Systèmes dynamiques - FIMFA - 2009-10

Corrigé du devoir

30 novembre 2009 — 3h — 25 pts

I. Théorème de récurrence de Poincaré et dynamique topologique

Tout point de X est non-errant (1pt): Soit U un voisinage ouvert non vide de x. Alors $\mu(U) > 0$ car μ est de support total. Le théorème de récurrence de Poincaré implique donc qu'il existe $y \in U$ et $n \geq 1$ tel que $f^n(y) \in U$.

μ-presque tout point de X est récurrent (3pts): Puisque X est métrique compact, il existe une base dénombrable $\{U_k, k \geq 1\}$ (d'ouverts) pour la topologie. On remarque d'abord que l'ensemble des points récurrents est exactement l'ensemble $\mathcal{R}$ des x tels que, pour tout U_k contenant x, il existe une suite $m_j = m_j(x,k) \to \infty$ tels que $f^{m_j}(x) \in U_k$. Pour vérifier que $\mu(X \setminus \mathcal{R}) = 0$, il suffit donc de voir que pour tout k et μ presque tout $y \in U_k$ on a une suite $n_j = n_j(y,k) \to \infty$ tels que $f^{n_j}(y) \in U_k$. Si $\mu(U_k) > 0$ alors le théorème de récurrence de Poincaré appliqué à U_k fournit la suite $n_j(y,k)$. (On n'a pas utilisé que μ est de support total pour cette partie.)

II. Ergodicité et mélange

(1) *Un exemple de mesure invariante ergodique mais non mélangeante pour le doublement de l'angle $f(x) = 2x$ modulo 1 sur le cercle. (2 pts)* On considère l'orbite périodique de période 2 donnée par $x = 1/3$, $f(x) = 2/3$, $f^2(x) = 1/3$. on pose $\mu = 1/2(\delta_x + \delta_{f(x)})$. Il est facile de voir que μ est une proba f-invariante ergodique. Mais elle n'est pas mélangeante: prendre ψ la fonction caractéristique de x et ϕ la fonction caractéristique de $f(x)$. On a $\int \psi \, d\mu = \int \phi \, d\mu = 1/2$ mais $\int \psi(\phi \circ f^k) \, d\mu = 1/2$ pour tout k impair et $= 0$ pour tout k pair.

(2) *f_1 n'est pas ergodique pour Lebesgue (et donc pas mélangeante). (2pts)* En effet:

On rappelle d'abord qu'une rotation R_α du cercle d'angle $\alpha = p/q$ rationnel n'est pas ergodique: supposons $1 \leq p < q$ (le cas des angles < 0 est similaire) et $pgcd(p,q) = 1$, prenons $\epsilon > 0$ et posons $E = \cup_{j=0}^{q-1} R_\alpha^j[0,\epsilon]$. Alors, puisque les $R_\alpha^j(0)$ sont deux à deux disjoints pour $0 \leq j \leq q-1$ et que les $R_\alpha^j[0,\epsilon]$ ont chacun longueur ϵ, il existe $\epsilon > 0$ tel que les $R_\alpha^j[0,\epsilon]$ sont deux à deux disjoints pour $0 \leq j \leq q$. En particulier la mesure de E n'est ni 0 ni 1. Mais E est invariant par R_α. On considère $F \subset \mathbb{T}^2$ défini par $F = S^1 \times E$. Alors F est invariant par $f_1 = R_\beta \times R_\alpha$, mais sa mesure n'est ni 1, ni 0.

(3) Même réponse et même preuve.

III. Théorème de Birkhoff

(1) *Un exemple de mesure de probabilité μ invariante et ergodique pour une transformation T d'une variété riemannienne X pour lequel la conclusion du théorème*

ergodique de Birkhoff est vraie pour chaque $g \in L^1(\mu, X)$ et Lebesgue presque toute condition initiale $x \in X$. (1 pt) Prendre $f(x) = 2x$ modulo 1 sur le cercle. Alors Lebesgue est invariante et ergodique.

(Plus généralement: Prendre $X = S^1$ et f un endo C^2 localement dilatant. En effet, on a vu au cours que f admet une proba invariante absolument continue par rapport à Lebesgue de densité partout positive qui est mélangeante et donc ergodique.)

(2) *Une mesure de probabilité μ ergodique invariante par une transformation T d'une variété riemannienne X et un $g \in L^1(\mu, X)$ pour lesquels la conclusion est fausse pour Lebesgue presque toute condition initiale x. (2pts)* Prendre $X = S^1$ et $f(x) = 2x$ modulo 1 sur le cercle. Prendre une fonction g qui vaut 1 sur $[-1/4, 1/4]$ et 0 ailleurs. La mesure de dirac δ_y, avec $y = 0 = f(y)$ est une proba invariante ergodique. Cependant, par (1), pour Lebesgue presque tout x dans S^1 les moyennes de Birkhoff convergent vers $\int g(x)\, dx = 1/2$ alors que $\int g\, d\mu = 1$.

IV. Entropie de Kolmogorov

Si g est un facteur de f alors $h_\nu(g) \leq h_\mu(f)$. (2pts) On applique la définition de l'entropie, en utilisant les hypothèses. On n'obtient pas a priori toutes les partitions pour $(X, \mathcal{B})$ en relevant celles de $(Y, \mathcal{C})$, ce qui fait apparaître l'inégalité.

Un exemple où l'inégalité est stricte. (2pts) $X = \mathbb{T}^2$, $Y = S^1 = \mathbb{T}^1$, $\Pi(x, y) = x$, $f(x, y) = (2x, 2y)$ modulo 1, $g(x) = 2x$ modulo 1 avec μ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}^2$ et ν la mesure de Lebesgue normalisée sur $S^1 = \mathbb{T}^1$. Alors $h_\nu(g) = \log 2$ (vu au cours) mais $h_\mu(f) = \log 4$ (facile).

V. Dynamique en dimension un

Dans la déf. de l'opérateur de transfert, il y avait une faute de frappe: il faut remplacer $y \neq 0$ par $y \neq 1/2$.

(1) La mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ n'est pas f-invariante, par exemple parce que la mesure de $f^{-1}([0.8, 1])$ est nulle. Mais aussi, moins trivialement, parce que la mesure de $f^{-1}([0, 3/4])$ vaut 1. (1pt)

(2) *$\mathcal{L}$ est un opérateur borné sur $L^1(\text{Lebesgue}, [0, 1])$, de norme 1. (2pts)* Il suffit de voir que pour tout $\psi \in L^1(dx)$, on a $\int |\psi(x)|\, dx \geq \int |\mathcal{L}\psi(x)|\, dx$ càd:

$$\int_0^1 |\psi(x)|\, dx \geq \int_0^{3/4} |\sum_{y \neq 1/2 : f(y) = x} \frac{2}{3}\psi(y)|\, dx$$

Le changement de variable inverse de $f : [0, 1/2) \to [0, 3/4)$ donne

$$\int_0^{3/4} \frac{2}{3} |\psi((f|_{[0,1/2)})^{-1}(x))|\, dx = \int_0^{1/2} |\psi(y)|\, dy$$

et on procède de même sur $(1/2, 1]$.

(3) L'image de fonction constante $\equiv 1$ sur $[0,1]$ est la fonction caractéristique de $[0,3/4)$ que multiplie $4/3$. Cette fonction n'est pas continue sur $[0,1]$. $\mathcal{L}$ n'est donc pas borné sur $C^0[0,1]$. *(1pt)*

(4) *(2pts)* L'opérateur $\mathcal{L}$ est borné sur l'espace de Banach $BV([0,1])$ des fonctions $\varphi : I \to \mathbb{C}$ à variation bornée, car

$$\mathrm{var}\,(\mathcal{L}\varphi) \le \frac{2}{3}\mathrm{var}\,\varphi + \frac{4}{3}\sup|\varphi|\,.$$

L'inégalité ci-dessus suffit, car $\sup_{[0,1]} = |\varphi| \le \mathrm{var}\,\varphi + \int_0^1 |\varphi| dx$ et $\int_0^1 |\varphi| dx \le \sup_{[0,1]} |\varphi|$ et donc l'inégalité implique

$$\sup|\mathcal{L}\varphi(x)|\,dx \le \mathrm{var}\,\mathcal{L}\varphi(x) + \int |\mathcal{L}(\varphi(x))|\,dx \le \frac{2}{3}\mathrm{var}\,\varphi + \frac{7}{3}\sup|\varphi|\,.$$

Pour montrer l'inégalité, on remarque d'abord que $\mathcal{L}\varphi(x) = 0$ si $x \ge 3/4$, et que pour $x \in [0, 3/4)$, on a

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \frac{2}{3}(\varphi(2x/3) + \varphi(1 - 2x/3))\,.$$

Pour conclure, on observe que $\mathrm{var}\,_{[0,3/4)}\varphi(2x/3) = \mathrm{var}\,_{[0,1/2)}\varphi$, $\mathrm{var}\,_{[0,3/4)}\varphi(1 - 2x/3) = \mathrm{var}\,_{(1/2,1]}\varphi$ et que le saut de $\mathcal{L}\varphi(x)$ en $x = 3/4$ est majoré par

$$\frac{2}{3}(\sup_{[0,1/2)}|\varphi| + \sup_{(1/2,1]}|\varphi|) \le \frac{4}{3}\sup|\varphi|\,;$$

(5) *La transformation f admet une mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue de densité à variation bornée. (3pts)*

C'était vraiment difficile sans indication! J'aurais dû vous donner les indication suivantes:

(a) Théorème de Helly: Si ψ_n est une suite de fonctions complexes sur $[0,1]$ telles qu'il existe $K > 0$ avec $\sup|\psi_n| \le K$ et $\mathrm{var}\,\psi_n \le K$ pour tout n, alors il existe $\psi \in BV$ avec $\sup|\psi| \le K$ et $\mathrm{var}\,\psi \le K$ et une sous-suite ψ_{n_j} qui converge vers ψ, dans $L^1(dx)$ et presque partout, lorsque $j \to \infty$.

(b) Vérifier que l'inégalité de (4) peut-être précisée:

$$\mathrm{var}\,\mathcal{L}(\varphi) \le \frac{2}{3}(\mathrm{var}\,\varphi + \sup_{J_1}|\varphi| + \sup_{J_2}|\varphi|)\,.$$

avec J_i les intervalles de monotonie (maximaux) de f, et écrire l'analogue de cette inégalité précisée pour $\mathrm{var}\,\mathcal{L}^k\varphi$.

(c) On rappelle que si $J \subset [0,1]$ est un intervalle alors $\sup_J |\varphi| \le \mathrm{var}_J \varphi + |J|^{-1} \int_J |\varphi|\, dx$.

Alors, l'exercice devient plus facile:

Oui, f admet une mesure invariante absolument μ continue par rapport à Lebesgue, et sa densité est à variation bornée. (On n'affirme pas que le support de μ est $= [0,1]$! En fait on pourrait montrer que ce support est $= [a, 3/4]$, avec $a = f(3/4)$.)

Démonstration: Il suffit de voir qu'il existe $\psi \in BV$, non négative, avec $\int \psi\, dx = 1$ et $\mathcal{L}\psi = \psi$. En remplaçant Arzelà-Ascoli par Helly et en utilisant (a), on peut appliquer la démonstration vue au cours (c'était pour construire une mesure a.c. invariante pour les endos C^2 et localement dilatants du cercle). Pour cela, il suffit de voir qu'il existe $\theta < 1$ et $C > 0$ tels que pour tout $k \ge 1$

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^k \varphi \le C\theta^k \mathrm{var}\, \varphi + C \int |\varphi|\, dx\,.$$

Remarquons d'abord qu'il suffit pour cela de voir qu'il existe $\theta_0 < 1$ et $K_0 > 0$ tels que pour tout $m \ge 1$ il existe $C_m > 0$ avec

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^m \varphi \le K_0 \theta_0^m \mathrm{var}\, \varphi + C_m \int |\varphi|\, dx\,. \qquad (\star)$$

En effet, supposons $(\star)$ et soit m_0 tel que $K_0\theta_0^{m_0} < 1$. Pour $k \ge 1$ on pose $k = qm_0 + r$ avec $0 \le q$ et $0 \le r < m_0$. Alors

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^{qm_0+r} \varphi \le (K_0\theta_0^{m_0})^q \mathrm{var}\, \mathcal{L}^r \varphi + \frac{C_{m_0}}{1 - K_0\theta_0^{m_0}} \int |\mathcal{L}^r \varphi|\, dx\,.$$

(Par récurrence sur q, en utilisant $\int |\mathcal{L}\phi|\, dx = \int |\phi|\, dx$ et une série géométrique.) Mais alors

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^k \varphi \le (K_0\theta_0^{m_0})^q K_0 \theta_0^r \mathrm{var}\, \varphi + \max_{0 \le j < m_0} C_j \int |\varphi|\, dx + \frac{C_{m_0}}{1 - K_0\theta_0^{m_0}} \int |\varphi|\, dx\,.$$

Pour terminer, on montre $(\star)$. On a pour tout $m \ge 1$ une partition (mod 0) de $[0,1]$ en intervalles (compacts, maximaux) de monotonie pour f^m, notés $J_i = J_{i,m}$, avec $1 \le i \le N_m$. En utilisant (b) on montre facilement que

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^m \varphi \le \frac{2^m}{3^m} \big(\mathrm{var}\, \varphi + \sum_{i=1}^{N_m} \sup_{J_i} |\varphi| \big)\,.$$

En utilisant (c) on a

$$\mathrm{var}\, \mathcal{L}^m \varphi \le \frac{2^m}{3^m} \big(\mathrm{var}\, \varphi + \sum_{i=1}^{N_m} \mathrm{var}_{J_i} \varphi + \sum_{i=1}^{N_m} |J_i|^{-1} \int_{J_i} |\varphi|\, dx \big)\,.$$

Et donc

$$\operatorname{var} \mathcal{L}^m \varphi \leq \frac{2^m}{3^m} \left(2\operatorname{var} \varphi + \max_{i=1,\dots,N_m} |J_i|^{-1} \cdot \Big(\int_{[0,1]} |\varphi| \, dx \Big) \right) .$$

C'est bien $(\star)$: on pose $K_0 = 2$, $\theta_0 = 3/2$ et $C_m = \frac{2^m}{3^m} \max_{i=1,\dots,N_m} |J_i|^{-1}$. (A noter que $\max_{i=1,\dots,N_m} |J_i|^{-1}$ peut-être beaucoup plus grand que $(3/2)^m$, mais que c'est toujours un nombre fini!)

Autre démonstration: Montrer que l'entropie topologique de f est $\leq \log(3/2)$. Montrer que pour tout $\delta > 0$ il existe $K_\delta > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$ le nombre de branches inverse de f^k (et donc $(3/2)^k \sup |\mathcal{L}^k(1)|$) est borné par $K_\delta \exp(k(h_{top}(f) + \delta))$.