal{X}* . On remarque que $\widehat{\mathcal{X}}$ est régulière si et seulement si \mathcal{X} l'est, et que les images des applications de Gauss $\widehat{\mathcal{N}}$ et \mathcal{N} sont les mêmes.

La proposition suivante nous permet de ramener certaines questions sur les surfaces minimales complètes au cas simplement connexe :

Proposition 3.1.7. *Une surface minimale globale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est complète si et seulement si son revêtement universel $\widehat{\mathcal{X}} : \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'est.*

Démonstration. En premier lieu, si \mathcal{X} est régulière, la proposition découle directement du théorème de Hopf-Rinow car $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ est une isométrie locale.

Supposons que $\widehat{\mathcal{X}}$ est complète. Soit Γ un chemin divergent sur \mathcal{X} . En relevant Γ , on obtient un chemin divergent $\widehat{\Gamma}$ sur $\widehat{\mathcal{X}}$ qui est de longueur infinie car $\widehat{\mathcal{X}}$ est complète. Puisque $\pi : \widehat{M} \rightarrow M$ est une isométrie locale, Γ est aussi de longueur infinie. Ainsi \mathcal{X} est complète.

Réciproquement supposons que \mathcal{X} est complète. Prenons un chemin divergent $\widehat{\Gamma}$ sur $\widehat{\mathcal{X}} : \widehat{\Gamma} = \widehat{\mathcal{X}} \circ \widehat{\gamma}, \widehat{\gamma} : [0, 1[\rightarrow \widehat{M}$. Montrons que $\widehat{\Gamma}$ est de longueur infinie. On considère les chemins $\gamma = \pi \circ \widehat{\gamma}$ sur M et $\Gamma = \mathcal{X} \circ \gamma = \widehat{\mathcal{X}} \circ \widehat{\gamma} = \widehat{\Gamma}$ sur \mathcal{X} . Si γ est divergent, alors la complétude de \mathcal{X} implique que γ est de longueur infinie et que $\widehat{\gamma}$ l'est donc aussi.

Supposons que γ n'est pas divergent. Il existe alors un compact $K \subset M$ et une suite $t_n \in [0, 1[$ qui tend vers 1 tels que $\gamma(t_n) \in K$ pour tout n . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\gamma(t_n)$ converge vers $p \in M$. Prenons une carte locale (U, φ) autour de p telle que $\varphi(p) = 0$ et que $\pi^{-1}(U)$ soit réunion disjointe des ouverts $V_i \subset \widehat{M}$. Comme les points de branchements sont isolés, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\Omega_\varepsilon = B(0, \varepsilon) \setminus \overline{B}(0, \varepsilon/2)$ soit contenu dans $\varphi(U)$ et que la métrique soit strictement positive sur $\varphi^{-1}(\Omega_\varepsilon)$. Comme la suite $\gamma(t_n)$ converge vers p , presque tous ses points sont dans le compact $\varphi^{-1}(\overline{B}(0, \varepsilon/2))$. Puisque $\widehat{\gamma}$ est divergent dans \widehat{M} , les points $\widehat{\gamma}(t_n)$ se trouvent dans un nombre infini d'ouverts parmi les V_i . Par conséquent le chemin $\varphi \circ \gamma$ traverse nécessairement un nombre infini de fois la région Ω_ε . Cela implique que γ est de longueur infinie, et que $\widehat{\gamma}$ l'est aussi.

La proposition suivante montre que le premier cas du théorème d'uniformisation est exclu :

Proposition 3.1.8. *Le domaine de paramétrisation d'une surface minimale globale ne peut pas être compact. Si M est un domaine de paramétrisation simplement connexe d'une surface minimale, alors M est isomorphe au disque unité ou au plan complexe.*

Démonstration. Si M était compacte, alors les coordonnées de \mathcal{X} étant des fonctions harmoniques, elles seraient constantes par le principe du maximum. Or on a supposé que \mathcal{X} n'est pas constante, contradiction.

On dit qu'une surface minimale globale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de type hyperbolique si son revêtement universel est le disque unité \mathbb{D} , de type parabolique si son revêtement universel est le plan complexe \mathbb{C} .

3.2 Un premier théorème sur les omissions de l'application de Gauss

On commence par énoncer un résultat classique de la théorie des surfaces minimales, datant de 1916 :

Théorème 3.2.1 (Bernstein). *Si $X(x_1, x_2) = (x_1, x_2, z(x_1, x_2))$ est une surface minimale définie sur \mathbb{R}^2 tout entier comme le graphe d'une fonction lisse, alors z est une fonction affine et la surface minimale est un plan.*

On remarque que si X est une surface minimale définie sur \mathbb{R}^2 comme le graphe d'une fonction, alors l'application de Gauss omet une hémisphère entière sur S^2 . On va montrer dans cette section un théorème plus fort qui dit que l'image de l'application de Gauss d'une surface minimale régulière complète est même dense dans S^2 .

Proposition 3.2.2. *L'application de Gauss d'une surface minimale $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de type parabolique omet au plus deux points sauf si $\mathcal{X}(M)$ est contenue dans un plan.*

Démonstration. En se ramenant au revêtement universel, il suffit de montrer que l'application de Gauss d'une surface minimale $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ omet au plus deux points si $X(\mathbb{C})$ n'est pas contenu dans un plan.

On utilise la représentation de Weierstrass-Enneper :

$$X(w) = X(0) + \operatorname{Re} \left(\int_0^w \frac{1}{2} h(1 - G^2) d\zeta, \int_0^w \frac{i}{2} h(1 + G^2) d\zeta, \int_0^w hG d\zeta \right)$$

avec G l'application de Gauss par projection stéréographique. Le théorème de Picard implique que la fonction méromorphe G omet au plus deux valeurs dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. En effet, si X omet trois points, alors on peut supposer qu'un de ces points est le pôle Nord, et donc par projection stéréographique, on obtient une application $X : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe qui omet deux points. On en déduit alors que X est constante.

Remarque 3.2.3. Le théorème de Bernstein est une conséquence immédiate de ce théorème.

Désignons par Ω le plan complexe ou le disque unité. Supposons que, dans la représentation de Weierstrass-Enneper, les deux fonctions h et hG^2 soient holomorphes et ne s'annulent pas sur Ω . Alors la représentation de Weierstrass-Enneper donne une surface minimale $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la métrique induite est

$$ds = \lambda |dw|, \quad \lambda = \frac{1}{2} |h| (1 + |G|^2).$$

Un chemin est divergent pour (Ω, ds) si et seulement s'il l'est pour $(\Omega, |dw|)$. La surface minimale \mathcal{X} est complète si et seulement si pour tout chemin divergent γ ,

$$\int_{\gamma} \lambda |dw| = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{1}{2} |h| (1 + |G|^2) |dw| = \infty.$$

Le théorème suivant fut conjecturé par Nirenberg et prouvé par Osserman :

Théorème 3.2.4. *Soit $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface minimale globale complète qui est régulière ou qui n'a qu'un nombre fini de points de branchement si M est simplement connexe. Si $\mathcal{X}(M)$ n'est pas un plan, alors l'image de l'application de Gauss est dense dans S^2 .*

La démonstration du théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.2.5. *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec un nombre fini de zéros, alors il existe un chemin divergent $\gamma : [0, 1[\rightarrow \mathbb{D}$ lisse tel que*

$$\int_{\gamma} |f(w)| |dw| < \infty.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f ne s'annule pas. Alors l'application $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $F(w) = \int_0^w f(\zeta) d\zeta$ est inversible dans un voisinage de 0. Soit $L(z)$ l'inverse locale de F autour de $z = 0$ qui est développable en série entière sur un disque $B(0, R)$. On pose I l'ensemble des points $\rho \in]0, R]$ vérifiant que $L(B(0, \rho)) \subset \mathbb{D}$ et que $L : B(0, \rho) \rightarrow L(B(0, \rho))$ est bijective. D'après le théorème de Liouville, $r = \sup I$ est fini car L n'est pas constante.

On prétend d'abord qu'il existe un point $z_0 \in \partial B(0, r)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} |L(tz_0)| = 1.$$

Ainsi $\gamma(t) = L(tz_0)$, $t \in [0, 1[$ est un chemin divergent dans \mathbb{D} . Or

$$\int_{\gamma} |f(w)| |dw| = \int_{\gamma} |F'(w)| |dw| = \int_{F \circ \gamma} |dz| = |z_0| = r < \infty$$

et le lemme est donc démontré dans le cas où f ne s'annule pas.

Supposons par absurde qu'un tel z_0 n'existe pas. Alors pour tout $p \in \partial B(0, r)$, on peut trouver une suite t_n dans $]0, 1[$ convergeant vers 1 telle que $L(t_n p)$ converge vers un point $q \in \mathbb{D}$. Puisque $F'(p) \neq 0$, F est inversible sur un voisinage V de p . Soit L^* l'inverse de $F|_V$. On a

$$F(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(L(t_n p)) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n p = p.$$

Donc $F(V) \cap B(0, r)$ est non vide, et L^* est forcément une extension de L à un voisinage de p . $\partial B(0, r)$ étant compact, on peut étendre L à un disque $B(0, r')$ telle que le rayon $r' > r$. Comme $F(L(z)) = z$, L est bijective sur $B(0, r')$. Ceci contredit la maximalité de r . Supposons maintenant que f admet des zéros a_1, a_2, \dots, a_n dans \mathbb{D} comptés avec multiplicité. Alors la fonction

$$f^*(w) = f(w) \prod_{k=1}^n \left(\frac{1 - \overline{a_k} w}{w - a_k} \right)$$

ne s'annule pas sur \mathbb{D} . De plus, $|f^*(w)| \geq |f(w)|$ sur \mathbb{D} . Ainsi on se ramène au cas où f ne s'annule pas, ce qui est déjà démontré.

Démonstration du théorème. En se ramenant au revêtement universel de \mathcal{X} , on peut supposer que M est \mathbb{C} ou \mathbb{D} .

Si $M = \mathbb{C}$ et l'image de son application de Gauss n'est pas dense dans S^2 , alors la proposition 3.2.2 montre que $\mathcal{X}(\mathbb{C})$ est contenue dans un plan affine de \mathbb{R}^3 . Puisque \mathcal{X} est complète, c'est forcément le plan entier.

Supposons que $M = \mathbb{D}$ et que l'image de l'application de Gauss n'est pas dense dans S^2 . On peut supposer que l'application de Gauss omet un voisinage du pôle nord. Maintenant on exprime \mathcal{X} par la représentation de Weierstrass-Enneper. La fonction G étant l'application de Gauss composée par projection stéréographique, est alors une fonction holomorphe bornée sur \mathbb{D} et les zéros de la fonction h correspondent aux points de branchement qui sont supposés en nombre fini.

D'après le lemme, on peut trouver un chemin divergent dans \mathbb{D} tel que $\int_{\gamma} |h| |dw| < \infty$. Ainsi la longueur du chemin $\Gamma = \mathcal{X} \circ \gamma$

$$l(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |h|(1 + |G|^2) |dw| \leq cste \int_{\gamma} |h| |dw| < \infty.$$

Cela contredit le fait que la surface minimale est complète.

3.3 Théorème de Fujimoto

On va montrer un théorème plus fort que le théorème 3.2.4 : le théorème de Fujimoto qui affirme que l'application de Gauss d'une surface minimale complète régulière non plane omet au plus quatre points sur la sphère. Le théorème de Fujimoto fut démontré par Fujimoto en 1988, la démonstration que nous allons faire est due à Osserman. On donnera aussi des exemples montrant que le théorème ne peut pas être amélioré.

Théorème 3.3.1. (de Fujimoto) *Si une surface minimale régulière complète $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ n'est pas un plan, alors son application de Gauss omet au plus quatre points sur S^2 .*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{X} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit une surface minimale régulière complète dont l'application de Gauss omet au moins cinq points distincts $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \in S^2$. On peut supposer que s_5 est le pôle nord. Quitte à se ramener au revêtement universel, on peut supposer que M est simplement connexe. D'après la proposition 3.2.2, la surface est nécessairement de type hyperbolique, *i.e.* on peut supposer que $M = \mathbb{D}$.

On utilise toujours la représentation de Weierstrass-Enneper. La fonction méromorphe G omet $a_k = \zeta(s_k)$, $1 \leq k \leq 4$ et ∞ où ζ est la projection stéréographique, en particulier G est holomorphe. La surface minimale est régulière donc h ne s'annule pas sur \mathbb{D} .

La démarche de la démonstration est analogue à celle du lemme 3.2.5 : faire un changement de variables pour construire un chemin divergent de longueur finie.

Comme dans la preuve du lemme 3.2.5, on définit une fonction $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$F(w) = \int_0^w f(\zeta) d\zeta \quad (3.1)$$

où f est une fonction holomorphe ne s'annulant pas. On déterminera f plus tard. Posons L et r comme dans la démonstration du lemme 3.2.5. Rappelons que $F(L(z)) = z$ pour $z \in B(0, r)$, qu'il existe un point $z_0 \in \partial B(0, r)$ tel que $\lim_{t \rightarrow 1^-} |L(tz_0)| = 1$ et que L ne peut pas être étendue à un voisinage de z_0 .

Définissons des courbes γ, γ^* et Γ par $\gamma^*(t) = tz_0$, $0 \leq t \leq 1$, $\gamma = L \circ \gamma^*$ et $\Gamma = \mathcal{X} \circ \gamma$. Alors la longueur de Γ vérifie :

$$l(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |h|(1 + |G|^2) |dw| = \frac{1}{2} \int_{\gamma^*} |h \circ L|(1 + |G \circ L|^2) \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz|$$

où $\frac{dw}{dz}(z) = \frac{1}{\frac{dz}{dw}(w)} = \frac{1}{f(w)}$, $w = L(z)$. On cherche la fonction f de la forme $f(w) = \frac{1}{2} h(w) \varphi(w)$ où φ est à déterminer plus tard. On obtient donc

$$l(\Gamma) = \int_{\gamma} \frac{1 + |G(L(z))|^2}{|\varphi(L(z))|} |dz|. \quad (3.2)$$

On veut choisir φ de sorte que $l(\Gamma)$ soit finie. Puisque Γ est un chemin divergent, cela contredirait la complétude de la surface minimale.

Posons $\beta := G \circ L$ qui est holomorphe sur $B(0, r)$ et qui omet au moins les quatre valeurs a_1, a_2, a_3, a_4 . Nous prétendons d'abord l'inégalité suivante : pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < \varepsilon' < \frac{\varepsilon}{4}$, il existe $b > 0$ tel que

$$(1 + |\beta(z)|^2)^{\frac{1}{2}(3-\varepsilon)} \prod_{j=1}^4 |\beta(z) - a_j|^{\varepsilon'-1} |\beta'(z)| \leq \frac{2br}{r^2 - |z|^2} \quad (3.3)$$

est satisfaite pour tout $z \in B(0, r)$.

Supposons maintenant que $G'(w) \neq 0$ sur \mathbb{D} . Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé et posons $p = \frac{2}{3-\varepsilon}$. Ainsi $\frac{2}{3} < p < 1$. Nous posons

$$f(w) = \left(\frac{1}{2} h(w) \right)^{\frac{1}{1-p}} \prod_{j=1}^4 (G(w) - a_j)^{\frac{p(1-\varepsilon')}{1-p}} G'(w)^{\frac{-p}{1-p}}. \quad (3.4)$$

En faisant le changement de variables : $w = L(z)$, $\beta(z) = G(w)$, $\beta'(z) = G'(z) \frac{dw}{dz}$, et en écrivant $f(w) = \frac{1}{2} h(w) \varphi(w)$, on déduit de la construction de f :

$$\left(\frac{dz}{dw} \right)^{1-p} = \frac{1}{2} h(w) \prod_{j=1}^4 (G(w) - a_j)^{p(1-\varepsilon')} G'(w)^{-p}$$

et puis

$$\varphi \circ L(z) = (\beta'(z))^{-p} \prod_{j=1}^4 (\beta(w) - a_j)^{p(1-\varepsilon')}. \quad (3.5)$$

En reportant dans l'inégalité (3.3), on obtient :

$$\frac{1 + |G(L(z))|^2}{|\varphi(L(z))|} \leq \left(\frac{2br}{r^2 - |z|^2} \right)^p \text{ pour } z \in B(0, r)$$

avec $\frac{2}{3} < p < 1$. D'après la formule (3.2), la longueur de Γ est finie.

Maintenant traitons le cas où G' s'annule sur un ensemble non vide $\Sigma \subset \mathbb{D}$. Σ est soit un ensemble fini, soit il contient une suite tendant vers le bord de \mathbb{D} . Si on définit f sur $\mathbb{D} \setminus \Sigma$ par 3.4 et puis F par (3.1), alors F n'est pas bien définie sur $\mathbb{D} \setminus \Sigma$, mais sur le revêtement universel $\widehat{\mathbb{D}}$ de $\mathbb{D} \setminus \Sigma$. L'espace $\widehat{\mathbb{D}}$ étant biholomorphe à \mathbb{D} , on peut lui appliquer le raisonnement du lemme 3.2.5 et faire descendre les objets dans $\mathbb{D} \setminus \Sigma$ par le revêtement. On définit de même γ, γ^* et Γ comme dans le cas précédent de sorte que $l(\Gamma) < \infty$. Il nous reste à montrer que Γ est un chemin divergent dans \mathbb{D} . Si ceci n'est pas vrai, on peut trouver une suite $z_n = t_n z_0$ sur γ^* telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} L(z_n) = w_0 \in \mathbb{D}$. Compte tenu de la preuve du lemme 3.2.5, w_0 ne peut pas être contenu dans $\mathbb{D} \setminus \Sigma$, donc $w_0 \in \Sigma$, i.e. $G'(w_0) = 0$. Nous développons la fonction holomorphe G' autour de w_0 : $G'(w) = c(w - w_0)^m + \dots$ avec $c \neq 0$ et $m \geq 1$, puis

$$G'(w)^{\frac{p}{1-p}} = C(w - w_0)^{\frac{mp}{1-p}} + \dots \quad (3.6)$$

avec $p = \frac{2}{3-\varepsilon}$ et $\frac{p}{1-p} > 2$.

Si $\gamma(t) \rightarrow w_0$ quand $t \rightarrow 1^-$, alors en combinant (3.6) et (3.4), on déduit que $|w - w_0|^{-2}$ est dominé par $|f|$ près de w_0 . Puisque $r = \int_{\gamma^*} |dz| = \int_{\gamma} |f| |dw|$ et $\int_{\gamma} |w - w_0|^{-2} |dw| = \infty$, on arrive à une contradiction.

Si $\gamma(t)$ ne tendait pas vers w_0 , il y aurait un point d'accumulation dans $\mathbb{D} \setminus \Sigma$. Le raisonnement du lemme 3.2.5 mène à une contradiction.

Il nous reste encore à prouver l'inégalité 3.3. Nous admettons les propriétés suivantes du revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$: Son revêtement universel est la disque unité \mathbb{D} , la métrique tirée en avant de la métrique de Poincaré standard s'écrit $ds = \rho(w) |dw|$ sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, avec

$$\rho(w) \sim \frac{C_j}{|w - a_j| |\log|w - a_j||}, \quad w \rightarrow a_j, \quad 1 \leq j \leq 4, \quad \text{et} \quad \rho(w) \sim \frac{C_0}{|w| |\log|w||}, \quad w \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

où C_j sont des constantes non nulles.

Posons $\varphi(w) := (1 + |w|^2)^{\frac{3-\varepsilon}{2}} \rho(w)^{-1} \prod_{j=1}^4 |w - a_j|^{\varepsilon'-1}$ pour $w \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Alors φ est positive et continue sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Compte tenu de (3.7), $\lim_{w \rightarrow a_j} \varphi(w) = 0$. Par conséquent φ admet un maximum b sur $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. On considère ensuite $\beta = G \circ L$ définie sur $B(0, r)$ qui omet les points a_1, a_2, a_3, a_4 . On relève β dans le revêtement universel de $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$: $\widehat{\beta} : B(0, r) \rightarrow \mathbb{D}$. On applique ensuite le lemme de Schwarz-Pick (voir [SS03]) à $\widehat{\beta} \circ \iota$ où ι est une homothétie envoyant \mathbb{D} sur $B(0, r)$. La signification géométrique du lemme de Schwarz-Pick étant que la distance non euclidienne est diminuée par transformation holomorphe de \mathbb{D} dans lui-même, on en déduit que

$$\rho(\beta(z)) |\beta'(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2}$$

pour $z \in B(0, r)$. En reportant dans l'expression de φ , on obtient l'inégalité (3.3). La démonstration est achevée.

Finalement nous montrons que le théorème de Fujimoto ne peut pas être amélioré.

Théorème 3.3.2. *Pour tout sous-ensemble E de S^2 contenant au plus quatre points, il existe une surface minimale régulière complète dont l'application de Gauss omet exactement E .*

Démonstration. Soit $E = \{s_1, \dots, s_n\}$. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ les projections stéréographiques des s_1, \dots, s_n . On considère

$$\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}, \quad G(w) = w, \quad h(w) = \prod_{k=1}^n (w - a_k)^{-1}.$$

Puisque $\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ n'est pas simplement connexe, la représentation de Weierstrass-Enneper n'y est pas bien définie, mais est définie sur son revêtement universel Ω . On construit ainsi une surface minimale régulière $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss omet a_1, \dots, a_n .

Il faut montrer que \mathcal{X} est complète. Considérons $\gamma : [0, 1[\rightarrow \Omega$ et $\Gamma = \mathcal{X} \circ \gamma$. Il faut montrer que pour un chemin divergent Γ , sa longueur

$$l(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} |h|(1 + |G|^2)|dw| = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \prod_{k=1}^{n-1} |w - a_k|^{-1} (1 + |w|^2) |dw| \quad (3.8)$$

est infinie. Il y a trois cas possibles :

Premier cas : $\gamma(t)$ est bornée, contenue dans $B(O, R)$. Sur $B(0, R)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\prod_{k=1}^n |w - a_k|^{-1} (1 + |w|^2) > \varepsilon$. Ainsi $l(\Gamma) > \varepsilon l(\gamma)$. Si $l(\gamma)$ est infinie, alors $l(\Gamma)$ l'est aussi. Sinon, quand $t \rightarrow 1^-$, $\gamma(t)$ converge vers un point w_0 qui est nécessairement dans $\{a_1, \dots, a_n\}$. Alors la formule (3.8) implique que $l(\Gamma) = \infty$.

Deuxième cas : Il existe deux suites $t_j, t_{j'}$ tels que $\lim_{j \rightarrow \infty} |\gamma(t_j)| = \infty$ et $\gamma(t_{j'})$ reste bornée. Dans ce cas γ traverse une région couronne un nombre infini de fois et on conclut comme dans le cas précédent.

Troisième cas : $\lim_{t \rightarrow 1^-} |\gamma(t)| = \infty$. Dans ce cas l'intégrale (3.8) diverge pour $n \leq 4$. C'est ici qu'on exige que $n \leq 4$.

Chapitre 4

Intermède mesurable

4.1 Mesures de Hausdorff

L'introduction de telles mesures permet de pallier l'insuffisance flagrante de la mesure de Lebesgue pour mesurer des sous-ensembles comme les sous-variétés. Ce sont des mesures naturelles qui permettent de généraliser les notions d'aire et de surface en toute dimension, même fractionnaire. Rappelons la :

Définition 4.1.1. Soit X un ensemble. On dit qu'une application $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ est une mesure extérieure si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- 2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$, pour tout $(A_n)_{n \geq 1} \subset X$.

En plus de permettre de mesurer tous les sous-ensembles de \mathbb{R}^n , les mesures extérieures portent intrinsèquement en elles le concept de mesurabilité.

Définition 4.1.2. Un ensemble $A \subset X$ est dit mesurable si

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A^c \cap B), \quad \forall B \subset X.$$

On peut prouver que la collection $\mathcal{A}(\mu)$ des ensembles μ -mesurable est une tribu et que $\mu|_{\mathcal{A}}$ est une mesure. On renvoie pour les preuves concernant les concepts de base à [EG92], p. 2., [Fed69], p.171, et au polycopié [Duq]. On rappelle une dernière définition.

Définition 4.1.3. 1) Une mesure μ sur X est dite régulière si pour tout $A \subset X$, il existe $B \in \mathcal{A}(\mu)$ tel que $A \subset B$, et que $\mu(A) = \mu(B)$.

2) Si de plus $X = (X, \mathcal{T})$ est une espace topologique, et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{T})$ est la tribu engendrée par les ouverts de X , alors on dit que μ est borélienne si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mu)$.

3) Si $A \subset X$ est μ -mesurable, on définit la mesure $\mu \llcorner A$ par $\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B)$.

On se place sur \mathbb{R}^n ($n \geq 1$), et on définit en premier lieu des pré-mesures extérieures de Hausdorff, \mathcal{H}_δ^s , pour $\delta > 0$, et $0 \leq s < \infty$, par

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam}(A_k)}{2} \right)^s, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \text{diam}(A_k) \leq \delta, \forall k \geq 1 \right\}$$

où $\alpha(s) = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$, par analogie avec $\mathcal{L}^n(B(0,1)) = \alpha(n)$, et \mathcal{L}^n désigne la mesure de Lebesgue (sur \mathbb{R}^n). Il s'agit ensuite de montrer que la mesure extérieure \mathcal{H}^s , est bien définie et Borel-régulière, où

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Précisons qu'on montre facilement que \mathcal{H}^0 coïncide avec la mesure de comptage, et que $\mathcal{H}^s = 0$ pour $s > n$ (pour ce dernier point, voir [EG92]). En réalité, nous n'avons pas besoin de connaître à l'avance la valeur de $\alpha(n)$, mais cette normalisation est faite pour obtenir la relation $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$. La preuve repose sur l'inégalité isodiamétrique : pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\text{diam}(A)}{2} \right)^n$$

On renvoie à [Fed69], p. 197 pour la preuve. Montrons comment on peut en déduire l'égalité précédente. Grâce à la définition de la mesure n -ème de Hausdorff, on remarque qu'elle est invariante par translation, car le diamètre d'un ensemble l'est. De plus, si $A = B(0, 1)$, alors $\text{diam}(B(0, 1)) = 2$, donc $\mathcal{H}_2^n(A) \leq \alpha(n)$. D'autre part, si $0 < s \leq n$ pour tout $\lambda > 0$, pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$, car $\text{diam}(\lambda A) = \lambda \text{diam}(A)$. Enfin, si $\delta > 0$, $\text{diam} A \leq \delta$, $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}_\delta^n(A)$, donc

$$\mathcal{H}^n(B(0, 1)) = \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \mathcal{H}_\delta^n \left(B \left(0, \frac{\delta}{2} \right) \right) \leq \left(\frac{2}{\delta} \right)^n \alpha(n) \left(\frac{\text{diam} \left(B \left(0, \frac{\delta}{2} \right) \right)}{2} \right)^n = \alpha(n)$$

On conclut ainsi que $\mathcal{H}^n(B(0, 1)) \leq \alpha(n)$. Pour l'autre sens, si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement de $B(0, 1)$ par des ensembles de diamètre inférieur à $\delta > 0$, alors

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\text{diam}(A_k)}{2} \right)^n$$

En prenant la borne inférieure des telles sommes, on obtient l'inégalité $\mathcal{L}^n(B(0, 1)) \leq \mathcal{H}^n(B(0, 1))$. Par conséquent, \mathcal{H}^n est une mesure invariante par translation, et qui vérifie la condition qu'il existe un ensemble borélien B tel que $0 < \mathcal{H}^n(B) < \infty$ donc \mathcal{H}^n est proportionnelle à la mesure de Lebesgue, et la constante de proportionnalité est égale à 1 d'après l'égalité précédente.

Une deuxième approche consiste à constater que \mathcal{H}^n et \mathcal{L}^n , sont des mesures équiréparties sur l'espace métrique séparable \mathbb{R}^n , donc sont proportionnelles : voir [Mat], p.45.

Enfin, on prouvera que dans le cas d'une sous-variété de dimension m de \mathbb{R}^n ,

$$\text{Vol}(M) = \mathcal{H}^m(M).$$

4.2 Formule de l'aire

Définition 4.2.1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, et $(E', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ deux espaces euclidiens, et $|\cdot|$, $|\cdot|'$ les normes associées aux produits scalaires de E et E' . On définit, si $f : E \rightarrow E'$ est une application linéaire,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|', x \in E, |x| \leq 1\}.$$

Si $m \geq 1$, on définit le m -jacobien de f , $J_m f$, par $J_m f = \|\wedge_m f\|$, où le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ sur $\wedge_m E$ est celui induit par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de E .

Remarque 4.2.2. Les jacobiens sont des quantités qui permettent de généraliser le déterminant pour des applications linéaires entre ensemble euclidiens de dimensions différentes. En effet, dans le cas où $1 \leq m \leq n$, et $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}^m$, alors on définit son m -jacobien $J_m f(x)$ par $J_m f(x) = J_m Df(x)$. Enfin, mentionnons le théorème de Rademacher (voir [EG92], [Fed69]), que nous admettrons ici.

Théorème 4.2.3. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lipschitzienne. Alors f est dérivable \mathcal{L}^m presque partout.

On remarque qu'on peut échanger la condition par une condition locale, la différentiabilité étant une affaire locale. Par conséquent, si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne, alors $J_m(f)$ est bien défini \mathcal{L}^m presque partout.

Théorème 4.2.4 (Formule de l'aire). Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble \mathcal{L}^m -mesurable, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lipschitzienne. Alors

$$\int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) d\mathcal{H}^m(y)$$

où $N(f|A, y) = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$.

Démonstration. On commence par un lemme technique fondamental, qui repose sur la décomposition polaire d'une application linéaire.

Lemme 4.2.5. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lipschitzienne, $\lambda > 1$, alors l'ensemble E défini par

$$E = \{x \in \mathbb{R}^m, Df(x) \text{ soit injective}\}$$

admet un recouvrement \mathcal{B} de boréliens tels que pour tout $B \in \mathcal{B}$:

- 1) $f|_B$ est injective.
- 2) Il existe $s \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$ tel que

$$\text{Lip}(f|_B \circ s^{-1}) \leq \lambda, \quad \text{Lip}(s \circ (f|_B)^{-1}) \leq \lambda,$$

$$\lambda^{-1}|s(v)| \leq |Df(x) \cdot v| \leq \lambda|s(v)|, \quad \text{pour tout } x \in B, v \in \mathbb{R}^m$$

$$\lambda^{-m}|\det(s)| \leq J_m f(x) \leq \lambda^m|\det(s)| \quad \text{pour tout } x \in B.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda^{-1} + \varepsilon < 1 < \lambda - \varepsilon$, et soit G un sous-ensemble dense de $\text{GL}(m, \mathbb{R})$. Pour tout $s \in G$, on associe à chaque entier $k \geq 1$ le borélien $B(s, k)$ de \mathbb{R}^m composé des points $x \in \mathbb{R}^m$ tels que

$$(\lambda^{-1} + \varepsilon)|s(v)| \leq |Df(x) \cdot v| \leq (\lambda - \varepsilon)|s(v)|, \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

$$|f(y) - f(x) - Df(x) \cdot (y - x)| \leq \varepsilon|s(y - x)|, \quad \forall y \in B\left(x, \frac{1}{k+1}\right) \quad (4.2)$$

or le jacobien d'une application linéaire $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est autre que son déterminant (en effet, $\wedge_m s(v_1, \dots, v_n) = s(v_1) \wedge \dots \wedge s(v_n) = \det(s(v_1), \dots, s(v_n)) = \det(s) \det(v_1, \dots, v_n)$). Par conséquent, l'inégalité (4.1) fournit l'encadrement

$$\lambda^{-m}|\det(s)| \leq J_m f(x) \leq \lambda^m|\det(s)|$$

D'autre part, l'inégalité (4.2) fournit les estimations des constantes de Lipschitz :

$$|f(x) - f(y)| \leq |Df(x) \cdot (x - y)| + \varepsilon|s(x - y)| \leq \lambda|s(x) - s(y)|$$

$$|f(x) - f(y)| \geq |Df(x) \cdot (y - x)| - \varepsilon|s(x - y)| \geq \lambda^{-1}|s(x) - s(y)|.$$

Enfin, il reste à montrer que $\mathcal{B} = \bigcup_{s \in S, k \in \mathbb{N}} B_{s,k}$ est bien un recouvrement de E . En effet, par décomposition polaire, on écrit $Df(x) = h \circ g$, où $g \in \text{GL}(m, \mathbb{R})$, $h \in O(m, n)$ (application linéaire orthogonale $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$), il suffit donc de choisir $s \in G$ tel que

$$\|s \circ g^{-1}\| < (\lambda^{-1} + \varepsilon)^{-1}, \quad \text{et} \quad \|g \circ s^{-1}\| < \lambda - \varepsilon$$

ce qui est possible car $\lambda^{-1} + \varepsilon < 1 < \lambda - \varepsilon$. Ceci conclut la preuve du lemme.

Revenons à la preuve du théorème. Supposons dans un premier temps que $A \subset E$. Alors si $B \subset A$, et $B \subset C$, $C \in \mathcal{B}$, on a

$$\lambda^m|\det(s)|\mathcal{L}^m(B) = \lambda^m\mathcal{H}^m((s \circ f|_B^{-1}) \circ f(B)) \leq \lambda^m\text{Lip}(s \circ f|_B^{-1})^m\mathcal{H}^m(f(B)) \leq \lambda^{2m}\mathcal{H}^m(f(B)).$$

et de même

$$\lambda^{-2m}\mathcal{H}^m(f(B)) \leq \lambda^{-m}|\det(s)|\mathcal{L}^m(B).$$

Le point 2) du lemme fournit l'encadrement suivant :

$$\lambda^{-2m} \mathcal{H}^m(f(B)) \leq \int_B J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) \leq \lambda^{2m} \mathcal{H}^m(f(B)).$$

En sommant sur tous les B , on obtient

$$\lambda^{-2m} \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) d\mathcal{H}^m(y) \leq \int_A J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) \leq \lambda^{2m} \int_{\mathbb{R}^n} N(f|A, y) d\mathcal{H}^m(y).$$

L'inégalité étant valable pour tout $\lambda > 1$, on a le résultat en faisant tendre λ vers 1.

La seconde étape de la preuve est de considérer $A \subset \{x \in \mathbb{R}^m, J_m f(x) = 0\}$. Alors soit $\varepsilon > 0$ fixé, et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ l'application telle que $g(x) = (f(x), \varepsilon x)$. Alors $Dg(x) = (Df(x), \varepsilon I_m)$, $Dg(x)$ est injective, et $\|Dg(x)\| \leq \text{Lip}(f) + \varepsilon$, donc $J_m g(x) \leq \varepsilon(\text{Lip}(f) + \varepsilon)^{m-1}$, et quitte à se restreindre à des compacts, en supposant que $\mathcal{L}^m(A) < \infty$, on a

$$\mathcal{H}^m(f(A)) \leq \mathcal{H}^m(g(A)) = \int_A J_m g(x) d\mathcal{L}^m(x) \leq \varepsilon(\text{Lip}(f) + \varepsilon)^{m-1} \mathcal{L}^m(A).$$

Le résultat s'ensuit finalement en faisant tendre ε vers 0.

On en déduit un théorème de changement de variable général suivant :

Théorème 4.2.6. *Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble \mathcal{L}^m -mesurable, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lipschitzienne, et $g : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction \mathcal{L}^m -intégrable. Alors*

$$\int_A g(x) J_m f(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{x \in A \cap f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^m(x).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat si g est une fonction indicatrice, par le procédé standard d'approximation. Or dans ce cas il s'agit de la formule de l'aire.

Enfin, avec de passer à des applications, mentionnons la formule de la co-aire, qui traite le cas où $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $m \geq n$.

Théorème 4.2.7. *Si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $A \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble \mathcal{L}^m -mesurable, et $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, alors*

$$\int_A g(x) J_n f(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{A \cap f^{-1}\{y\}} g(x) d\mathcal{H}^{m-n}(x) d\mathcal{L}^n(y).$$

Rappelons que si $\alpha \in \wedge^n T^* \mathbb{R}^n$ est une n -forme différentielle sur \mathbb{R}^n , alors si $\alpha(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, on définit l'intégrale de α par

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \alpha(x), e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mathcal{L}^n(x)$$

De plus, si M est une sous-variété orientée de dimension m de \mathbb{R}^n , (U, φ) une carte locale de M , et $\alpha \in \wedge^m T^* M$ telle que $\text{supp}(\alpha) \subset M$, on définit

$$\int_M \alpha = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \alpha d\mathcal{L}^m(x).$$

Et par définition, on a, si $x \in M$, et $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})^* \alpha(x)(v_1, \dots, v_m) &= \alpha(\varphi^{-1}(x))(d\varphi^{-1}(x) \cdot v_1, \dots, d\varphi^{-1}(x) \cdot v_m) \\ &= \alpha(\varphi^{-1}(x))(\wedge_m d\varphi^{-1}(x)(v_1 \wedge \dots \wedge v_m)). \end{aligned}$$

On obtient donc, si α est la forme volume canonique de M ,

$$\int_U \alpha = \int_{\varphi(U)} J_m \varphi^{-1}(x) d\mathcal{L}^m(x) = \int_U d\mathcal{H}^m(x)$$

En utilisant une partition de l'unité, on obtient la formule

$$\text{Vol}(M) = \mathcal{H}^m(M).$$

Enfin, si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, on peut donc naturellement définir

$$\int_M f \alpha = \int_M f(x) d\mathcal{H}^m(x) \left(= \int_{\varphi(U)} f(\varphi^{-1}(x)) J_m \varphi^{-1}(x) d\mathcal{L}^m(x) \right)$$

si le support de f est inclus dans un ouvert de cartes (U, φ) pour la dernière inégalité. Les deux théorèmes 4.2.4 et 4.2.6 sont très utiles pour calculer des intégrales sur les sous-variétés, qui seraient difficilement accessibles par les méthodes habituelles de géométrie différentielle, comme par exemple le volume des Grassmanniennes ou des groupes orthonormaux (voir [Fed69], p.263).

4.3 Ensembles rectifiables, espace tangent

Le but de la partie suivante est de traiter le problème de Plateau, et pour cela nous allons utiliser la méthode standard, consistant à montrer un résultat de compacité pour une classe plus grande que les variétés, et donc de définir des notions de convergence.

Définition 4.3.1. Un sous-ensemble M de \mathbb{R}^n est dit m -rectifiable s'il existe des fonctions lipschitziennes $f_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k \geq 1$) telles que

$$\mathcal{H}^m \left(M \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(\mathbb{R}^m) \right) = 0.$$

Remarque 4.3.2. Cette condition est équivalente à la condition plus naturelle suivante :

$$M = \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k$$

où M_k est une sous-variété de classe C^1 pour $k \geq 1$, et $\mathcal{H}^m(M_0) = 0$. Signalons que, dans le cas $m = 1$, cette définition coïncide avec la définition usuelles des courbes rectifiables. On rappelle qu'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est rectifiable si sa longueur, définie par

$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^m |\gamma(a_k) - \gamma(a_{k-1})|, 0 = a_0 < \dots < a_m = 1, m \geq 1 \right\}$$

est finie. De plus, on peut montrer que $\mathcal{H}^1 = l$. Pour la preuve que les ensembles rectifiables et 1-rectifiables coïncident, voir [Fal86], chapitre 3, p.28.

Définition 4.3.3. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble \mathcal{H}^m -mesurable, de \mathcal{H}^m -mesure localement finie. On dit que M admet un espace tangent en $x \in M$ s'il existe un sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\frac{(M-x)}{\varepsilon}} f(y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_V f(y) d\mathcal{H}^m(y)$$

pour tout $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. On le notera $T_x M$.

Mentionnons que cette définition coïncide avec l'espace tangent usuel si M est une sous-variété de \mathbb{R}^n . En effet, par définition de l'espace tangent [BG12], et de l'isomorphisme entre $T_x M$ et \mathbb{R}^m , il suffit de regarder le cas où $M =]-1, 1[^m \times \{0\}^{n-m}$, $x = 0$.

$$\int_{\frac{(M-0)}{\varepsilon}} f(y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{]-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}[^m} f(t_1, \dots, t_m, 0) d\mathcal{L}^m(t) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}} f(y) d\mathcal{H}^m(y)$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

La propriété fondamentale des ensembles rectifiables est que ce sont exactement ceux possédant un espace tangent presque partout. Précisément, on a :

Théorème 4.3.4. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble \mathcal{H}^m -mesurable et de \mathcal{H}^m -mesure localement finie. Alors M est m -rectifiable si et seulement si M admet un espace tangent en \mathcal{H}^m presque tout point.

Nous ne prouverons pas ce théorème ici, car cela ferait une diversion un peu longue, le sens (direct) que nous utiliserons devrait faire appel à d'autres notions non utilisées par ailleurs. Pour la preuve, voir [Kra08] p.150, ou [HS86] p.23. Nous introduisons pour terminer une nouvelle classe de distributions, qui nous seront utiles par la suite.

4.4 Fonctions à variation bornée

On fixe à nouveau un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 4.4.1. Une fonction $f \in L^1(U)$ est à variation localement bornée si sa différentielle faible est une mesure de Radon (signée) à valeurs dans \mathbb{R}^n , autrement dit, s'il existe une mesure de Radon $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) : \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que pour tout $\varphi \in C_c^1(U)$, et tout $1 \leq j \leq n$,

$$\int_U f(x) \partial_j \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_U \varphi(x) d\mu_j(x).$$

Nous noterons $\mu = \sigma \|Df\|$ la décomposition polaire de μ , où $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction mesurable telle que $|\sigma| = 1$ \mathcal{L}^n presque partout, et $\|Df\|$ est une mesure positive, et $BV_{loc}(U)$ l'ensemble des telles fonctions sur U . Si de plus la mesure μ est finie, nous dirons que f est à variation bornée, et l'ensemble des fonctions à variation bornée sera noté $BV(U)$.

L'intérêt de cette définition est qu'elle constitue un cadre naturel pour le calcul des variations.

Proposition 4.4.2. 1) Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation localement bornée si et seulement si pour tout $V \subset\subset U$,

$$\sup \left\{ \int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x), \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n), \operatorname{supp} \varphi \subset V, \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < \infty.$$

2) Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée si et seulement si

$$\sup \left\{ \int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x), \varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} < \infty.$$

Démonstration. 1) D'après la définition précédente, une fonction à variation bornée vérifie bien cette inégalité car μ est une mesure de Radon. Réciproquement, d'après le théorème de représentation de Riesz, les dérivées faibles de u étant des formes linéaires continues sur $C_c^1(U)$, on peut les prolonger par continuité à $C_c(U)$; on déduit l'existence d'une mesure de Radon $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ à valeurs dans \mathbb{R}^n telle que pour tout $\varphi \in C_c^1(U)$, $1 \leq j \leq n$,

$$\int_U f(x) \partial_j \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_U \varphi(x) d\mu_j(x).$$

2) Il suffit de remarquer que la condition est équivalente à $\|Df\|(U) < \infty$.

Corollaire 4.4.3. L'espace $BV(U)$ muni de la norme $\|f\|_{BV} = \|f\|_{L^1(U)} + \|Df\|(U)$ est un espace de Banach.

Démonstration. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset BV(U)$ est une suite de Cauchy, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(U)$ est de Cauchy, donc converge vers une fonction $f \in L^1(U)$. De plus si $\varphi \in C_c^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} \int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k(x) \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \varphi(x) \cdot \sigma_k(x) d\|Df_k\|(x) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U). \end{aligned}$$

Donc $f \in BV(U)$, ce qui termine la preuve.

Remarque 4.4.4. Le théorème de représentation de Riesz nous dit également que

$$\|Df\|(V) = \sup \left\{ \int_U f(x) \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x), \varphi \in C_c^1(U), \operatorname{supp} \varphi \subset V, \|\varphi\| \leq 1 \right\}.$$

Nous terminons par une propriété importante des fonctions à variation bornée, qui nous sera utile dans la preuve du théorème d'existence de courants minimaux. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 4.4.5. Soit μ une mesure sur \mathbb{R}^n , on définit la fonction maximale de μ par

$$\mathbf{Max}_\mu(x) = \sup_{r>0} \frac{\mu(B(x, r))}{\alpha(n)r^n}.$$

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, on dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est un point de Lebesgue de f si

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(x) - f(y)| d\mathcal{L}^n(x) = 0$$

Remarque 4.4.6. 1) Rappelons qu'un théorème de Lebesgue affirme que \mathcal{L}^n presque tout point de \mathbb{R}^n est un point de Lebesgue pour une fonction intégrable. 2) On peut prouver par exemple que si U est borné, f est de classe C^1 , on a $\sigma = \frac{Df}{|Df|}$, et $\|Df\| = |Df| \mathcal{L}^n$, ce qui redonne la formule de Gauss-Green.

Lemme 4.4.7. Si $f \in BV(U)$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^n , et si 0 est un point de Lebesgue de f , alors

$$\int_{B(0, r)} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} d\mathcal{L}^n(x) \leq \int_0^1 \int_{B(0, tr)} \frac{|Df(x)|}{t^n} d\mathcal{L}^n(x) dt \leq \alpha(n)r^n \mathbf{Max} \|Df\|(x)$$

Démonstration. Si $f \in BV(U) \cap C^1(U)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{B(0, r)} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x|} d\mathcal{L}^m(x) &= \int_{B(0, r)} \left| \int_0^1 Df(tx) \cdot \frac{x}{|x|} dt \right| d\mathcal{L}^n(x) \\ &\leq \int_{B(0, r)} \int_0^1 |Df(tx)| d\mathcal{L}^n(x) dt \\ &= \int_0^1 \int_{B(0, tr)} \frac{|Df(x)|}{t^n} d\mathcal{L}^n(x) dt. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par densité de $C^1(U) \cap BV(U)$ dans $BV(U)$, ce qu'on démontre avec la méthode habituelle de convolution (voir [EG92], p.172).

Proposition 4.4.8. Soit $f \in BV(U)$, et x, y des points de Lebesgue de f dans U , alors

$$|f(x) - f(y)| \leq 2^n (\mathbf{Max}_{\|Df\|}(x) + \mathbf{Max}_{\|Df\|}(y)) |x - y|$$

Démonstration. Si $x \neq y$, soit $2r = |x - y|$, et $z = \frac{x + y}{2}$, alors par le lemme précédent

$$\begin{aligned} \alpha(n)r^n \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} &= \int_{B(p, r)} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} d\mathcal{L}^n(z) \\ &= \int_{B(p, r)} \frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|} d\mathcal{L}^n(z) + \int_{B(p, r)} \frac{|f(z) - f(y)|}{|z - y|} d\mathcal{L}^n(z) \\ &\leq \int_{B(x, 2r)} \frac{|f(x) - f(z)|}{|x - z|} d\mathcal{L}^n(z) + \int_{B(y, 2r)} \frac{|f(z) - f(y)|}{|z - y|} d\mathcal{L}^n(z) \\ &\leq \alpha(n)(2r)^n (\mathbf{Max}_{\|Df\|}(x) + \mathbf{Max}_{\|Df\|}(y)). \end{aligned}$$

Chapitre 5

Théorie des courants, problème de Plateau

5.1 Problème de Plateau

5.1.1 Énoncé du problème de Plateau

On s'intéresse ici aux surfaces minimales simplement connexes. On peut donc les paramétrer par le disque unité dans \mathbb{R}^2 .

Définition 5.1.1. Étant donnée une courbe de Jordan (c'est à dire l'image d'un plongement de S^1 dans \mathbb{R}^3) Γ dans \mathbb{R}^3 , on dit que $X \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R}^3) \cap C^2(B, \mathbb{R}^3)$ est une surface minimale de bord Γ si

$$\Delta X = 0, \quad |X_u|^2 = |X_v|^2, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0.$$

et $X|_{S^1}$ est un homéomorphisme de S^1 sur Γ . C'est donc une surface minimale régulière, à laquelle on impose des conditions au bord.

5.1.2 Résultats connus

Mentionnons quelques résultats fondamentaux sur les problèmes d'existence de solution au problème de Plateau. On peut prouver par des moyens élémentaires le théorème suivant

Théorème 5.1.2 (Douglas, Rado, 1930). *Pour toute courbe de Jordan fermée rectifiable $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, il existe une solution au problème de Plateau 5.1.1.*

Cependant, la preuve (voir par exemple [DHW91]), si elle est accessible grâce aux méthodes développées jusqu'ici, ne se prête pas à la généralisation à d'autres types de problème. C'est la raison qui nous pousse à présenter la théorie des courants, qui forme un langage naturel et général pour les problèmes variationnels. Par exemple, grâce à cette théorie, le problème de savoir si une courbe délimitait une surface minimale plongée (sans auto-intersection) a été résolu.

Théorème 5.1.3 (Hardt-Simon, 1979). *Toute courbe de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ de classe $C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) borde une surface minimale orientable plongée.*

5.2 Définitions

5.2.1 Courants

Le but de cette partie est de se placer dans un contexte plus général afin de pouvoir traiter le problème de Plateau dans n'importe quelle dimension. L'outil essentiel va s'avérer être une généralisation des distributions, les courants, qui seront définis comme des formes linéaires sur l'espace des formes différentielles lisses à support compact. Dans la suite, on fixe un entier $n \geq 1$.

Définition 5.2.1. Soit des entiers $1 \leq m \leq n$. On définit :

$$\Lambda(m, n) = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \{1, \dots, n\}, 1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_m \leq n\}$$

Pour toute m -forme différentielle ω , on notera

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} \omega_\lambda dx_\lambda$$

l'unique décomposition de ω dans la base $(dx_\lambda)_{\lambda \in \Lambda(m, n)}$, où $dx_\lambda = dx_{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx_{\lambda_m}$, et $\omega_\lambda \in C_c^\infty(U)$.

Définition 5.2.2. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit

$$\mathcal{E}_m(U) = C^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n), \quad \mathcal{D}_m(U) = C_c^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n)$$

On munit $\mathcal{E}_m(U)$ de la topologie naturelle engendrée par la famille de semi-normes

$$\|\omega\|_{m, K, j} = \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} \|D^\alpha \omega_\lambda\|_{\infty, K}$$

pour $j \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Pour définir une topologie sur $\mathcal{D}_m(U) = C_c^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n)$, on se donne une suite exhaustive de compacts de U , $(K_j)_{j \geq 1} \subset U$, et on munit $\mathcal{D}_m(U) = C_c^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n)$ de la topologie limite inductive correspondant à la décomposition $C_c^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_c^\infty(K_j, \wedge^m \mathbb{R}^n)$ où la topologie de $C_c^\infty(K_j, \wedge^m \mathbb{R}^n)$ est engendrée par la famille $(\|\cdot\|_{m, K_j, l})_{l \geq 1}$.

Rappelons la définition de limite inductive de topologies :

Définition 5.2.3. Soit X un espace vectoriel. On se donne une famille croissante $(X_n)_{n \geq 1}$ de sous-espaces de X , où chaque X_n ($n \geq 1$) est muni d'une topologie localement convexe \mathcal{T}_n telle que \mathcal{T}_{n+1} restreinte à X_n soit égale à \mathcal{T}_n . Soit \mathcal{U} la collection des ensembles convexes équilibrés, absorbants U de X tels que $U \cap X_n \in \mathcal{T}_n$ pour tout $n \geq 1$. Alors \mathcal{U} est une base de voisinages de 0 d'une topologie localement convexe sur X . La topologie \mathcal{T} sur X engendrée par \mathcal{U} est appelée **topologie limite inductive** des $(X_n, \mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$, et notée

$$(X, \mathcal{T}) = \varinjlim (X_n, \mathcal{T}_n)_{n \geq 1}.$$

Une construction équivalente serait de prendre la topologie la plus fine qui rende toutes les injections $\iota_n : X_n \hookrightarrow X$, ($n \geq 1$) continues. Cependant, si cette approche a ses mérites pour définir la topologie limite inductive dans la catégorie des espaces topologiques, ici elle ne donne pas de façon immédiate la structure d'espace vectoriel localement convexe. En l'absence de confusion, nous noterons plus simplement l'espace X , muni de sa topologie limite inductive, par $X = \varinjlim X_n$.

Proposition 5.2.4. Soit $X = \varinjlim X_n$, Y deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (e.v.t.l.c.). Alors pour qu'une application linéaire $T : X \rightarrow Y$ soit continue, il faut et il suffit que pour tout $n \geq 1$, $T|_{X_n}$ soit continue.

Démonstration. Ceci résulte immédiatement de la définition, car $T|_{X_n} = T \circ \iota_n$, et $\iota_n : X_n \rightarrow X$ est continue.

On peut à présent définir les courants sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 5.2.5. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . On définit

$$\mathcal{E}'_m(U) = (\mathcal{E}_m(U))', \quad \mathcal{D}'_m(U) = (\mathcal{D}_m(U))'.$$

Ce sont donc les duaux topologiques des espaces de la définition 5.2.2, où $\mathcal{D}_m(U)$ est bien muni de la topologie limite inductive de la décomposition $C_c^\infty(U, \wedge^m \mathbb{R}^n) = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_c^\infty(K_j, \wedge^m \mathbb{R}^n)$. On appellera courant de dimension m sur $U \subset \mathbb{R}^n$ un élément de $\mathcal{D}'_m(U)$.

5.3 Opérations sur les courants

5.3.1 Opérations élémentaires

On peut à présent définir le support d'un courant, le produit cartésien, la convolution, en calquant la construction sur les distributions. L'identification entre un courant à support compact et \mathcal{E}' est donc immédiate d'après la preuve dans le cadre des distributions.

Définition 5.3.1. Soit $S \in \mathcal{D}'_i(A)$, $T \in \mathcal{D}'_j(B)$, où $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, et $p : A \times B \rightarrow A$, $q : A \times B \rightarrow B$ les projections canoniques. Alors $S \times T$ est défini de manière unique comme le courant sur $\mathcal{D}'_{i+j}(A \times B)$ vérifiant la condition suivante :

$$(S \times T)(p^* \alpha \wedge q^* \beta) = \begin{cases} S(\alpha)T(\beta) & \text{si } \alpha \in \mathcal{D}'_i(A), \beta \in \mathcal{D}'_j(B) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, d'après un théorème de Weierstrass, les fonctions de la formes "produit tensoriel", sont denses, au sens de la convergence uniforme dans l'espace des fonctions continues. Plus précisément, soit K_1, K_2 deux espaces métriques compacts. Si $f \in C^0(K_1)$, $g \in C^0(K_2)$, on définit sur $K_1 \times K_2$, muni de la topologie produit, $f \otimes g$, par $f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$, si $x \in K_1, y \in K_2$. Alors si $C^0(K_1) \otimes C^0(K_2)$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $f \otimes g$, cet espace est dense dans $C^0(K_1 \times K_2)$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Par conséquent, en définissant $S \otimes T$ comme précédemment, on peut l'étendre en un courant sur $A \times B$, par prolongement par continuité.

Définition 5.3.2. Si $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, $\varphi \in \mathcal{E}_p(U)$, $p \leq m$, alors on définit $T \lrcorner \varphi \in \mathcal{D}'_{m-p}(U)$, par

$$(T \lrcorner \varphi)(\psi) = T(\varphi \wedge \psi), \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}_{m-p}(U).$$

Si $\xi : M \rightarrow \wedge_p \mathbb{R}^n$ est un p -champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n , alors on définit $T \wedge \xi \in \mathcal{D}'_{m+p}$, par

$$(T \wedge \xi)(\psi) = T(\text{int}(\xi)\psi), \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}_{m+p}(U),$$

où $\text{int}(\xi)\psi$ désigne le produit intérieur usuel. Si $m \geq 1$, on définit le bord de T , noté $\partial T \in \mathcal{D}'_{m-1}(U)$ par

$$\partial T(\psi) = T(d\psi), \quad \text{pour tout } \psi \in \mathcal{D}_{m-1}(U)$$

Si $m = 0$, $\partial T = 0$. On peut aussi dériver les courants, si $\psi = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \psi_\lambda dx_\lambda$, et $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\partial^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} T(\partial^\alpha \psi_\lambda dx_\lambda).$$

Comme on peut "tirer en arrière" les formes différentielles, on peut "pousser en avant" les courants de la manière suivante : si $f \in C^1(U, V)$, $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, et $f_{\text{supp}(T)}$ est propre, on définit $f_* T \in \mathcal{D}'_m(V)$ par

$$f_* T(\varphi) = T(f^* \varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_m(V)$.

Les choix de signes dans la définition précédente sont motivés par la formule de Stokes. Si M est une sous-variété orientée de \mathbb{R}^n (avec ou sans bord), et de dimension m , il existe une unique section lisse ξ de $\wedge^m TM \simeq M \times \mathbb{R}$, orthonormée, et compatible avec l'orientation. On associe à M le m -courant $[M]$ sur \mathbb{R}^n , défini par la formule

$$[M](\omega) = \int_M \langle \omega, \xi \rangle d\mathcal{H}^m.$$

Alors la formule de Stokes s'écrit $\partial[M] = [dM]$.

5.3.2 Homotopie des courants

Soit $f, g : U \rightarrow V$ des applications lisses, et $H : [0, 1] \times U \rightarrow V$ une homotopie lisse entre f et g , où $H(0) = f$, $H(1) = g$. On identifiera ici $[0, 1]$ avec le 1-courant $[[0, 1]]$ associé. Soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, si la restriction de H à $[0, 1] \times \text{supp } T$ est propre, alors $H_*([0, 1] \times T) \in D'_{m+1}(V)$, et

$$\begin{aligned} \partial H_*([0, 1] \times T) &= H_*(\partial([0, 1] \times T)) \\ &= H_*(\delta_1 \times T - \delta_0 \times T + (-1)^{\deg[0,1]}[0, 1] \times \partial T) \\ &= g_*T - f_*T - H_*([0, 1] \times \partial T). \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit en $g_*T - f_*T = \partial H_*([0, 1] \times T) + H_*([0, 1] \times \partial T)$. Cette formule sera encore valable dans le cas des fonctions lipschitziennes, et pourra permettre d'écrire une théorie homologique des courants satisfaisants aux axiomes d'Eilenberg-Steenrod, on renvoie à [Fed], p.464.

5.4 Classes particulières de courants

L'introduction des courants a pour but de donner un cadre adéquat aux problèmes variationnels très généraux. Ici, on s'intéresse particulièrement au problème de Plateau. La démarche générale va donc être de prouver un théorème de compacité dans un ensemble suffisamment grand, et qui possède de bonnes propriétés de passage à la limite.

Définition 5.4.1. Soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ un courant. Alors pour tout $W \subset U$, on définit la masse de T relativement à W par

$$\mathcal{M}_W(T) = \sup\{T(\omega), \omega \in \mathcal{D}_m(U), \text{supp}(\omega) \subset W, \|\omega\| \leq 1\}$$

Et la masse de T , est $\mathcal{M}(T) = \mathcal{M}_U(T)$. On dit que T minimise l'aire si $\mathcal{M}_W(T) \leq \mathcal{M}_W(S)$ pour tout $W \subset U$ relativement compact, pour tout courant S tel que $\partial T = \partial S$, et $\text{supp}(S - T)$ est compact.

Théorème 5.4.2. Soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ un courant tel que $\mathcal{M}_W(T) < \infty$ pour tout $W \subset\subset U$. Alors il existe une mesure de Radon μ_T sur U , et une application μ_T mesurable, $\xi : U \rightarrow \wedge_m \mathbb{R}^n$ telle que $\|\xi\| = 1$ μ_T -presque partout, et

$$T(\omega) = \int_U \langle \omega(x), \xi(x) \rangle d\mu_T(x)$$

Démonstration. La preuve repose sur la formule suivante :

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} (T \llcorner dx_\lambda) \wedge e_\lambda.$$

Par conséquent, pour tout $\lambda \in \Lambda(m, n)$, $T \llcorner dx_\lambda$ est une fonctionnelle continue sur $\mathcal{D}(U)$; ainsi, il existe une mesure de Radon μ_λ , et une fonction localement intégrable $f_\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, telles que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$T \llcorner dx_\lambda(\varphi) = \int_U \varphi(x) f_\lambda(x) d\mu_\lambda(x).$$

Si μ_T est la mesure de variation totale des μ_λ , et en ajoutant les fonctions $f_\lambda e_\lambda$, quitte à renormaliser cette fonction on obtient la fonction $\xi : U \rightarrow \wedge_m \mathbb{R}^n$ requise.

Un courant s'écrivant sous la forme intégrale du théorème 5.4.2 sera dit *représentable par intégration*. Nous utiliserons occasionnellement la notation $\mu_T = \|T\|$, $\xi = \vec{T}$, de telle sorte que $T = \vec{T} \wedge \|T\|$. Si $A \subset U$ est $\|T\|$ -mesurable, on définit $T \llcorner A = \vec{T} \wedge (\|T\| \llcorner A)$; on renvoie à la section 4.1.3 pour cette dernière définition.

Définition 5.4.3. Soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ ($m \geq 1$) un courant de masse localement finie, et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Alors on définit la section de T suivant f , en $t \in \mathbb{R}$, par

$$\langle T, f, t \rangle = \partial(T \llcorner \{f < t\}) - (\partial T) \llcorner \{f < t\}.$$

Il s'agit donc d'un courant de dimension $m - 1$ sur U . Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, alors on définit par récurrence si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle T, f, x \rangle = \langle \langle T, (f_1, \dots, f_{m-1}), (x_1, \dots, x_{m-1}) \rangle, f_m, x_m \rangle$$

si $f = (f_1, \dots, f_m)$, et $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Pour motiver cet exemple, regardons ce qui se passe dans le cas d'une sous-variété M de dimension m de \mathbb{R}^n . Si on suppose $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lisse, soit $t \in \mathbb{R}$, tel que f restreinte à $M \cap f^{-1}\{t\}$ soit une submersion en tout point. Alors, si par exemple $T_x M \not\subseteq T_x f^{-1}\{t\} = \text{Ker } df(x)$ pour tout $x \in M \cap f^{-1}\{t\}$, alors M et $f^{-1}\{t\}$ sont transverses donc $M \cap f^{-1}\{t\}$ est une sous-variété de dimension $m + (n - 1) - n = m - 1$, et c'est le bord de $M \cap f^{-1}(] - \infty, t])$. La formule de Stokes entraîne que la section par f de M en t est le courant associé à la sous-variété $M \cap f^{-1}\{t\}$.

Définition 5.4.4. Un courant $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ est dit rectifiable s'il existe $M \subset U$, $\xi : M \rightarrow \wedge_m(\mathbb{R}^n)$, et $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

- 1) M soit \mathcal{H}^m -rectifiable, de mesure \mathcal{H}^m localement finie,
- 2) θ est localement \mathcal{H}^m -intégrable,
- 3) ξ est \mathcal{H}^m -mesurable, et pour \mathcal{H}^m -presque tout $x \in M$, $\xi(x)$ est un m -multivecteur complètement décomposable de $T_x M$.

Et enfin, T s'exprime de la manière suivante :

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \theta(x) d\mathcal{H}^m(x)$$

pour tout $\omega \in \mathcal{D}_m(U)$. Si de plus $\theta : M \rightarrow \mathbb{N}$, T est dit rectifiable entier. Nous noterons $\mathcal{R}_m(U)$ l'ensemble des courants rectifiables à coefficients entiers, qu'on appellera plus brièvement courants entiers.

On peut donner une motivation simple à cette définition. Les ensembles rectifiables de dimension entière peuvent être décomposés comme une union dénombrable de variétés C^1 , ainsi que d'un ensemble de mesure \mathcal{H}^m nulle (voir par exemple [Kra08], p. 148). Si on s'intéresse au problème de Plateau, on va justement se placer dans un cadre où on autorise à priori des singularités pour les solutions, afin d'obtenir des résultats d'existence. Cette catégorie de courant est stable par combinaison à coefficients entiers (positifs), par produit. Ceci permet par exemple d'étudier le problème de Plateau pour des surfaces bordant plusieurs courbes données.

5.5 Théorème de compacité

Théorème 5.5.1 (Théorème de compacité). *Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'_m(U)$ une suite de courants entiers tels que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (\mathcal{M}(T_k) + \mathcal{M}(\partial T_k)) < \infty$$

Alors il existe un courant entier $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, et une sous-suite $(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $T_{\varphi(k)} \rightarrow T$ quand $k \rightarrow \infty$.

Le principe de la preuve est de se ramener à la dimension 0.

Lemme 5.5.2 (Initialisation). *Sous les notations de 5.5.1, le théorème est vrai pour $m = 0$.*

Démonstration. Un courant entier de dimension 0 est une combinaison linéaire à coefficients entiers de masses de Dirac. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, quitte à extraire, il existe $T \in \mathcal{D}'(U)$, tel que $T_k \rightarrow T$ dans $\mathcal{D}'(U)$. Notons

$$N = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}(T_k) < \infty.$$

Soit $r > 0$, et

$$T_k \llcorner B(0, r) = \sum_{j=0}^N a_j^k \delta_{x_j^k}$$

Où $(a_j^k)_{0 \leq j \leq N} \subset \mathbb{Z}$, $|a_j^k| \leq M$, $(x_j^k) \subset B(0, r)$. Alors quitte à extraire, on suppose que $a_j^k \rightarrow a_j \in \mathbb{Z}$, et $x_j^k \rightarrow x_j \in B(0, r)$. Par conséquent,

$$T \llcorner B(0, r) = \sum_{j=0}^N a_j \delta_{x_j}.$$

Enfin, $\mathcal{M}(T) \leq N < \infty$, donc pour $r > 0$ suffisamment grand, $T = T \llcorner B(0, r)$, ce qui conclut la preuve.

5.5.1 Courants de dimension 0

Comme la preuve du théorème de compacité revient à étudier des courants de dimension 0, nous allons développer quelques outils pour montrer le théorème de compacité.

Remarquons que si $T \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$, alors

$$T = \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} (T \llcorner dx_\lambda) \wedge e_\lambda.$$

d'après le théorème 5.4.2. Par conséquent, si $\omega \in D_m(U)$, $\omega_\lambda = \omega(e_\lambda)$, pour $\lambda \in \Lambda(m, n)$, $p_\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(m)})$, alors

$$\begin{aligned} T(\omega) &= \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} p_{\lambda*}(T \llcorner \omega_\lambda)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda(m, n)} \int_{\mathbb{R}^m} \langle T, p_{\lambda, x} \rangle (\omega_\lambda) d\mathcal{L}^m(x). \end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, qui nécessiterait d'introduire la formule de la co-aire (dont la preuve est analogue à celle de la formule de l'aire), on renvoie à [Kra08].

Théorème 5.5.3 (Critère sectionnel). *Un courant $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ est entier si et seulement si $\langle T, p_{\lambda, x} \rangle \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^m)$ pour tous $\lambda \in \Lambda(m, n)$, $x \in \mathbb{R}^m$.*

Théorème 5.5.4 (Critère mesurable). *Soit $T \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$ un courant satisfaisant les trois conditions suivantes :*

- 1) $\mathcal{M}(T) + \mathcal{M}(\partial T) < \infty$
- 2) $\|T\| = \mathcal{H}^m \llcorner \theta$, où $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{N}$ est \mathcal{H}^m -mesurable.
- 3) $\{x \in \mathbb{R}^n, \theta(x) > 0\}$ est m -rectifiable.

Alors T est un courant entier.

5.5.2 Preuve du critère mesurable

Dans ce paragraphe, nous allons développer quelques notions indépendamment dignes d'intérêt, pour être en mesure de prouver ce critère. La preuve repose sur des approximations par des courants lisses, qui fonctionnent sur le même principe de convolution que pour des fonctions ou des distributions.

Définition 5.5.5. Soit $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une approximation de δ_0 (voir [Fed69] p.223 et p.346 par exemple). Alors si $T \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$, on définit $T_\varepsilon \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$ par

$$T_\varepsilon(\varphi) = T(\rho_\varepsilon * \varphi)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$.

Lemme 5.5.6. *Si $T \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$, alors :*

- 1) $T_\varepsilon \rightarrow T$ faiblement quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- 2) $D^\alpha T_\varepsilon = (D^\alpha T)_\varepsilon$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
- 3) Pour tout $\varepsilon > 0$, T_ε s'identifie à la m -forme $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{E}_m(\mathbb{R}^n)$, telle que $\alpha_\varepsilon(x) \cdot v = T_y(\rho_\varepsilon(y - x)v)$, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \wedge^m \mathbb{R}^n$.

4) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert connexe, et $\text{supp } D_j T \subset \mathbb{R}^n \setminus U$, pour $1 \leq j \leq n$, alors il existe $v \in \wedge_m \mathbb{R}^n$ tel que

$$T(\varphi) = \int_U \langle \varphi(x), v \rangle d\mathcal{L}^n(x)$$

pour tout $\varphi \in D_m(\mathbb{R}^n)$, tel que $\text{supp } \varphi \subset U$.

Démonstration. Les points 1) et 2) sont des conséquences faciles des définitions, et pour le point 3), $D_j \rho_\varepsilon(y-x)v$ étant continue en x, y, v , pour tout $1 \leq j \leq n$, si $\varphi \in \mathcal{D}_m(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \alpha_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} T_y(\rho_\varepsilon(y-x)\varphi(x)) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= T_y \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(y-x)\varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) = T(\rho_\varepsilon * \varphi) = T_\varepsilon(\varphi) \end{aligned}$$

L'interversion est \int et T étant justifiée par des sommes de Riemann, comme dans le cas de la preuve pour les distributions d'interversion du crochet et de l'intégrale, on renvoie à [Fed69], p. 348. Pour la preuve du 4), on peut supposer que U est relativement compact et que $\text{supp } T$ est compact. Soit $x \in U$, et $U_\varepsilon(x)$ la composante connexe de x dans $U \cap \{y \in \mathbb{R}^n, d(y, \mathbb{R}^n \setminus U) > \varepsilon\}$. En appliquant le point 3), on a $D_j \alpha_\varepsilon(y) = 0$ pour tout $y \in U_\varepsilon$, $1 \leq j \leq n$, donc α_ε envoie U_ε sur un seul $v_\varepsilon \in \wedge^m \mathbb{R}^n$, et

$$T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), v_\varepsilon \rangle d\mathcal{L}^n(x),$$

si $\text{supp } \varphi \subset U$. De plus, pour tout $w \in \wedge^m \mathbb{R}^n$, et tout $\delta > 0$,

$$\langle v_\delta, w \rangle = \alpha_\varepsilon(x) \cdot w = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \rho_\delta(y-x)w, v_\varepsilon \rangle d\mathcal{L}^n(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle v_\varepsilon, w \rangle$$

donc v_ε est indépendant de $\varepsilon > 0$.

Théorème 5.5.7 (Théorème de constance). *Soit $T \in \mathcal{D}'_n(U)$, $\partial T = 0$, et U est un ouvert connexe de \mathbb{R}^n alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que $T = a(\mathbf{E}^n \llcorner U)$, où $\mathbf{E}^n = \mathcal{L}^n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.*

Démonstration. En premier lieu, $\partial T \wedge e_j = (-1)^n D_j T$. D'après le point 4) du lemme, appliqué au cas $m = n$, pour tout $v \in \wedge^n \mathbb{R}^n$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle v, w \rangle = a \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, w \rangle \quad \text{pour tout } w \in \wedge^n \mathbb{R}^n$$

Par conséquent, si A est un ouvert connexe de U , et $\text{supp } \partial T \subset U \Delta A$, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{supp } (T - c(\mathbf{E}^n \llcorner U)) \subset U \Delta A.$$

En appliquant le résultat à $A = U$, la preuve du théorème est achevée.

Corollaire 5.5.8. *Si $T \in D'_m(\mathbb{R}^n)$, et $\partial T = 0$, $\text{supp } T \subset V$, où V est un sous-espace vectoriel de dimension m de \mathbb{R}^n , alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $T = cV$, i.e. $T = c(\mathcal{H}^m \llcorner V)v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$, où (v_1, \dots, v_m) est une base orthonormale de V .*

Démonstration. (du critère mesurable) La condition 1) implique que T est représentable par intégration, on a donc si $M = \{x \in \mathbb{R}^n, \theta(x) > 0\}$

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle d\mathcal{H}^m(x).$$

De plus, M admet un espace tangent en \mathcal{H}^m presque tout point, et d'après le théorème 5.5.13, comme $\|\partial T\|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}(\partial T) < \infty$ par

$$\mathbf{Max}_{\|\partial T\|}(x) = \sup_{r>0} \frac{\|\partial T\|(B(x, r))}{\alpha(n)r^n} < \infty$$

pour \mathcal{H}^m -presque tout $x \in M$ donc

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|\partial T\|(B(x, r))}{r^{n-1}} = 0$$

pour \mathcal{H}^m -presque tout $x \in M$. Si $x \in M$ vérifie cette dernière égalité, alors si $f_\varepsilon(y) = \frac{y-x}{\varepsilon}$, considérons les suites $f_{\varepsilon*}T$ et $f_{\varepsilon*}\partial T$, pour $\varepsilon > 0$; si on choisit une suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0, ces deux suites de courants ont une masse bornée, donc quitte à extraire, ces suites convergent respectivement vers S et ∂S . De plus, $\vec{T}(x) = \vec{S}(x)$, et $\partial S = 0$, $\text{supp } S \subset T_x M$. Le théorème de constance 5.5.7 nous dit donc que $\vec{T}(x)$ a la forme voulue.

Définition 5.5.9. Soit (E, d) un espace métrique, on note d_H la distance de Hausdorff sur les sous-ensembles compacts de E , définie par :

$$d_H = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\}$$

si $A, B \subset E$ sont compacts. On introduit la distance sur les courants de dimension 0, qu'on appelle métrique plate

$$d_P(S, T) = \inf\{\mathcal{M}(A) + \mathcal{M}(B), S - T = A + \partial B\}.$$

Définition 5.5.10. Une fonction mesurable $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^n)$ est à variation bornée si pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne la fonction

$$x \mapsto f(x)(\varphi)$$

est à variation bornée, et

$$\|Df\| = \sup_{\varphi \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}^n)} \|Df(\varphi)\| < \infty.$$

où $\text{Lip}_1(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitzienne, } \|\varphi\|_\infty \leq 1, \|D\varphi\|_\infty \leq 1\}$.

Définition 5.5.11. On définit pour une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^n)$ à variation bornée la mesure de variation totale $\|Df\|$, par

$$\begin{aligned} \text{Var}_f(A) &= \sup_{\varphi \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}^n)} \int_A |Df(x)(\varphi)| d\mathcal{L}^m(x) \\ &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} u(x)(\varphi) \text{div } \psi(x) d\mathcal{L}^m(x), \psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \text{ lipschitzienne, } \text{supp } \psi \subset A, \varphi \in \text{Lip}_1(\mathbb{R}^n) \right\}. \end{aligned}$$

pour tout $A \subset \mathbb{R}^m$.

Lemme 5.5.12. Si $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ est un courant normal, et $p_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(m)})$, pour $\lambda \in \Lambda(m, n)$, alors $u_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{R}_0$, $x \mapsto \langle T, p_\lambda, x \rangle$ est à variation bornée.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\text{supp}(\psi) \subset V$, et $\overline{dx_j} = dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_m$ alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(x)(\varphi) \partial_j \psi_j(x) d\mathcal{L}^m(x) \right| &= |(T \llcorner (\partial_j \psi_j) \circ p_\lambda) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m(\varphi)| \\ &= |T(\varphi d(\psi \circ p_\lambda) \overline{dx_j})| \\ &= |\partial T(\varphi(\psi \circ p_\lambda) \overline{dx_j}) - T(\psi \circ p_\lambda d\varphi \wedge \overline{dx_j})| \\ &\leq \|\partial T\|(V) + \|T\|(V). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit que $\|Du_\lambda(\varphi)\| \leq m(\|\partial T\|(V) + \|T\|(V))$.

5.5.3 Inégalités maximales

Énonçons un lemme sur la fonction maximale qui nous sera utile par la suite, et que l'on trouvera dans [Duq] th. 4.6.6 (dont on n'utilisera seulement une partie), dont la preuve se base sur le lemme de recouvrement de Vitali.

Théorème 5.5.13. *Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ une mesure signée Borel-régulière. Alors pour tout $a > 0$,*

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n, \mathbf{Max}_\mu(x) > a\}) \leq \frac{3^n \mu(\mathbb{R}^n)}{a}.$$

Proposition 5.5.14. *Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{R}(\mathbb{R}^n)$ à variation bornée. Alors il existe un ensemble A de \mathcal{L}^m mesure nulle tel que*

$$M = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m \setminus N} \text{supp } f(x)$$

soit m -rectifiable.

Démonstration. En premier lieu, $\mathcal{L}^m(\{x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{Max}_{\|Du\|}(x) = \infty\}) = 0$. De plus d'après la proposition 4.4.8,

$$d_P(f(x), f(y)) \leq 2^m (\mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(x) + \mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(y)) |x - y|$$

pour \mathcal{L}^m presque tous $x, y \in \mathbb{R}^m$, car $f(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^m)$, pour tout $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne, donc quitte à choisir un sous-ensemble dénombrable dense \mathcal{B} dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, et à considérer $B \subset \mathbb{R}^m$ la réunion des ensembles de points où $f(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}$, on a $\mathcal{L}^m(B) = 0$, donc nous sommes amenés à poser $A = \{x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(x) = \infty\} \cup B$. Alors $\mathcal{L}^m(A) = 0$. De plus, on vérifie facilement que $M = \bigcup_{\delta, \varepsilon > 0} M_{\delta, \varepsilon}$, où (B' désigne la boule privée de son centre)

$$M_{\delta, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n, \mu_{f(y)}(\{x\}) \geq \varepsilon \text{ pour un } y \in N_{\delta, \varepsilon}\}$$

$$N_{\delta, \varepsilon} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \setminus A, \mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(y) \leq \frac{1}{2\varepsilon} \text{ et } \mu_{f(y)}(\{x\}) \geq \varepsilon \Rightarrow \mu_{f(y)}(B'(x, 3\delta)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}.$$

Il suffit donc de vérifier que $M_{\delta, \varepsilon}$ est rectifiable, et le résultat s'ensuivra en prenant un sous recouvrement dénombrable des $(M_{\delta, \varepsilon})_{\delta, \varepsilon > 0}$ de réunion M . Soit $A \subset M_{\delta, \varepsilon}$, avec $\text{diam } A \leq \delta$, montrons que

$$|x_1 - x_2| \leq 3 \frac{2^m}{\varepsilon^2} (\delta + 1) |y_1 - y_2|$$

pour tous $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in N_{\delta, \varepsilon}$ tels que $\mu_{f(y_j)}(x_j) \geq \varepsilon$, pour $j = 1, 2$. Soit $x, x' \in A$, $d = |x - x'| \leq \delta$, et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\varphi(y) = \begin{cases} |x - y| & \text{si } |x - y| < \delta \\ 0 & \text{si } |x - y| > 2\delta \end{cases}$$

et $\|\varphi\|_\infty \leq \delta$, $\|D\varphi\|_\infty \leq 1$. Alors

$$f(y)(\varphi) \leq \varphi(x) \mu_{f(y)}(\{x\}) + \mu_{f(y)}(B'(x, 2\delta)) d \leq \frac{d\varepsilon}{3}$$

et

$$f(y')(\varphi) \geq \mu_{f(y')}(\{x\}) \frac{\varphi(x')}{d} - \mu_{f(y')}(\{x\}) d \geq d\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{3} = \frac{2d\varepsilon}{3}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{3} |x - x'| &\leq |f(y)(\varphi) - f(y')(\varphi)| \\ &\leq \sup\{\|\varphi\|_\infty, \|D\varphi\|_\infty\} d_P(f(y), f(y')) \\ &\leq (\delta + 1) 2^m (\mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(y) + \mathbf{Max}_{\text{Var}_f}(y')) |y - y'| \\ &\leq (\delta + 1) \frac{2^m}{\varepsilon} |y - y'|. \end{aligned}$$

De plus d'après le théorème 5.5.4, pour presque tout $y \in N_{\delta, \varepsilon}$, il existe au plus un $x = g(y) \in A$. Et g est lipschitzienne sur son domaine. Le résultat s'ensuit. En effet, la masse est faiblement semi-continue inférieurement; autrement dit, si $T_k \rightarrow T$, alors $\mathcal{M}(T) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}(T_k)$.

5.5.4 Fin de la preuve

Démonstration. (du critère sectionnel) Par le critère mesurable,

$$\mu_{T \llcorner dx_\lambda} = \int_{\mathbb{R}^m} \mu_{\langle T, p_\lambda, x \rangle} d\mathcal{L}^m(x)$$

a son support sur un ensemble rectifiable M_λ correspondant à $f_\lambda = \langle T, p_\lambda, \cdot \rangle$. Par conséquent, $\mu_T \leq \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} \mu_{T \llcorner dx_\lambda}$ a son support inclus dans $\bigcup_{\lambda \in \Lambda(m,n)} M_\lambda$. Par le critère mesurable à nouveau, T est entier.

Démonstration. (fin de la preuve du Théorème de compacité) D'après le théorème de Banach-Alaoglu, soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ tel que $T_k \rightharpoonup T$ quand $k \rightarrow \infty$ (quitte à extraire). Alors pour \mathcal{L}^m presque tout $x \in U$ les sections de $\langle T_k, p_\lambda, x \rangle$, convergent vers celles de $T, \langle T, p_\lambda, x \rangle$. Et comme elles sont de dimension 0, on en déduit qu'elles sont entières par le cas $m = 0$, et par le critère sectionnel, on en déduit que T est entier.

5.5.5 Existence pour le problème de Plateau

Théorème 5.5.15 (Problème de Plateau). *Soit $S \in \mathcal{D}'_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ un courant entier à support compact, tel que $\partial S = 0$, et $\mathcal{M}(S) < \infty$. Alors il existe un courant entier $T \in \mathcal{D}'_m(\mathbb{R}^n)$ à support compact minimisant l'aire tel que $\partial T = S$.*

Démonstration. Soit $h(t, x) = tx$, et $T_1 = h_*([0, 1] \times S)$ est entier et $\partial T_1 = S$, d'après la formule d'homotopie des courants, et $\mathcal{M}(T_1) \leq \mathcal{M}(S)$. Si $\text{supp } S \subset B(0, R)$, où $R > 0$, alors soit

$$\rho(x) = \min\left(1, \frac{R}{|x|}\right) x.$$

Si $\partial T = S$, alors $\partial \rho_* T = S$, et $\mathcal{M}(\rho_* T) \leq \mathcal{M}(T)$. Par conséquent, on peut choisir une suite minimisante à support dans $B(0, R)$, et de masse majorée par $\mathcal{M}(S)$. Le théorème de compacité nous donne le courant voulu. De plus la preuve permet de supposer $\text{supp } T$ compact.

Théorème 5.5.16 (Differential form argument). *Soit $T \in \mathcal{D}'_m(U)$, tel que $\mathcal{M}(T) < \infty$. S'il existe une $(m-1)$ -forme φ telle que $\mathcal{M}(T) = T(d\varphi)$, et $\|d\varphi\| \leq 1$, alors $\mathcal{M}(T) \leq \mathcal{M}(S)$, pour tout $S \in \mathcal{D}'_m(U)$ tel que $\partial S = \partial T$.*

Démonstration.

$$\mathcal{M}(T) = T(d\varphi) = \partial T(\varphi) = \partial S(\varphi) = S(d\varphi) \leq \mathcal{M}(S).$$

Théorème 5.5.17. *Une surface $M = \{(x, f(x)), x \in U \subset \mathbb{R}^n\}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est minimale si et seulement si elle vérifie l'équation dite des surfaces minimales :*

$$\text{div} \frac{Df}{\sqrt{1 + |Df|^2}} = 0$$

En reprenant les notations de l'introduction, Si $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, et $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mathcal{A}(t) = \int_U \sqrt{1 + |D(f + tg)(x)|^2} d\mathcal{L}^n(x).$$

Alors, $f + tg$ satisfait encore les conditions au bord. Par conséquent, \mathcal{A} admet un minimum local en 0. D'autre part, d'après le théorème de convergence dominée, \mathcal{A} est dérivable en 0, et on a :

$$\mathcal{A}'(t) = \int_U \frac{Dg(x) \cdot (Df(x) + tDg(x))}{\sqrt{1 + |D(f + tg)(x)|^2}} d\mathcal{L}^n(x).$$

Ce qui conduit en $t = 0$ à

$$\mathcal{A}'(0) = \int_U \frac{Dg(x) \cdot Df(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}} d\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

On applique à présent la formule de Gauss-Green : si $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_U \operatorname{div} \varphi(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial U} \varphi(x) \cdot \nu(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

si ∂U est un bord de Lipschitz, ν la normale extérieure à ∂U . D'autre part, si on se donne $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$, on a la formule immédiate suivante :

$$\operatorname{div}(g\varphi) = g \operatorname{div} \varphi + Dg \cdot \varphi.$$

Enfin, comme $g|_{\partial U} = 0$, il vient

$$A'(0) = - \int_U \operatorname{div} \frac{Df(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}} g(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0$$

d'où la nullité du membre de gauche de l'intégrale, l'égalité étant vraie pour tout $g \in C_c^1(U)$.

Avant d'énoncer notre dernier théorème, fixons quelques notations.

Définition 5.5.18. Soit ξ un p champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n (i.e. une application $\mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_p \mathbb{R}^n$). On définit la $(n-p)$ -forme différentielle sur \mathbb{R}^n $\mathbf{D}_p \xi$ par $\mathbf{D}_p \xi = \operatorname{int} \xi(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$. On définit ensuite le $(p-1)$ -champ de vecteurs $\operatorname{div} \xi$ par

$$\operatorname{div} \xi = \sum_{j=1}^n D_j \xi \llcorner dx_j$$

où $\llcorner : \wedge_p \mathbb{R}^n \times \wedge^1 \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_{p-1} \mathbb{R}^n \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^n$ est caractérisé par $\langle \alpha, \xi \llcorner \beta \rangle = \langle \alpha \wedge \beta, \xi \rangle$ si $\alpha \in \wedge^p \mathbb{R}^n$, $\beta \in \wedge^{p-1} \mathbb{R}^n$.

Remarque 5.5.19. Une définition sans coordonnées peut être donnée de la divergence : $\operatorname{div} \xi(x) = g \circ f(D\xi(x))$ en fixant un isomorphisme $f : \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \wedge_p \mathbb{R}^n) \rightarrow \wedge_p \mathbb{R}^n \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^n$, et en prenant $g : \wedge_p \mathbb{R}^n \otimes \wedge^1 \mathbb{R}^n \rightarrow \wedge_{p-1} \mathbb{R}^n$ l'application linéaire induite par le produit intérieur.

Lemme 5.5.20. Si ξ est un p champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n , alors

$$d(\mathbf{D}_p \xi) = (-1)^{n-p} \mathbf{D}_{p-1}(\operatorname{div} \xi).$$

Pour une discussion approfondie sur ces points, voir [Fed69], p.21-23 et 351-354.

Théorème 5.5.21. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$, alors $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 vérifie l'équation des surfaces minimales si et seulement si le courant $T = F_*(\mathbf{E}^n \llcorner U)$ minimise l'aire sur $U \times \mathbb{R}$, où $F(x) = (x, f(x))$, et $\mathbf{E}^n = \mathcal{L}^n \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \mathcal{D}'_n(\mathbb{R}^n)$ (autrement dit, $\mathbf{E}^n = [\mathbb{R}^n]$).

En effet, si T minimise l'aire, alors d'après le théorème précédent, f vérifie l'équation des surfaces minimales, car $\|T\| = F_*(\mathcal{L}^n \llcorner (1 + |Df|^2)^{\frac{1}{2}})$, d'après la formule de l'aire. Réciproquement, soit

$$\nu(x, y) = \frac{(-D_1 f(x), \dots, -D_n f(x), 1)}{|DF(x)|}$$

pour $x \in U$, $y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\operatorname{div} \nu(x, y) = - \operatorname{div} \frac{Df(x)}{\sqrt{1 + |Df(x)|^2}},$$

et $D_1 F(x) \wedge \cdots \wedge D_n F(x) \wedge \nu(x, y) = |DF(x)| e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+1}$. De plus,

$$\vec{T}(x, y) \wedge \nu(x, y) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n+1}, \quad \langle \vec{T}(x, y), \mathbf{D}_1 \nu(x, y) \rangle = 1.$$

Quitte à supposer U simplement connexe, ce que l'on peut faire, car l'équation est locale, comme $\operatorname{div} \nu = 0$, $d(\mathbf{D}_1 \nu) = 0$, donc $\mathbf{D}_1 \nu$ est exacte, et $\mathbf{D}_1 \nu$ est une forme différentielle de degré $n-1$ sur $U \times \mathbb{R}$, avec $|\mathbf{D}_1 \nu| = |\nu| = 1$ et

$$(T \llcorner K) \mathbf{D}_1 \nu = \int_K \langle \vec{T}, \nu \rangle d\|T\| = \mathcal{M}(T \llcorner K)$$

pour tout compact $K \subset U$. L'argument des formes différentielles nous donne le résultat.

5.6 Perspectives

Pour mener à bien le programme variationnel, il s'agit de montrer à présent la régularité des courants entiers minimisant l'aire. Cependant, ces résultats sont toujours longs et techniques, et dépassent de loin le cadre de ce mémoire. Nous nous contentons donc de dresser un bref panorama des résultats prouvés.

Définition 5.6.1. On définit le support régulier de $T \in \mathcal{D}'_m(U)$ par

$$\text{reg}(T) = \{x \in \text{supp } T, \text{ il existe un voisinage } U_x \text{ de } x, \text{ tel que } \text{supp } T \cap U_x \text{ soit une sous-variété de } \mathbb{R}^n\}$$

et le support singulier par

$$\text{sing}(T) = \text{supp } T \setminus \text{reg}(T).$$

On a le résultat suivant, en codimension 1 :

Théorème 5.6.2. *Si $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est ouvert, et T un courant entier minimisant localement l'aire, alors $\text{sing}(T) = 0$ si $n \leq 6$, est localement fini si $n = 7$, et $\mathcal{H}^{n-7+\alpha}(\text{sing}(T)) = 0$ pour tout $\alpha > 0$ si $n > 7$.*

Le résultat est optimal, car le cône de dimension 7 $\{x \in \mathbb{R}^8, x_1^2 + \dots + x_4^2 = x_5^2 + \dots + x_8^2\}$ minimise l'aire, comme l'ont montré Bombieri-De Giorgi-Giusti dans [BdGG69].

En codimension plus grande que 1, Almgren a montré dans un article fleuve de près de mille pages le résultat suivant :

Théorème 5.6.3. *Tout m -courant entier, minimisant l'aire dans \mathbb{R}^n ($m \leq n$) est l'intérieur d'une sous-variété immergée, à l'exception d'un ensemble singulier de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $m - 2$.*

De plus, un étudiant de Almgren, Chang (voir [Cha88]), a affiné ce résultat pour les courants de dimension deux :

Théorème 5.6.4. *Un courant entier minimisant la masse de dimension 2 a un support singulier composé de points isolés.*

On peut donc dire que les surface minimales existent en toute dimension, à un ensemble de points singuliers isolés près. Enfin, le problème de régularité au bord en codimension 1 a été complètement résolu par Hardt, et Simon [HS86] :

Théorème 5.6.5. *Soit $T \in \mathcal{D}'_n(\mathbb{R}^{n+1})$ un courant entier minimisant l'aire, ayant pour bord une sous-variété S de classe $C^{1,\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$). Alors au voisinage de S , le support de T est une variété de classe C^1 à bord.*

Enfin, mentionnons qu'une partie substantielle de la théorie a été généralisée non seulement aux variétés, mais également aux espaces métriques, grâce aux travaux (entre autres) de L. Ambrosio et B. Kirchheim [AK00].

Bibliographie

- [AK00] L. Ambrosio and B. Kirchheim. *Currents in metric spaces*. Acta Mathematica, 2000.
- [BdGG69] E. Bombieri, E. de Giorgi, and E. Giusti. *Minimal cones and Bernstein problem*. Inventiones Mathematicae, 1969.
- [BG12] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie Différentielle : variétés, courbes et surfaces*. Presses Universitaires de France, 2012.
- [Car61] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques à une ou plusieurs variables*. Hermann, 1961.
- [Cha88] S. X.-D. Chang. *Two-dimensional area minimizing currents are classical minimal surfaces*. J. Amer. Math. Soc.,1, 1988.
- [dC76] M. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentia-Hall, 1976.
- [DHKW91] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Kürster, and O. Wohlarb. *Minimal Surfaces I*. Springer-Verlag, 1991.
- [DK81] D. M. Deturck and J. L. Kazdan. *Some regularity theorems on Riemannian geometry*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série, 1981.
- [Duq] T. Duquesne. *Integration*. Notes de cours d'Intégration.
- [EG92] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in advanced mathematics, 1992.
- [Fal86] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1986.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, 1969.
- [For81] O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*. Springer-Verlag, 1981.
- [HS86] R. Hardt and L. Simon. *Seminar on Geometric Measure Theory*. Birkhäuser, 1986.
- [Kar03] H. Karcher. *Introduction to the Complex Analysis of Minimal Surfaces*. Lectures given at the NTCS, Taiwan, 2003.
- [Kor16] A. Korn. *Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen*. Schwarz Abhandlungen, 1916.
- [Kra08] S.G. Krantz. *Geometric Integration Theory*. Cornerstones, 2008.
- [Lic16] L. Lichtenstein. *Zur Theorie der konformen Abbildung*. Bull. Internat. Acad. Sci. Cracovie. Cl. Sci. Math. Nat. Sér. A., 1916.
- [LY02] F. Lin and X. Yang. *Geometric Measure Theory : an introduction*. Science Press and International Press, 2002.
- [Mat95] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces : fractals and rectifiability*. Cambridge studies in advances mathematics, 1995.
- [Oss86] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover, 1986.
- [SS03] E. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton University Press, 2003.