Devoir de Systèmes Dynamiques

Exercice 1 Soit $(X, \mathcal{A}, T, \mu)$ un système dynamique mesurable inversible (on supposera pour simplifier que X est métrique compact, $\mathcal{A}$ borélienne, T continue).

1. On dit que le système dynamique (X, T, μ) est *faiblement mélangeant* si (X, T, μ) est ergodique et si pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - \{1\}$ il n'existe aucune fonction $\varphi \in L^2(X, \mu)$ telle que $\varphi \circ T = \lambda\varphi$ (l'opérateur unitaire $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ n'admet pas de valeur propre différente de 1).

Définissons sur $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ ($\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est la tribu produit) la dynamique $T \times T$ par $T \times T(x, y) = (Tx, Ty)$.

1.a. Vérifier rapidement que $\mu \otimes \mu$ est invariante par $T \times T$.

1.b. Démontrer que si (T, μ) n'est pas faiblement mélangeant, alors $(T \times T, \mu \otimes \mu)$ n'est pas ergodique.

1.c. On se propose de démontrer la réciproque. Supposons que $(T \times T, \mu \otimes \mu)$ ne soit pas ergodique. Il existe donc $\varphi \in L^\infty(X \times X, \mu \otimes \mu)$ non constante telle que $\psi(Tx, Ty) = \varphi(x, y)$. Définissons l'opérateur hermitien $A : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$ défini par

$$A\theta(x) = \int_X K(x, y)\theta(y)d\mu(y),$$

où $K(x, y) = \varphi(x, y) + \overline{\varphi(y, x)}$ ou $K(x, y) = i(\varphi(x, y) - \overline{\varphi(y, x)})$. Démontrer que $A \circ T = T \circ A$.

1.d. L'opérateur A est compact hermitien et il admet donc un sous-espace propre E_λ de dimension finie associé à une valeur propre $\lambda \neq 0$. Démontrer que si E_λ ne contient pas de fonctions constantes alors T admet une valeur propre différente de 1.

1.e. Démontrer que (T, μ) est faiblement mélangeant si et seulement si $(T \times T, \mu \otimes \mu)$ est ergodique.

2.

2.a. On suppose dans cette question que (T, μ) est ergodique. Démontrer que si ν est une autre mesure de probabilité sur X invariante par T et absolument continue par rapport à μ alors $\nu = \mu$

2.b Supposons que (T, μ) vérifie la propriété suivante : il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout ensemble $A \in \mathcal{A}$ T-invariant de μ-mesure non nulle on a $\mu(A) \geq c$. Démontrer que si $\phi \in L^\infty(X, \mu)$ vérifie $\phi \circ T = \phi$ alors ϕ ne prend qu'un nombre fini de valeurs (μ-mod 0).

3. On suppose à présent que (T, μ) vérifie les deux propriétés suivantes :

i) pour tout $n \geq 1$, (T^n, μ) est ergodique ;

ii) il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) \leq c\mu(A)\mu(B).$$

3.a Démontrer que (T, μ) est faiblement mélangeant. [On pourra étudier $(T \times T, \mu \otimes \mu)$ et démontrer qu'une fonction propre de T ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; on peut utiliser les résultats de 1.]

3.b Notons Δ la mesure diagonale de $(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A})$ définie par $\Delta(A \times B) = \mu(A \cap B)$ $(A, B \in \mathcal{A})$ et soit λ une valeur d'adhérence de $S_*^n \Delta$ où $S : X \times X \to X \times X$ égale $I \times T$ $(S(x, y) = (x, Ty))$. Démontrer que $\lambda = \mu \otimes \mu$.

3.c Démontrer que (T, μ) est (fortement) mélangeant : pour tous $A, B \in \mathcal{A}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

Exercice 2 On pose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \alpha + \epsilon \sin(2\pi x)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $|\epsilon| < 1/10$.

1. Démontrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$. Existe-t-il un nombre $\rho \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f^n(x) - x - n\rho| \leq 1$?

2. 2.a. On suppose α irrationnel. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ et un $\epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $|\epsilon| < \epsilon_0$ il existe un ρ_ϵ tel que pour tout entier $n \leq C\epsilon^{-1}$ on ait $|f^n(x) - x - n\rho_\epsilon| \leq \epsilon$. On pourra démontrer qu'il existe un difféomorphisme proche de l'identité $h = id + O(\epsilon)$ $h : \mathbf{T} \to \mathbf{T}$ qui conjugue f à une translation à $O(\epsilon^2)$-près.

2.b. Le résultat du 2.a est-il vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$?