Systèmes dynamiques - FIMFA - 2009-10

Devoir

30 novembre 2009 — compter 3h

I. Théorème de récurrence de Poincaré et dynamique topologique

Soit X un espace métrique compact et $f : X \to X$ continue. On dit que $x \in X$ est *non-errant* pour f si pour tout voisinage ouvert non vide U de x il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. on dit que x est *récurrent* si $x \in \omega(x)$ (l'ensemble ω-limite a éte défini au cours, c'est l'ensemble des points d'accumulation de $\{f^n(x)\, n \geq 1\}$).

Supposons de plus que f préserve une mesure de probabilité (borélienne) μ de support total. Montrer que tout point de X est non-errant. Montrer que μ-presque tout point de X est récurrent.

II. Ergodicité et mélange

(1) Donner un exemple de mesure invariante ergodique mais non mélangeante pour le doublement de l'angle $f(x) = 2x$ modulo 1 sur le cercle.

(2) On considère la transformation $f_1(x, y) = (x + \beta(\text{mod } 1), y + \alpha(\text{mod } 1))$ du tore $\mathbb{T}^2$, avec α et β rationnels. (On admet sans preuve qu'elle préserve la mesure de Lebesgue.) Cette transformation est-elle ergodique pour Lebesgue? Mélangeante pour Lebesgue? (Justifier.)

(3) Même question pour $f_2(x, y) = (x + \beta(\text{mod } 1), y + \alpha(\text{mod } 1))$ avec α rationnel et β irrationnel.

III. Théorème de Birkhoff

On rappelle un énoncé du théorème ergodique de Birkhoff: soit μ une mesure de probabilité sur un espace X, invariante et ergodique pour une transformation mesurable T. Alors, pour toute fonction $g \in L^1(\mu, X)$ on a pour μ-presque tout $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(x)) = \int g \, d\mu \, . \tag{*}$$

(1) Donner un exemple de mesure de probabilité μ invariante et ergodique pour une transformation T d'une variété riemannienne X pour lequel la conclusion (*) du théorème ergodique de Birkhoff est vraie pour chaque $g \in L^1(\mu, X)$ et Lebesgue presque toute condition initiale $x \in X$. (Justifier.)

(2) Existe-t-il une mesure de probabilité μ ergodique invariante par une transformation T d'une variété riemannienne X et un $g \in L^1(\mu, X)$ pour lesquels la conclusion (*) est *fausse* pour Lebesgue presque toute condition initiale x? (Justifier.)

IV. Entropie de Kolmogorov

Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν des probabilités. On suppose que $f : X \to X$ est mesurable et préserve μ, que $g : Y \to Y$ est mesurable et préserve ν, et que g est un *facteur* de f, càd il existe $\Pi : X \to Y$, mesurable, telle que $\mu(\Pi^{-1}(E)) = \nu(E)$ pour tout $E \in \mathcal{C}$ et $g \circ \Pi = \Pi \circ f$. Montrer que $h_\nu(g) \leq h_\mu(f)$. Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

V. Dynamique en dimension un

On considère la transformation continue f de l'intervalle $[0,1]$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & 0 \leq x \leq 1/2\,, \\ \frac{3-3x}{2} & 1/2 < x \leq 1\,. \end{cases}$$

(1) Dessiner le graphe de f. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ n'est pas f-invariante.

(2) On introduit l'opérateur de transfert (ou de Perron-Frobenius) défini sur $L^1(\textit{Lebesgue}, [0,1])$ par

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \sum_{y \neq 1/2 : f(y) = x} \frac{2}{3}\varphi(y)\,.$$

(Dans la version initiale il y avait une faute de frappe: $y \neq 0$ au lieu de $y \neq 1/2$.)
Montrer que $\mathcal{L}$ est un opérateur borné sur $L^1(\textit{Lebesgue}, [0,1])$ et que sa norme est égale à 1.

(3) L'opérateur $\mathcal{L}$ est-il borné sur l'espace de Banach $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, avec $\|\varphi\|_0 = \sup|\varphi|$?
Indication: La fonction constante $\equiv 1$ sur $[0,1]$ est continue. Calculer son image.

(4) Pour un intervalle $I \subset [0,1]$ et pour $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction bornée, on note

$$\mathrm{var}_I \varphi = \sup_{t_0 < t_1 < \cdots < t_n, [t_0, t_n] \subset I} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|\,.$$

On dit que φ est à variation bornée si $\mathrm{var}\,\varphi := \mathrm{var}_{[0,1]}\varphi < \infty$. On rappelle que $\mathrm{var}\,(\varphi + \psi) \leq \mathrm{var}\,\varphi + \mathrm{var}\,\psi$, si φ et ψ sont deux fonctions sur $[0,1]$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{var}\,(\lambda\varphi) = |\lambda|\mathrm{var}\,\varphi$. On rappelle que pour tout homéomorphisme $h : I \to J$, avec I et J des intervalles de $[0,1]$, on a $\mathrm{var}_I(\varphi \circ h) = \mathrm{var}_J(\varphi)$. On rappelle que si un intervalle I s'écrit comme $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \{x\}$ alors $\mathrm{var}_I \varphi = \mathrm{var}_{I_1}\varphi + \mathrm{var}_{I_2}\varphi$, pour toute fonction $\varphi : I \to \mathbb{C}$.

L'opérateur $\mathcal{L}$ est-il borné sur l'espace de Banach $BV([0,1])$ des fonctions $\varphi : I \to \mathbb{C}$ à variation bornée, avec $\|\varphi\| = \sup_{[0,1]}|\varphi| + \mathrm{var}_{[0,1]}\varphi$? (On admet sans preuve que $BV([0,1])$ est complet.) Justifier.

Indication: On appliquera les “rappels” notamment pour $I_1 = [0, 3/4]$, $I_2 = [3/4, 1]$ pour montrer l'inégalité

$$\operatorname{var}(\mathcal{L}\varphi) \leq \frac{2}{3}\operatorname{var}\varphi + \frac{4}{3}\sup|\varphi|\,.$$

(5) La transformation f admet-elle une mesure invariante absolument continue par rapport à Lebesgue? Si non, pourquoi? Si oui, que peut-on dire de sa densité?