Systèmes dynamiques - FIMFA - 2009-10

Examen

25 janvier 2010 — 9h30-12h30
Documents personnels autorisés (pas de livres, ni ordinateurs, ni télphones portables)

Définitions: La *transformation de Gauss* est l'application $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ définie par

$$\varphi(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\} = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right] \, , \, x \neq 0 \, ; \, \varphi(0) = 0 \, .$$

(Ici, la partie entière $[y]$ d'un réel $y \geq 1$ est le plus grand entier inférieur ou égal à y.)

La *fraction continue* de $x \in (0,1)$ est la suite d'entiers strictement positifs $n_j = n_j(x)$, définis pour tous les $j \geq 1$ tels que $\varphi^i(x) \neq 0$ pour tous les $0 \leq i \leq j-1$, par

$$n_j(x) = \left[\frac{1}{\varphi^{j-1}(x)} \right] \, .$$

La suite est finie si x et seulement si est rationnel, et on a alors

$$x = \frac{1}{n_1(x) + \frac{1}{n_2(x) + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{n_{P(x)}(x)}}}} \, ,$$

où $P(x)$ est le plus petit $j \geq 1$ tel que $\varphi^j(x) = 0$.

I. Théorème de récurrence de Poincaré

(1) Montrer que Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$ a la propriété suivante: Pour tout entier $m \geq 1$, la suite $x_1 \dots x_m$ des m premiers chiffres du développement $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ de x en base 10 apparaît infiniment souvent dans le développement (c'est-à-dire il existe une suite $k_j \to \infty$ avec $x_{k_j+\ell} = x_\ell$ pour $\ell = 1, \dots, m$). Trouver un exemple de $x \in [0,1]$, irrationnel, qui ne satisfait pas cette propriété.

(2) Montrer que la mesure μ_0 absolument continue par rapport à Lebesgue sur $[0,1]$ de densité

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x}$$

est une mesure de probabilité invariante par la transformation de Gauss. (On utilisera sans démonstration le fait que les intervalles de $[0,1]$ engendrent les boréliens et qu'il suffit de vérifier l'invariance sur une sous-algèbre qui engendre les boréliens.)

(3) Montrer que Lebesgue presque tout $x \in [0,1]$ a la propriété suivante: Pour tout entier $m \geq 1$, la suite $n_1(x) \dots n_m(x)$ des m premiers chiffres de la fraction continue de x apparaît infiniment souvent dans la fraction continue (c'est-à-dire, il existe une suite $k_j \to \infty$ avec $n_{k_j+\ell}(x) = n_\ell(x)$ pour $\ell = 1, \dots, m$).

II. Ergodicité

(1) Donner un exemple de mesure de probabilité sur $[0,1]$ invariante ergodique mais non mélangeante pour la transformation de Gauss.

(2) Pour $x \in (0,1)$ irrationnel et $k \geq 1$ un entier, on pose pour tout entier $m \geq 1$

$$\tau_m(x,k) = \frac{1}{m} \# \{1 \leq j \leq m \mid n_j(x) = k\} .$$

(C'est la proportion des m premiers chiffres de la fraction continue qui sont égaux à k.) On admet sans démonstration que la mesure μ_0 de I(2) est ergodique pour φ. En déduire que pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$\lim_{m \to \infty} \tau_m(x,k) = \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}, \forall k \geq 1 .$$

Trouver $x \in (0,1)$ irrationnel tel que la propritété ci-dessus soit violée pour tout $k \geq 1$.

III. Entropie de Kolmogorov de la transformation de Gauss

On dénote par $h_{\mu_0}(\varphi)$ l'entropie de Kolmogorov de la mesure invariante μ_0 de I(2) pour la transformation de Gauss φ. On admet sans démonstration que

$$h_{\mu_0}(\varphi) = \int_0^1 \log |\varphi'| \, d\mu_0 .$$

(1) Calculer la valeur exacte de $h_{\mu_0}(\varphi)$.

(2) Montrer que pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$h_{\mu_0}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |(\varphi^n)'(x)| .$$

(3) Montrer qu'il existe $H > 0$ tel que pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$ on ait

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{j} \log \left| x - \cfrac{1}{n_1(x) + \cfrac{1}{n_2(x) + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{n_j(x)}}}} \right| = -H .$$

Calculer H.

Indication pour (3): Utiliser le théorème de Shannon-McMillan-Breiman.

IV. Mélange et vitesse de convergence des quotients partiels des fractions continues

En 1812, Gauss a affirmé (sans preuve) dans une lettre à Laplace que si x est uniformément distribué dans $(0,1)$ alors, pour tout $y \in [0,1]$, la probabilité que

$$R_m(x) := \frac{1}{n_m(x) + \frac{1}{n_{m+1}(x) + \frac{1}{n_{m+2}(x) + \cdots}}}$$

soit strictement inférieur à y, autrement dit

$$\text{Lebesgue}(\{x \in (0,1) \mid R_m(x) < y\})$$

converge, lorsque $m \to \infty$, vers

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \log(1+y)$$

(1) Montrer que Gauss avait raison.
Indication: Montrer d'une part que $R_m(x) = \varphi^{m-1}(x)$ et d'autre part que pour tout borélien $E \subset [0,1]$ on a

$$\mu_0(E) = \lim_{m \to \infty} \text{Lebesgue}(\varphi^{-m}(E)),$$

où μ_0 est la mesure de I(2). En déduire le résultat. (Pour prouver la deuxième affirmation, on admettra sans démonstration que μ_0 est mélangeante pour φ et on démontrera d'abord une version de la propriété de mélange pour des observables $\psi_1 \in L^1(d\mu_0)$ et $\psi_2 \in L^\infty(d\mu_0)$. On appliquera ce résultat à ψ_2 une dérivée de Radon-Nikodym bien choisie.)

(2) Question subsidiaire: que peut-on dire de la vitesse de convergence? (Une stratégie de preuve suffit.)