Devoir de Systèmes Dynamiques, FIMFA, Décembre 2008

Exercice 1 Soit $G :]0,1[\to]0,1[$ l'application qui à $0 < x < 1$ associe la partie fractionnaire de son inverse $G(x) = \{x^{-1}\} := (1/x) - [1/x]$.

1) Démontrer que la mesure $\frac{1}{\mathrm{Log}\,2}\frac{dx}{1+x}$ est G-invariante.

2) Soit ξ la partition mesurable de $]0,1[$ constituée des intervalles $]1/(k+1), 1/k]$, $k \in \mathbb{N}^*$. On note ξ_n la partition dont les éléments sont les $\bigcap_{l=0}^{n-1} G^{-l}(C_l)$ où $C_l \in \xi$, $l = 0, \ldots, n-1$. Démontrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $n \geq 1$, $A \in \mathcal{B}$, $B \in \xi_n$

$$M^{-1}\mu(A)\mu(B) \leq \mu(T^{-n}A \cap B) \leq M\mu(A)\mu(B)$$

3) En déduire que (G, m) est ergodique.

4) On note $[a_1, a_2, \ldots]$ le développement en fraction continue de $x = 1/(a_1 + 1/(a_2 + \cdots))$. Démontrer que pour Lebesgue presque-tout point $x \in]0,1[$ la suite $(a_1 + \cdots + a_n)/n$ admet une limite que l'on calculera.

Exercice 2 Soit $A \in SL(d, \mathbb{Z})$ telle que $\mathrm{Spec}(A) \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$ (on dit que A est hyperbolique). On note $T_A : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ l'application $x + \mathbb{Z}^d \mapsto Ax + \mathbb{Z}^d$ et m la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d$ (uniquement définie par $m(A + \mathbb{Z}^d) = \mathrm{Leb}_2(A)$ si A est un ouvert de $[0,1]^d$.)

1) Démontrer que T_A préserve m et que (T_A, m) est ergodique.

2) On note $Per_n(T_A)$ l'ensemble des points de $\mathbb{T}^d$ qui sont n-périodiques ($T_A^n(x) = x$) et $Per(T_A)$ l'union des $Per_n(T_A)$, $n \geq 0$. Démontrer que $Per(T_A) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^d$.

3) 3.a) Démontrer que si $B \in M(d, \mathbb{Z})$, $|\det B|$ est égal au cardinal de $T_B^{-1}(0)$.

3.b) En déduire que $\mathrm{Card}(Per_n(T_A)) = \det(A^n - I)$. Qu'obtient-on si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

4) Démontrer que si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ les transformations T_A et T_{A^2} ne sont pas topologiquement conjuguées (il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{T}^2$ conjuguant T_A et T_{A^2}).

Exercice 3 On définit la suite d'entiers positifs suivante : on pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par récurrence $u_{n+1} = [u_n/2]$ si cet entier n'appartient pas à $\{u_k : 0 \leq k \leq n-1\}$ et $u_{n+1} = 3u_n$ sinon. Démontrer que $\{u_n : n \geq 0\} = \mathbb{N}$.