Corrections de l'Examen du 18 janvier 2008, FIMFA, Systèmes Dynamiques,
Durée 3h

Exercice 1 1. Ceci résulte de l'unique ergodicité de T_α (l'unique mesure invariante est Lebesgue) : en effet pour toute fonction continue $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ les moyennes de Birkhoff $(1/n)S_n\varphi$ convergent uniformément vers $\int_{\mathbb{T}} \varphi(x)dx$. Or, comme la fonction $f = \mathbf{1}_J$ estr Riemann-intégrable, pour tout $\epsilon > 0$ il existe φ_1, φ_2 continues telles que $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et telles que $\int_{\mathbb{T}}(\varphi_2 - \varphi_1)dx < \epsilon$. On a donc, $(1/n)S_n\varphi_1 \leq (1/n)S_n f \leq (1/n)S_N\varphi_2$; il est alors clair que $(1/n)S_n f$ converge uniformément vers $\int_{\mathbb{T}} f dx$.

2. Après être passé en Fourier on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $(e^{2\pi ik\alpha} - \rho)\hat{\varphi}(k) = 0$. Comme φ est non nulle, un de ses coefficients de Fourier est non nul et on a donc $\rho = e^{2\pi ik\alpha}$, $\varphi(\cdot) = e^{2\pi ik\cdot}$. La réciproque est évidente : le spectre de T_α est donc $\exp(2\pi i\alpha\mathbb{Z})$.

3. Si $J + t = J$ et t est irrationnel on a$J + s = J$ pour tout $s \in \mathbb{T}$ ce qui montre que $J = \mathbb{T}$. Sinon, $t = p/q$ avec p et q premiers entre eux ; il existe donc (Bezout) n entier pour lequel np égale 1 modulo q, c'est-à-dire $J + 1/q = J$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite.

4. 4.a. La mesurabilité de $\psi_{\alpha,J}$ résulte du fait que la pré-image de tout cylindre est une union d'intervalles. Démontrons l'injectivité ; si pour tout $k \in \mathbb{N}\mathbf{1}_J(T^k x) = \mathbf{1}_J(T^k y)$ on a $\mathbf{1}_J(T^k x) = \mathbf{1}_{-t+J}(T^k x)$ où $t = y - x$. Comme $T^k x$ est dense, ceci implique que $J = J+t$ ce qui est impossible par hypothèse (cf. 3.). Le fait que $\psi_{\alpha,J}$ conjugue T_α et σ est tautologique.

4.b. On a $\mathbf{1}_C(\sigma^k \circ \psi_{\alpha,J}) = \mathbf{1}_{\psi^{-1}(C)} \circ T_\alpha^k$ et le résultat découle alors de la question 1.

4.c. Si les itinéraires de 0 sous T_α, T_β dans J, K sont les mêmes, il vient de la question 4.b. que $\mu_{\alpha,J}$ et $\mu_{\beta,K}$ coïncident sur tout cylindre et donc sont égales ; notons μ cette mesure. Il résulte de la question 4.b. que $\psi_{\alpha,J}$ et $\psi_{\beta,K}$ conjuguent $(\mathbb{T}, \lambda)$ à (Σ, μ). En outre, chacune de ces applications est bijective sur son image qui est par définition de μ-mesure 1. Par conséquent $h = \psi_{\beta,K}^{-1} \circ \psi_{\alpha,J}$ est bien définie λ-pp et conjugue T_α à T_β.

4.d. Il est alors facile de voir que T_α et T_β ont même spectre (φ est fonction propre de T_β si et seulement si $\varphi \circ h$ est fonction propre de T_α associée à la même valeur propre. Les spectres de T_α et T_β sont donc les mêmes ce qui signifie $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}\beta$ modulo 1 ; ceci est équivalent au fait que $\alpha = \pm\beta$.

4.e. Si J et K sont des intervalles (une seule composante connexe) ceci résulte du fait que $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_J\circ T_\alpha^k(0)$ converge vers $\lambda(J)$. De même $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}(\mathbf{1}_J\mathbf{1}_K)\circ T_\alpha^k(0)$ égale $n^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{1}_J\circ T_\alpha^k(0)$ et on a donc $\lambda(J\cap K)=\lambda(J)$ d'où $J=K$. En fait cet argument s'applique dès que J et K sont Riemann-intégrables (ce qui redonne le résultat du 5.).

5. 5.a. Ceci résulte du fait que par construction h préserve la mesure de Lebesgue.

5.b. On peut écrire $h(x)+\alpha = h(x+\alpha)$. On peut supposer que $h(x) = x+\theta(x)$ où θ est mesurable bornée et vérifie $\theta(x+1)=\theta(x)$ (on peut relever mesurablement h à $\mathbb{R}$). On a alors, $\theta(x+\alpha)-\theta(x)=0$ et l'ergodicité de T_α montre que $\theta(\cdot)$ est constante ou encore que h est une rotation. D'après 3. on en déduit que $J=K$ (Lebesgue-pp donc partout si J et K sont fermés).

6. Si T_α est C^0-conjugué à une rotation le même résultat est vrai puisque l'image d'un intervalle est un intervalle. D'après le théorème de Denjoy, ceci est assuré si T est C^2. En revanche, si T_α est seulement semi-conjugué à une rotation (Poincaré), le résultat n'est plus vrai.

Exercice 2

1. On a $h_\nu(\eta_n,\sigma^N)=H_\nu(\eta_N|\bigvee_{k=1}^{\infty}\sigma^{-kN}\eta_n)$. Mais pour $N\geq n+1$, les tribus (associées à) η_n et $\bigvee_{k=1}^{\infty}\sigma^{-kN}\eta_n)$ sont indépendantes si bien que $H_\nu(\eta_N|\bigvee_{k=1}^{\infty}\sigma^{-kN}\eta_n) = H_\eta(\eta_n)$. A présent si ξ est une p.m.f, il existe η_n telle que $d(\xi,\eta_n)<\epsilon/2$ ($d(\cdot,\cdot)$ est la distance de Rokhlin). Mais on sait que $\eta\mapsto h(\eta,\sigma^N)$ est 1-Lipschitzienne pour la distance de Rokhlin. Il est alors facile de conclure.

2. 2.a. C'est un calcul facile.

2.b. La première inégalité est claire. Pour la seconde, il suffit d'écrire que $h_\lambda(\xi\vee\eta,\tilde\sigma^N)$ est la limite, mais également l'infimum des $L^{-1}H(\bigvee_{k=0}^{L-1}\tilde\sigma^{-kN}(\xi\vee\eta))$; par ailleurs on sait que $H(\alpha\vee\beta)=H(\alpha)+H(\beta|\alpha)$.

2.c. En procédant comme dans la preuve du théorème 6.1.3 (distance de Rokhlin) du polycopié, on voit que

$$H_\lambda(\bigvee_{k=0}^{L-1}\tilde\sigma^{-kN}\eta|\bigvee_{k=0}^{L-1}\tilde\sigma^{-kN}\xi)\leq LH_\lambda(\eta|\xi).$$

Si on fait tendre L vers l'infini on a donc ((T,μ) est d'entropie nulle)

$$h_\lambda(\xi,\tilde\sigma^N)\leq h_\lambda(\xi\vee\eta,\tilde\sigma^N)\leq H(\xi|\eta).$$

D'après la question 1. ceci montre que $H_\lambda(\xi) \leq H(\xi|\eta)$ ce qui contredit 2.a.

Exercice 3 Laissé à la sagacité du lecteur... (On obtient dans un premier temps la forme de l'itéré n-ième de g_ϵ. Puis on utilise les variétés stables et instables (fortes...) de g_ϵ).