Corrigé de l'examen du 19 janvier 2007, ULM
Durée 3h

Exercice I

Le nombre m^n commence par un 9 si m^n appartient à l'un des intervalles $I_k = [9\cdot 10^k, 10^{k+1}[$ et donc si et seulement si $n\log_{10} m \in J_k$ où $J_k = [\log_{10} 9 + k, k+1[= k + [\log_{10} 9, 1[$, $k \in \mathbf{N} = k + J_0$. Comme $m^n \geq 1$, m^n commence par un 9 si et seulement si $n\log_{10} m$ est congru à un point de J_0 modulo $\mathbf{Z}$. Introduisons la translation $T : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ donnée par $Tx = x + \log_{10} m$. Le nombre m^n commence par un 9 si et seulement si $T^n 0 \in J_0$. Le nombre $\log_{10} m$ est irrationnel (car sinon il existe p, q entiers tels que $m^q = 10^p$ ce qui n'a lieu que si m est une puissance de 10 comme le montre la décomposition en facteurs premiers) si bien que T est uniquement ergodique (l'unique mesure invariante étant la mesure de Haar sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$). On peut donc appliquer le critère d'équirépartition de Weyl ce qui donne $\lim r_n/n = 1 - \log_{10} 9$. Cette limite ne dépend pas de m si m n'est pas une puissance de 10 (sinon c'est 0).

Exercice II

1) On a clairement $f' > 0$, si bien que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est un difféomorphisme croissant. Comme $f - id$ est 1-périodique, on en déduit que f est un difféomorphisme du cercle préservant l'orientation.

2) On voit que f admet un point fixe 0 unique et que pour tout $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ si bien que $\rho(f) = 0$.

3) Pour tout $x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ on a $\lim f^n(x) = 0$ (faire un dessin). Si ϕ est une fonction continue sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, on voit que les sommes de Birkhoff $S_n\phi(x)/n$ convergent vers $\phi(0)$ et ceci pour tout x. Par conséquent, le théorème de Birkhoff montre que pour toute mesure f-invariante on a $\nu(\phi) = \delta(\phi)$ La mesure de Dirac en 0 est donc l'unique mesure invariante.

Comme f est u.e elle est minimale sur le support de d c'est-à-dire $\{0\}$! Il est clair que f n'est pas minimale (0 est un point fixe) ni topologiquement mélangeant.

4) Si g_α n'a pas de point fixe son nombre de rotation est irrationnel. On sait alors que f est u.e. Le support de l'unique mesure invariante est le cercle tout entier puisque, comme f est C^2, f est C^0 conjugué à une translation (Denjoy) et f est minimale. f ne peut pas être topologiquement mélangeante car une rotation ne l'est pas.

Exercice III

1) Supposons que pour tout caractère $\chi \neq 1$ on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{N_n} \sum_{x\in P_n} \chi(x) = 0.$$

Si $\chi = 1$ la limite précédente vaut clairement 1. Le résultat que l'on veut démontrer est donc vrai pour tout polynôme trigonométrique P. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique tel que $\sup_{x\in\mathbf{T}^2} |\phi(x) - P(x)| \leq \epsilon/3$ si bien que

$$\left|\frac{1}{N_n}\sum_{x\in P_n}\phi(x) - \frac{1}{N_n}\sum_{x\in P_n}\chi(x)\right| \leq \epsilon/3.$$

Or, pour n suffisamment grand $\left|\frac{1}{N_n}\sum_{x\in P_n}\chi(x) - \int\chi(x)dx\right| \leq \epsilon/3$. Pour de tels n on a donc $\left|\frac{1}{N_n}\sum_{x\in P_n}\phi(x) - \int\phi(x)dx\right| \leq \epsilon$ (puisque $\int_{\mathbf{T}^2}|\phi-\chi|dx \leq \epsilon/3$).

2) 2.a) Soient $\hat{f}(k)$, $k \in \mathbf{Z}^2$ les coefficients de Fourier de $f \in L^2(\mathbf{T}^2, m)$. L'égalité $f(\cdot + z) = f(\cdot)$ au sens L^2 est équivalente à $\hat{f}(k) = e^{2\pi izk}\hat{f}(k)$ pour tout $k \in \mathbf{Z}^2$. Ainsi, si $\hat{f}(k) \neq 0$ on doit avoir pour tout $z \in P_n$ $\chi_k(z) = 1$.

2.b) C'est évident.

2.c) On peut considérer un élément de $\mathcal{E}_n$ comme une fonction définie sur l'espace quotient $X = \mathbf{T}^2/P_n$ qui est clairement séparé (P_n est un groupe fermé et discret). L'ensemble $\mathcal{E}$ muni de l'addition et de la multiplication est une algèbre sur $\mathbf{C}$, clairement stable par conjugaison complexe. Il suffit de vérifier que $\mathcal{E}_n$ sépare les points et en particulier que pour tout $\bar{x} \in \mathbf{T}^2/P_n$ avec $\bar{x} \neq 0_{\mathbf{T}^2/P_n}$, si on note $x \notin P_n$ est un représentant de $\bar{x}$ ($\bar{x} = x + P_n$), on peut trouver un élément $\chi = \eta\circ T^n/\eta$ pour lequel $\chi(x) \neq 1$. Si ce n'était pas le cas, cela signifierait que pour tout $\eta \in \Gamma$ on aurait $\eta(T^n x) = \eta(x)$. Mais ceci entraîne que $T^n x = x \mod \mathbf{Z}^2$ c'est-à-dire $x \in P_n$ ce qui est une contradiction. Ainsi, l'adhérence de $\mathcal{E}$ pour la topologie C^0 est $C^0(\mathbf{T}^2/P_n)$ c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{T}^2$ qui sont P_n-périodiques.

2.d) Si χ est un caractère P_n-périodique qui n'est pas dans $\mathcal{F}_n$, l'orthogonalité dans $L^2(m)$ des caractères montre que χ est orthogonal à toute fonction continue sur $\mathbf{T}^2$, P_n-périodique et en particulier à elle-même, ce qui est impossible.

3) 3.a) La première question se traite de façon claire. Pour la seconde, si χ est un caractère, posons $f(x) = \sum_{z\in P_n}\chi(x+z)$. La fonction continue f est P_n-périodique et on a $f(x) = \chi(x)\sum_{z\in P_n}\chi(z)$. Si χ n'est pas dans $\mathcal{F}_n$ on a $\sum_{z\in P_n}\chi(z) = 0$.

3.b) C'est l'argument classique de Liouville : cherchons une constante c plus petite que 1 ; si $\|p/q - \xi\| > 1$ il n'y a rien à démontrer ; sinon, d'après le théorème des accroissments finis on a $\|P(p/q) - P(\xi)\| \leq C \cdot \|p/q - \xi\|$ où $C = \max_{\xi-1\leq z\leq \xi+1}|P'(z)|$. Comme $P(\xi) = 0$, et que $q^2 P(p/q)$ est un entier non nul (p/q ne peut pas être racine de P) on a la conclusion.

3.c) Dire que $\chi = \chi_k$ est dans $\mathcal{F}_n$ est équivalent à dire qu'il existe $l_n \in \mathbf{Z}^2$ tel que $A^n l_n - l_n = k$ (A est égale à sa transposée). Faisons l'hypothèse qu'il existe une suite infinie l_n pour lesquels $A^n l_n - l_n = k$. On a donc $l_n = (A^n - id)^{-1}k$. Si on note $\lambda := (3+\sqrt{5})/2 > 1$ la plus grande valeur propre de A (l'autre étant $1/\lambda$) il est facile de voir que les coefficients de $(A^n - id)^{-1}$ sont bornés en valeur absolue par une constante C indépendante de n (en effet, les coefficients de $A^n - id$ et donc les coefficients de la comatrice, sont bornés par $c\lambda^n$ et le déterminant de $A^n - id$ est équivalent à λ^n). Par conséquent, la suite l_n est bornée et comme elle ne prend que des valeurs entières, on peut en extraire une sous-suite qui prend la même valeur l. Ainsi, pour une infinité de n $A^n l = l + k$. Ceci est clairement impossible : comme l est à coordonnées entières, l n'est pas dans la direction stable de A (dont la pente est irrationnelle) et $A^n l$ tend vers l'infini, ce qui est impossible ($A^n l = l + k$).

On n'avait donc pas besoin de la question 3.b)

3.d) Si χ est un caractère, pour n assez grand $\chi \notin \mathcal{F}_n$ et donc (1) est vérifiée.

Exercice IV

1) C'est du cours.

2) On a $h(T) = h(T,\xi)$ et comme $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ possède au plus k^n atomes on a (cf. inégalité du cours) $H(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi) \leq \log k^n$ si bien que $h(T,\xi) \leq \log k$.

3) 3.a) Puisque la suite $(1/n)H(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi)$ converge vers son inf (sous-additivité) on a pour tout n, $n \log k \leq H(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi)$ et d'après la question précédente on a l'inégalité inverse i.e. $H(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi) = n \log k$: ainsi, tout atome de $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$ a pour μ-mesure $1/k$.

3.b) L'isomorphisme s'obtient de la façon suivante : on associe à μ-pt $x \in X$ la suite $(\omega_i) = \phi(x)$ définie par $T^i x \in C_i$ (on note C_i les atomes de ξ). Comme la partition ξ est génératrice ϕ est injective (la surjectivité est claire) et est d'après la remarque précédente est un isomorphisme entre les deux systèmes dynamiques. Les cylindres du shift sont les images des $\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}\xi$