Examen du 19 janvier 2007, FIMFA, Systèmes Dynamiques, Durée 3h

Exercice I Soit $m \geq 2$ un entier. On note r_n le nombre d'entiers $k \in \{1, \dots, n\}$ pour lesquels le premier chiffre du développement en base 10 de m^k est un 9 (exemple : **9**743). Démontrer que r_n/n admet une limite $l(m)$ et préciser la dépendance de $l(m)$ par rapport à m.

Exercice II Soit $f : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ défini par $f(x) = x + \frac{1}{5}\sin^2(\pi x)$.

1) Démontrer que f est un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation.

2) Calculer le nombre de rotation de f.

3) Démontrer que f est uniquement ergodique. Le difféomorphisme f est-il minimal ? Topologiquement mélangeant ?

4) Pour $\alpha \in \mathbf{R}$ soit g_α le difféomorphisme de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, $g_\alpha : x \mapsto f(x) + \alpha$. On suppose que g_α n'a pas de point périodique. Le difféomorphisme g_α est-il uniquement ergodique ? Minimal ? Topologiquement mélangeant ?

Exercice III On note A l'automorphisme du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ défini par $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Soient $P_n = \{x \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 : A^n x = x\}$ l'ensemble des points n-périodiques de A et N_n son cardinal. Définissons la mesure μ_n par

$$\mu_n = \frac{1}{N_n}\sum_{x \in P_n} \delta_x.$$

On se propose de démontrer que la suite de mesure μ_n converge pour la topologie faible$*$ vers la mesure de Haar de $\mathbf{T}^2$, c'est-à-dire que pour toute fonction continue $\phi : \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{R}$ on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n}\sum_{x \in P_n} \phi(x) = \int_{\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2} \phi(y)dy. \tag{1}$$

On note Γ l'ensemble des caractères du groupe $(\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2, +)$ c'est-à-dire l'ensemble des applications de la forme $\chi_k(x) = e^{2\pi i(k_1x_1+k_2x_2)}$, $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$.

1) Démontrer que pour établir (1) il suffit de prouver que pour tout caractère χ_k de $\mathbf{T}^2$ différent de 1 ($k \neq 0$), on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n}\sum_{x \in P_n} \chi_k(x) = 0. \tag{2}$$

2) 2.a) Soit $f \in L^2(\mathbf{T}^2, m)$ (m est la mesure de Haar sur $\mathbf{T}^2$) une fonction P_n-périodique c'est-à-dire telle que $f(\cdot + z) = f(\cdot)$ pour tout $z \in P_n$. Démontrer que dans la décomposition en série de Fourier de f, n'apparaissent que les coefficients $\hat{f}(k)$ correspondant à des $\chi_k \in \Gamma$ qui vérifient

$$\forall z \in P_n, \quad \chi_k(z) = 1.$$

2.b) Soit $\eta \in \Gamma$. Vérifier que $\chi(\cdot) := \eta \circ T^n/\eta$ est un caractère et satisfait $\forall z \in P_n, \quad \chi_k(z) = 1$. On note $\mathcal{F}_n$ l'ensemble de ces caractères.

2.c)* On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients dans $\mathbf{C}$ des caractères χ de la forme $\eta \circ T^n/\eta$ ($\eta \in \Gamma$). Démontrer que l'adhérence pour la topologie C^0 de $\mathcal{E}_n$ est l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbf{T}^2 \to \mathbf{C}$ qui sont P_n-périodiques. [**Indication :** on pourra utiliser le théorème de Stone-Weierstrass : *une algèbre sur* $\mathbf{C}$ *de fonctions continues sur un espace compact séparé* X *qui contient 1, est stable par conjugaison complexe et sépare les points*[1] *est* C^0*-dense dans* $C^0(X)$].

2.d) En déduire que tout caractère P_n-périodique est de la forme $\eta \circ T^n/\eta$, $\eta \in \Gamma$.

3) 3.a) Démontrer que si g est une fonction $L^2(\mathbf{T}^2, m)$ alors $\sum_{z \in P_n} g(\cdot + z)$ est P_n-périodique et en déduire que si $\chi \notin \mathcal{F}_n$ on a $\sum_{z \in P_n} \chi(z) = 0$.

3.b) Démontrer que si ξ est une racine réelle non rationnelle d'un polynôme P de degré 2 à coefficients entiers il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} - \{0\}$

$$|\xi - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^2}.$$

[**Indication** Considérer $P(p/q) - P(\xi)$.]

3.c)* Démontrer que pour tout caractère χ différent de 1 il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de n pour lesquels $\chi \in \mathcal{F}_n$.

3.d) En déduire que pour tout caractère $\chi \neq 1$ (2) est vérifiée. Conclure.

Exercice IV Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un système dynamique et ξ une partition fortement génératrice finie contenant k atomes.

1) Démontrer que si η est une partition mesurable finie de X on a $H_\mu(\eta) \leq \log(\#\eta)$ et que l'on a égalité si set seulement si les atomes de η ont tous même μ-mesure.

2) Démontrer que $h_\mu(T) \leq \log k$.

3) On suppose dans ce qui suit que $h_\mu(T) = \log k$

[1] cela signifie que pour tous $x, y \in X$ il existe g dans l'algèbre telle que $g(x) \neq g(y)$

3.a) Montrer que tout atome de $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ a pour μ-mesure $1/k$.

3.b) En déduire que T est métriquement isomorphe [2] à un décalage σ sur un alphabet à k symboles $\{1, \dots, k\}$ muni de la mesure de probabilité de Bernoulli qui donne la mesure $1/k^p$ à tout cylindre de longueur p.

[2] Deux systèmes dynamiques mesurables $(X_i, \mathcal{A}_i, m_i, T_i)$, $i = 1, 2$ sont métriquement isomorphes s'il existe $f : (X_1, \mathcal{A}_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2)$ mesurables, telle que $f_* m_1 = m_2$ et bijective modulo des ensembles de mesures nulles