Corrigé de l'examen du 26 janvier 2009, FIMFA, Systèmes Dynamiques

Exercice 1

A) A.1) Il suffit d'écrire

$$\frac{m(B)}{m(A)}e^{-K(F,I)}\frac{m(F(B))}{m(F(A))} = \frac{\int_B F'(x)dx}{\int_A F'(x)dx} \leq \frac{m(B)}{m(A)}e^{K(F,I)}$$

A.2)A.2.a) C'est la formule de dérivation d'une composition

A.2) A.2.b) Il existe x, y tels que $K(F, I) = \log F'(y) - \log F'(x)$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe c tel que $K(F, I) = (F''(c)/F'(c))(y-x)$. Il suffit donc de choisir $C(F) = \max |F''|/F'$.

B) B.1) Cela résulte d'un simple argument de compacité.

B.2) Cela résulte de la question précédente et du fait que si $g'|J \geq \lambda$ on a

$$\frac{|g(J)|}{|J|} = g'(c)$$

pour un certain $c \in J$.

B.3) On a donc $|g_{j_k} \circ \cdots \circ g_{j_1}(I)| \leq \lambda^{-(p-k)}\delta$. D'après A.2.a) et A.2.b) on a

$$K(g_{j_p} \circ \cdots \circ g_{j_1}, I) \leq \sum_{k=1}^{p} C(F)\lambda^{k-p}\delta \leq \frac{C(F)}{1-\lambda^{-1}}\delta$$

C) C.1) Il suffit de choisir un point de densité pour A.

C.2) On choisit $I = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ et on définit comme dans B.2) $J = g_{j_p} \circ \cdots \circ g_{j_1}(I)$. La question A.1) et l'estimée de B.3) donne le résultat.

D) Cela résulte de la minimalité de G et d'un argument de compacité.

E) La partie C) montre qu'il existe un intervalle de taille δ sur lequel la densité de A est arbitrairement proche de 1. Grâce à D) on peut couvrir le cercle par des $h_i(\tilde{J}_i)$ où les $\tilde{J}_i$ sont des sous-intervalles de J qui sont de longueurs minorées par une constante dépendant de δ et de N uniquement. La densité de A dans chaque $\tilde{J}_i$ est très proche de 1 (car $\tilde{J}_i$ est de longueur comparable à celle de J) et la densité de A dans $h_i(\tilde{J}_i)$ rest proche de 1 d'après les estimées de distorsion du A) (Il n'y a qu'un nombre fini de difféomorphismes h_i).

Exercice 2

1. Ce n'est pas très difficile.

2. De façon générale si $\pi : (Y, \nu) \to (X, \mu)$ est surjective et $\pi \circ T = f \circ \pi$ on a $h(T, \nu) \geq h(f, \mu)$. En effet, si ξ est une partition de X, $\xi = \pi^{-1}\eta$ est une partition de Y et

$$\frac{1}{n} H(\eta \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}\eta) = \frac{1}{n} H(\xi \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\xi)$$

et donc pour tout η $h(T, \nu) \geq h(T, \xi) = h(f, \eta)$; ainsi $h(T, \nu) \geq h(f, \mu)$.

3. a. Puisque $T^k(x, y) = (f^k x, y + S_k\phi(x))$ (où $S_k\phi$ représente la k-ième somme de Birkhoff de ϕ le long de f) on a

$$T^{-k}(A \times B) = \{(x, y) \in X \times \mathbf{T} : x \in f^{-k}(A), \quad y \in B - S_k\phi(x)\},$$

où B est un intervalle de β. Nous appellerons un ensemble de cette forme une bande. Puisque $\pi \circ T = f \circ \pi$, tout élément de $\xi_0^{n-1} = \bigvee_0^{n-1} T^{-k}(\alpha \times \beta)$ se projette par π sur un élément de $\alpha_0^{n-1} = \bigvee_0^{n-1} f^{-k}\alpha$. La forme en bande des éléments de $T^{-k}(\alpha \times \beta)$ montre qu'un $D \in \xi_0^{n-1}$ qui se projette sur $C \in \alpha_0^{n-1}$ est de la forme $\{(x, y) \in X \times \mathbb{T} : x \in f^{-k}(C), \quad y \in I_s - \psi_s(x)\}$ où I_s est l'un des intervalles d'une partition obtenue en prenant le joint de n partitions en r intervalles.

3.c On a

$$H(\bigvee_0^{n-1} T^{-k}(\alpha \times \beta)) = H(\bigvee_0^{n-1} \pi^{-1}(f^{-k}\alpha)) + H(\bigvee_0^{n-1} T^{-k}(\alpha \times \beta | \bigvee_0^{n-1} \pi^{-1}(f^{-k}\alpha))$$

soit

$$H(\bigvee_0^{n-1} T^{-k}(\alpha \times \beta)) = H_\mu(\bigvee_0^{n-1} f^{-k}\alpha)) + H(\bigvee_0^{n-1} T^{-k}(\alpha \times \beta | \bigvee_0^{n-1} \pi^{-1}(f^{-k}\alpha)) \quad (1)$$

La formule donnant l'entropie conditionnelle montre que le dernier terme du membre de droite est majoré par $\sum_{i,j} \nu(\hat{C}_i)\theta(\nu(D_i|\hat{C}_j))$ où $\theta(x) = -x \log x$. Avec les notations du 3.b $\sum_i (\theta(\nu(D_i|C_j)) = \sum_s \theta(|I_s|)$ où $\sum_s |I_s| = 1$ et contient nr termes au plus. Puisque θ est convexe on a $\sum_s \theta(|I_s|) \leq rn\theta(1/n)$. Revenant à la formule (1) et divisant par n on obtient la conclusion.

4. On trouve $\log 2$.

5) Il y avait une erreur (instructive) dans l'énoncé. Le système n'est pas ergodique (donc pas mélangeant) puisque les fonctions $\phi(x, y) = \psi(x - y)$ sont T-invariantes.